MATH121b

Série 2 : Etude pratique des fonctions et fonctions spéciales.

Exercice 1

1. Montrer que les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto -x^2+3$ et $g : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ ont une tangente commune au point de coordonnées $(1, 2)$ et donner l'équation de cette tangente.
2. Étudier la position de chaque courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 2 Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = |-2x+4| + |x+3| + \sqrt{x^2-2x+1} \end{array}$.

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Exprimer $f(x)$ sans valeurs absolues et sans racine suivant les valeurs de x.
3. Tracer le graphe de f.
4. f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 Exprimer en fonction de $\ln 2$ les réels suivants : $A = \ln 8$, $B = \ln \dfrac{1}{16}$, $C = \dfrac{1}{4} \ln 64$.

Exercice 4 Résoudre les équations suivantes :

1) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$, 2) $e^{x(x-1)} = 1$. 3) $e^{-2x} - 2e^{-x} - 3 = 0$, 4) $2^x - 2^{-x} - \dfrac{3}{2} = 0$

Exercice 5

1. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $A(x) = \ln(2x^2e^{-x})$ peut s'écrire sous la forme $a + bx + c\ln(x)$
2. Montrer que, pour tout réel x : $\ln(1 + e^x) = x + \ln(1 + e^{-x})$
3. Résoudre l'équation suivante : $8^{6x} - 3 * 8^{3x} - 4 = 0$

Exercice 6

1. Que signifie f est périodique de période T ?
2. Montrer que la fonction tangente est périodique de période π
3. Quelle est la période de la fonction $f : x \longmapsto \tan(2x + 1)$? Justifiez
4. Quelle est la période de la fonction $f : t \longmapsto \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{4})$? Justifiez

Exercice 7

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} x - \ln x$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \ln x$ 3) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)^2 - \ln x + x$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^2 - \ln x + x$ 5) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x - 1 - e^x$ 6) $\lim\limits_{x\to -\infty} 2x - 1 - e^x$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ 8) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ 9) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-3}e^x$ 10) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{-4}(\ln x + e^x)$

11) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{x^3}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0} \ln x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 13) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin(\dfrac{1}{x})$ 14) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \cos^4(\dfrac{1}{x^2})$.

Exercice 8

1. Calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

   a) $f(x) = \ln(\dfrac{x-1}{x+1})$, b) $f(x) = \dfrac{2^x}{e^x}$, c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{(4x+2)^3}$, d) $f(x) = \dfrac{(\cos(2x))^3}{\sqrt[3]{3x+1}}$,

2. Montrer que si $f(x) = \ln(\tan(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}))$, alors $f'(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

Exercice 9

Sans calculatrice et sans calcul, donnez l'allure de la courbe de la fonction définie par $f(x) = e^{-x}\cos(\omega x)$ sur $[0, +\infty[$ (Indication : encadrer f par deux fonctions plus simples.)

Exercice 10

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $\cos x = \cos a$ b) $\sin x = \sin a$ c) $\cos x = \sin a$ d) $\cos x + \sin x = 0$
2. Retrouver ce dernier résultat en montrant que $\cos x + \sin x = A\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = B\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ où vous préciserez A et B qui sont des réels fixes.
3. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$. Déterminer son ensemble de définition, puis montrer que f est périodique de période π.
   En déduire un intervalle d'étude convenable pour f .
   Étudier ses variations et donner l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 11

Étudier les branches infinies de la courbe définie par :
$g(x) = 3x - 5 + \dfrac{x^2+3}{e^{2x}-1}$.