

MATH121b  
Série 4 : équations différentielles

**Exercice 1**

Résoudre les équations différentielles sur l'intervalle indiqué :

1.  $y' - 3y = 5$  sur  $\mathbb{R}$ .
2.  $y' + 2y = 3t + 1$  sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $y' = 3y + (t + 1)e^{2t}$  sur  $]0, +\infty[$ .
4.  $ty' + 2y = \frac{1}{t^4}$  sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 2**

On s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce dans différentes situations. On note  $y(t)$  le nombre d'individus qui compose cette population à l'instant  $t$ .

1. L'évolution de la population est modélisée par l'équation  $(E)$  :  $y' = ky$  où  $k$  est une constante positive.
  - (a) Que représente la constante  $k$  ?
  - (b) Résoudre l'équation  $(E)$ .
  - (c) Quelle est la limite de  $y(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini ? Ceci paraît-il plausible ?
2. On suppose que cette espèce subit la prédation d'une autre espèce dont on note  $z$  le nombre d'individus. On modélise alors l'évolution de notre population par l'équation  $(E')$  :  $y' = ky - ayz$ , où  $a$  est une constante positive.
  - (a) Que représente la constante  $a$  ?
  - (b) On suppose que  $z$  est constant. Résoudre l'équation  $(E')$ .
  - (c) Calculer la limite de  $y(t)$  quand  $t$  tend vers l'infini (on discutera suivant le signe de  $k - az$ ). Quelles situations cela illustre-t-il ?

**Exercice 3**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1.  $y'' - y' + y = 0$ .
2.  $y'' - \omega^2 y = 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^*$ .
3.  $y'' + \omega^2 y = 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^*$ .
4.  $y'' - 4y' + 4y = 5t + 1$ .
5.  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$ .
6.  $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t} + 5$ .

**Exercice 4**

Un circuit électrique est formé d'une résistance  $R$ , d'un condensateur de capacité  $C$  et d'un générateur de f.e.m :  $E(t) = E_m \sin(\omega t)$  placés en série. La charge  $q(t)$  du condensateur vérifie l'équation différentielle :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_m \sin(\omega t)$$

En sachant que le condensateur est initialement déchargé, déterminer  $q(t)$ .