Université de Savoie **L1 MASS-SFT-SVT**
2012-2013
O. Le Gal

Polycopié pour le cours de MATH121
Analyse élémentaire.

◇ Fiche méthode 1 : Ensemble de définition

Pour que x soit dans l'ensemble de définition d'une fonction f il faut que les expressions au dénominateur ne s'annulent pas et que les expressions sous la racine soient positives.
C'est pour cela qu'il est essentiel de savoir factoriser un polynôme et de savoir étudier le signe d'un polynôme et d'une fraction rationnelle.
Rappel : une **racine** d'un polynôme P est une valeur a telle que $P(a) = 0$. Par exemple, 1 est racine de $P(x) = x^3 - 2x + 1$ car $P(1) = 1^3 - 2 * 1 + 1 = 0$.

- **Factorisation d'un polynôme :**

– **Polynôme de degré** 2 : On veut factoriser $P(x) = ax^2 + bx + c$.
  On résoud $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$
  On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$:
  – Si $\Delta > 0$, on a deux raciness réelles $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$,
  et $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  – Si $\Delta = 0$, il y a une seule racine réelle : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$,
  et $P(x) = a(x - x_0)^2$.
  – Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine réelle, et le polynôme ne se factorise pas dans les réels.

– **Pour un polynôme de degré plus élevé**, le principe à retenir est le suivant : si on connait une racine a, on peut factoriser $x - a$. On commence donc par chercher une racine "évidente" : 0, 1, -1, 2 ou -2, puis on met en facteur respectivement x, $x - 1$, $x + 1$, $x - 2$ ou $x + 2$. On recommence alors, jusqu'à l'obtention d'un polynôme de degré ≤ 2.
  S'il n'y a pas de racine "évidente" , on a pas de méthode générale.

– **Factorisation de $x - a$ par division euclidienne de polynômes :**
  Exemple 1 : $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.
  $P(1) = 2 - 4 - 2 + 4 = 0$ donc 1 est racine évidente. On factorise $x - 1$.
  On effectue la division euclidienne de $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ par $x - 1$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -4x^2 & -2x & +4 & \quad x-1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +2x^2 & & & 2x^2 - 2x - 4 \\ \cline{1-4}
 & -2x^2 & -2x & +4 & \\
 & 2x^2 & -2x & & \\ \cline{2-4}
 & & -4x & +4 & \\
 & & +4x & -4 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

  Donc $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = (x - 1)(2x^2 - 2x - 4)$.
  On factorise maintenant $2x^2 - 2x - 4$. On peut déjà factoriser 2 pour simplifier les calculs : $2x^2 - 2x - 4 = 2(x^2 - x - 2)$ et on factorise $x^2 - x - 2$. C'est un polynôme de degré 2.
  $\Delta = (-1)^2 - 4 * 1 * (-2) = 9 = 3^2$; $x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$, $x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$.
  $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$
  Finalement : $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x - 1)(x + 1)(x - 2)$.
  Exemple 2 : $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ pour vous entraîner, voici la réponse :
  $P(x) = 2(x - 1)(x - \dfrac{1}{2})(x + 3)$.

- **Signe d'un polynôme :**

– **Polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta < 0$:**
On veut connaître le signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$.
On calcule son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta < 0$, P est de signe constant sur $\mathbb{R}$ du signe de a. Sinon, on factorise P comme ci-dessus.

– **Polynôme sous forme factorisée :**
Une fois obtenue la forme factorisée de P, on dresse un tableau de signes.
Exemple 1 : $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x-1)(x+1)(x-2)$. Sur la première ligne du tableau, on met les valeurs qui annulent P. Ce sont les valeurs pour lesquelles, P change de signe éventuellement.

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $P(x) \geq 0$ si $x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty[$.

On peut aussi dresser directement la dernière ligne du tableau en remarquant que les signes alternent, ou en calculant dans chaque case le signe avec un exemple (dans la case $[-1, 1]$ l'image de 0 est 4, donc, cette case est positive).

Exemple 2 : Supposons qu'on connaisse la forme factorisée
$P(x) = -2(x-1)^2(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$.
Le discriminant de $x^2 + x + 1$ est $\Delta = -3 < 0$. Ce trinôme est donc de signe constant positif. Il n'intervient pas dans le signe de P.
Je donne directement la dernière ligne du tableau, en remarquant que le signe ne change pas en $x = 1$ puisque $(x-1)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
ATTENTION : Le signe moins du -2 change tous les signes !

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, $P(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty, -1] \cup \{1\} \cup [2, +\infty[$.

- **Ensemble de définition :**

Exemple 1 : $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^2 + 3x} = \dfrac{2(x-1)(x+1)(x-2)}{x(x+3)}$
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{0, -3\}$

Exemple 2 : $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3 - 4x^2 - 2x + 4}{x^2 + 3x}} = \sqrt{\dfrac{2(x-1)(x+1)(x-2)}{x(x+3)}} = \sqrt{Q(x)}$.

On étudie le signe de $Q(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)(x-2)}{x(x+3)}$.

x	$-\infty$		-3		-1		0		1		2		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{D}_f =]-3, -1] \cup]0, 1] \cup [2, +\infty[$

$\diamond$ Fiche méthode 2 : Limites, formes indéterminées

La plupart des limites sont obtenues grâce à des limites déjà connues par utilisation des théorèmes généraux. Particulièrement, il faut bien maîtriser la composition des limites. Il en va de même pour les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Par contre la recherche des formes indéterminées est un peu plus délicate. Voici quelques techniques de base.

- **Polynômes et fractions rationnelles :**

- Les techniques présentées consistent, en fait à factoriser le terme prépondérant de chaque polynôme (le terme qui est le plus "gros"). Cette technique peut se généraliser à d'autre fonctions (cf ch 4). Pour un polynôme les choses sont simples : le terme prépondérant en ∞ est celui dont le degré est le plus grand.

- **ATTENTION :** Ce qui se passe en 0 est l'inverse de ce qui se passe en ∞. Par exemple le terme prépondérant d'un polynôme en 0 est celui de plus petit degré. **La technique présentée n'est donc pas exactement la même en** 0.

- **Exemple :**

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ en $+\infty$. On a une forme indéterminée "$\infty - \infty$", mais le terme prépondérant est x^2.

Pous s'en rendre compte, on factorise ce terme prépondérant : $f(x) = x^2(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2})$ ce qui fait disparaître la forme indéterminée puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 1$ et "$+\infty \times 1$" n'est plus une forme indéterminée.

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple :

$f(x) = \dfrac{5x^5 - 23x^4 + x}{32x^5 - 4x^3 - 4}$

Le terme prépondérant du numérateur est $5x^5$, celui du dénominateur $32x^5$. On factorise donc x^5 au numérateur et au dénominateur :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5(5 - \frac{23}{5x} + \frac{1}{x^4})}{x^5(32 - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^5})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5 - \frac{23}{5x} + \frac{1}{x^4}}{32 - \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^5}}$. Cette dernière forme n'est plus une forme indéterminée, et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{5}{32}$.

- **Multiplication par la quantité conjuguée :**

Exemple :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$

C'est une forme indéterminée "$\infty - \infty$".

On multiplie par la quantité conjuguée : $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$ en haut et en bas pour ne rien changer et faire apparaître l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. C'est la méthode que l'on utilise systématiquement pour les formes indéterminées avec différences de racines.

$$f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}} = \frac{(\sqrt{x-1})^2 - (\sqrt{x+2})^2}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}}$$
$$= \frac{x - 1 - (x+2)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}} = \frac{-3}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = +\infty$ (ce n'est plus une forme indéterminée).

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = 0^-$

- On sera parfois amenés à enchaîner les techniques.

Exemple :

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+2}=\frac{(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+2})}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+2}}=\frac{(\sqrt{x^2-1})^2-(\sqrt{x+2})^2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+2}}$$
$$=\frac{x^2-1-(x+2)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}}=\frac{x^2-x-3}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+2}}$$

Cette fois, on a de nouveau une forme indéterminée "$\frac{+\infty}{+\infty}$". On factorise le terme prépondérant dans chaque terme. $f(x)=\dfrac{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}+\sqrt{x^2(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}}$

ATTENTION : $\sqrt{x^2}=|x|$

Comme on cherche une limite en $+\infty$, on peut remplacer $|x|$ par x, mais si c'était en $-\infty$, il faudrait le remplacer par $-x$.

$$f(x)=\frac{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})}{x\left[\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right]}=\frac{x(1-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2})}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (ce n'est plus une forme indéterminée).

- **Fractions rationnelles : limites ailleurs qu'en ∞ :**

On s'intéresse à la forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$".

Pour calculer une limite en a, on a intérêt de faire un changement de variable $x=a+t$ pour se ramener en 0. Normalement, une simplification par une puissance de t fait disparaître l'indétermination.

Exemple :

$a=1$; $f(x)=\dfrac{2x^3+3x^2-8x+3}{2x^3-4x^2-2x+4}$

On cherche : $\lim\limits_{x\to1}f(x)$. C'est une forme indéterminée : "$\frac{0}{0}$".

On effectue le changement de variable : $x=1+t$.

$$f(x)=\frac{2(t+1)^3+3(t+1)^2-8(t+1)+3}{2(t+1)^3-4(t+1)^2-2(t+1)+4}=\frac{2(t^3+3t^2+3t+1)+3(t^2+2t+1)-8(t+1)+3}{2(t^3+3t^2+3t+1)-4(t^2+2t+1)-2(t+1)+4}$$
$$=\frac{2t^3+6t^2+6t+2+3t^2+6t+3-8t-8+3}{2t^3+6t^2+6t+2-4t^2-8t-4-2t-2+4}=\frac{2t^3+9t^2+4t}{2t^3+2t^2-4t}$$

On factorise ensuite une puissance de t puissance sans faire apparaître de fractions, et l'indétermination disparaît en simplifiant :

$f(x)=\dfrac{t(2t^2+9t+4)}{t(2t^2+2t-4)}$ d'où $f(x)=\dfrac{2t^2+9t+4}{2t^2+2t-4}$.

Et finalement :

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{t\to0}\frac{2t^2+9t+4}{2t^2+2t-4}=\frac{4}{-4}=-1$$

- On peut aussi utiliser la factorisation des polynômes que nous avons calculée dans la fiche 1.

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2-8x+3}{2x^3-4x^2-2x+4}=\frac{2(x-1)(x+1)(x-2)}{2(x-\frac{1}{2})(x-1)(x+3)}=\frac{2(x+1)(x-2)}{2(x-\frac{1}{2})(x+3)}$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2(x+1)(x-2)}{2(x-\frac{1}{2})(x+3)}=\frac{-4}{4}=-1$$

Il faut bien maîtriser la technique de la factorisation et cela me semble plus long.

La technique du changement de variables est plus agréable, elle peut être aussi utilisée pour les limites en $+\infty$ et $-\infty$ avec le changement de variable : $t=\dfrac{1}{x}$.