

Polycopié pour le cours de MATH121b
Analyse élémentaire.

◇ Fiche méthode 3 : Équations différentielles.

I Du premier ordre :

On a une équation du type (E) : $y' + ay = b$ à résoudre. (Attention, a est a priori une fonction).

• **On commence par résoudre l'équation homogène (H) :** $y' + ay = 0$. On note u_0 ses solutions.

1. Si on se souvient de la formule du cours qui donne les solutions, on calcule une primitive $A(t)$ de a , et on remplace $\int a(s)ds$ par $A(t)$ dans la formule pour obtenir toutes les solutions de (H) :

$$u_0(t) = K \exp(-A(t)) \text{ avec } K \text{ constant.}$$

2. Si on a oublié la formule, on écrit (au brouillon, sinon il faut justifier pourquoi y ne s'annule pas quand on divise) :

$$y' = -ay, \text{ donc } \frac{y'}{y} = -a, \text{ donc en intégrant des deux cotés :}$$

$$\ln(|y|) = - \int a(s)ds + k, \text{ } k \text{ constante.}$$

On calcule une primitive de a : $A(t) = \int a(s)ds$. En prenant l'exponentielle des deux cotés de la dernière l'égalité, on obtient :

$$u_0(t) = K \exp(-A(t)) \text{ avec } K \text{ constant.}$$

• **On cherche ensuite une solution particulière de (E).** On note celle-ci $u_1(t)$. Si a est constant, on cherche cette solution sous la "même forme" que le second membre b :

1. Si $b(t)$ est de la forme $b(t) = P(t)$, où P est un polynôme, on cherche u_1 sous la forme $u_1(t) = Q(t)$, où Q est un polynôme de même degré que P .
2. Si $b(t)$ est de la forme $b(t) = P(t) \exp(rt)$, où P est un polynôme, on cherche u_1 sous la forme $u_1(t) = Q(t) \exp(rt)$, où Q est un polynôme de même degré que P .
3. Si $b(t)$ est de la forme $b(t) = P_1(t) \sin(rt) + P_2(t) \cos(rt)$, où P_1 et P_2 sont des polynômes, on cherche u_1 sous la forme $u_1(t) = Q_1(t) \sin(rt) + Q_2(t) \cos(rt)$, où Q_1 et Q_2 sont des polynômes de même degré que le plus haut degré entre P_1 et P_2 .

Remarques :

- * Ces différents cas incluent le cas où P est une constante et le cas où Q_1 ou Q_2 est nul.
- * Si $b(t)$ s'écrit $b(t) = b_1(t) + b_2(t) + \dots$ où chacun des b_i a une des formes précédentes, on cherche des solutions particulières de $y' + ay = b_1$, $y' + ay = b_2, \dots$, qu'on appelle v_1, v_2, \dots . Une solution particulière de (E) est : $u_1 = v_1 + v_2 + \dots$ (théorème de superposition).

• **Les solutions de (E) s'obtiennent en prenant la somme des solutions de H avec la solution particulière :** la solution générale de (E) est $u(t) = u_0(t) + u_1(t)$.

Exemple : Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = t^2$

Rédaction :

L'équation homogène est (H) : $y' + 2y = 0$.

On a $\int -2ds = -2t + cste$, donc la solution générale de l'équation homogène est :

$u_0(t) = K \exp(-2t)$ pour $K \in \mathbb{R}$.

Cherchons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme : $u_1(t) = at^2 + bt + c$.

On a $u_1'(t) = 2at + b$, donc, si u_1 est solution de (E), $(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) = t^2$

C'est à dire $2at^2 + (2a + 2b)t + (b + 2c) = t^2$

On doit donc avoir :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La fonction $u_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ est une solution particulière de (H).

La solution générale de (E) est donc :

$u(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + K \exp(-2t)$ pour $K \in \mathbb{R}$.

Brouillon et détail :

$$y' = -2y \Rightarrow \frac{y'}{y} = -2$$

$$\Rightarrow \ln(|y|) = \int -2ds$$

$$\Rightarrow \ln(|y|) = -2t$$

$$\Rightarrow y = K \exp(-2t)$$

Le second membre est un polynôme de degré 2, on cherche la solution particulière de la même forme.

On injecte la forme dans l'équation (E)

On identifie les termes de même degré

Vérifier au brouillon peut s'avérer bénéfique ...

On prend la somme de u_0 et u_1

Exemple d'un problème de Cauchy : Résoudre le système :

$$(C) : y' - e^t y = 0, \quad y(0) = 1.$$

On cherche d'abord la solution générale $u(t)$ de l'équation $y' - e^t y = 0$.

On a $\int -e^s ds = e^t + cste$, donc : (si on a oublié la formule : $\frac{y'}{y} = e^t$, donc $\ln |y| = e^t + cste$, donc :)

$$u(t) = K e^{e^t}, \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

On détermine ensuite la constante d'intégration K :

Si $y(0) = 1$, on a $K \exp(\exp(0)) = 1$, c'est à dire $K e = 1$, donc $K = \frac{1}{e}$.

Finalement, la solution de (C) est

$$y(t) = \left(\frac{1}{e}\right) e^{e^t}$$

II Du second ordre

Le schéma est le même que pour le premier ordre :

1. On cherche la solution générale u_0 de l'équation homogène ;
2. On cherche une solution particulière u_1 de l'équation, sous la même forme que le second membre ;
3. La solution générale de l'équation est $u = u_0 + u_1$.

Il y a trois cas de figure pour les solutions de l'équation homogène, selon si le Δ est positif, négatif ou nul. On va voir trois exemples correspondants.

Exemple 1 (Δ positif). $(H_1) : 2y'' - y' - y = 0$

Rédaction

L'équation caractéristique de (H_1) est :

$$2r^2 - r - 1 = 0$$

$$\text{On a } \Delta = 1^2 - 4(2)(-1) = 9.$$

Δ est positif, donc l'équation caractéristique a deux racines :

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = -\frac{1}{2}$$

La solution générale u_0 de (H_1) est donc :

$$u_0(t) = Ae^t + Be^{-\frac{t}{2}}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$$

Détail

Obtenu en remplaçant y'' par r^2 , y' par r et y par 1.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

les racines sont $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

c'est la formule du cours.

Exemple 2 (Δ négatif). $(H_2) : y'' - 2y' + 2y = 0$

Rédaction

L'équation caractéristique de (H_2) est :

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$$\text{On a } \Delta = -4.$$

Δ est négatif. On pose

$$r_0 = 2/2 = 1 \text{ et } \phi = 2/2 = 1$$

La solution générale u_0 de (H_2) est donc :

$$u_0(t) = Ae^{r_0 t} \cos(\phi t) + Be^{r_0 t} \sin(\phi t), \text{ avec } A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$$

C'est à dire $u_0(t) = Ae^t \cos(t) + Be^t \sin(t)$, avec $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$

Détail

Obtenu en remplaçant y'' par r^2 , y' par r et y par 1.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$r_0 = -\frac{b}{2a} \text{ et } \phi = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

c'est la formule du cours.

Exemple 3 (Δ nul). $(H_3) : y'' + 2y' + y = 0$

Rédaction

L'équation caractéristique de (H_3) est :

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

$$\text{On a } \Delta = 2^2 - 4(1)(1) = 0.$$

Δ est nul, donc l'équation caractéristique a une racine double :

$$r_0 = -1$$

La solution générale u_0 de (H_3) est donc :

$$u_0(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$$

Détail

Obtenu en remplaçant y'' par r^2 , y' par r et y par 1.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

la racine est $\frac{-b}{2a}$

c'est la formule du cours.

Exemple 4 : recherche d'une solution particulière. (E) : $2y'' - y' - y = 10 \sin(t)$

Rédaction

- Résolvons l'équation homogène (H) : $2y'' - y' - y = 0$.

C'est l'équation H_1 de l'exemple 1.

La solution générale u_0 de (H) est donc :

$$u_0(t) = Ae^t + Be^{-\frac{t}{2}}, \text{ avec } A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$$

- Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$u_1(t) = \alpha \cos(t) + \beta \sin(t)$$

$$\text{On a } u_1'(t) = -\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)$$

$$\text{et } u_1''(t) = -\alpha \cos(t) - \beta \sin(t)$$

Si $u_1(t)$ est solution de (E), on a donc :

$$2(-\alpha \cos(t) - \beta \sin(t)) - (-\alpha \sin(t) + \beta \cos(t)) \dots \\ \dots - (\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)) = 10 \sin(t),$$

c'est à dire :

$$\cos(t)(-3\alpha - \beta) + \sin(t)(-3\beta + \alpha) = 10 \sin(t)$$

On a donc :

$$\begin{cases} -3\alpha - \beta = 0 \\ -3\beta + \alpha = 10 \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

Une solution particulière de (E) est donc :

$$u_1(t) = \cos(t) - 3 \sin(t)$$

- La solution générale de (E) est :

$$u(t) = Ae^t + Be^{-\frac{t}{2}} + \cos(t) - 3 \sin(t), \text{ avec } A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}.$$

Détail

(voir exemple 1)

Le second membre est de la forme (3) : $P_1(t) \sin(t) + P_2(t) \cos(t)$ (ici $P_1 = 10, P_2 = 0$)

On a besoin de l'expression de u_1' et u_1'' pour remplacer dans (E)

On remplace ici dans (E)

On range un peu

On identifie les termes en sin et ceux en cos

On résoud le système

On somme u_0 et u_1 pour avoir les solutions de (E).