Université de Savoie **Licence 1ère année**
2012-2013

MATH121b
Etude pratique des fonctions

Exercice 1
Effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A(X) = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1$, $B(X) = X^3 + X^2 + 2$.
2. $A(X) = X^7 + 2X^6 + 3X^5 + 2X^2 + 7X + 4$, $B(X) = X^5 + 2$.

Exercice 2
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants, et déterminer le signe de $P(x)$ en fonction de x :
1) $P(x) = 4x^2 + 5x + 1$. 2) $P(x) = x^4 + x^2 - 6$. 3) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x$.
4) $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 2x - 2$.

Exercice 3 Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{(2x-3)(x^2+4x-21)}{x-2} \geq 0$.

Exercice 4
Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^3 - x^2 + x}}$.
2. $g(x) = \sqrt{\dfrac{-5x^2 - x + 4}{x^2 - 9}}$
3. $h(x) = \sqrt{|-5x^2 - 7x| - 6}$

Exercice 5
Encadrer $x+y$, $x-y$, xy, $\dfrac{x}{y}$, sachant que $x \in [-1; 2]$ et $y \in [-2; 1]$ (privé de 0 pour le quotient).

Exercice 6
Pour x donné, $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire : $E(x) = n$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $n \leq x < n+1$.
Représentez graphiquement les fonctions suivantes définie sur l'intervalle $[-2, 3]$:

1. $f(x) = E(x)$.
2. $g(x) = x - E(x)$.

Exercice 7
Étudiez la limite de la fonction f aux points proposés :
1) $f(x) = (1-3x)(2x-1)^2$ en $+\infty$ et en $-\infty$. 2) $f(x) = \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2}{x-1}$ en $+\infty$, $-\infty$ et 1.
3) $f(x) = \dfrac{3x-1}{(x+2)(3-5x)}$ en -2. 4) $f(x) = x^2 - 5x^4 + 3x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
5) $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{2x-1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. 6) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$ en 1 et en $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 8
Étudiez la limite de la fonction f aux points proposés :
1) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+3}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ en 4.
3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1} - x}$ en $+\infty$. 4) $f(x) = \sqrt{4x^2+3x+1} - 2x$ en $+\infty$.

Exercice 9 Calculer les dérivées des fonctions suivantes en présisant les domaines de définition de f et f' :

1) $f(x) = (2x-1)^3$, 2) $f(x) = (2x-1)^2(5x-3)^3$, 3) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)^4$, 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

Exercice 10
1) Pour $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$, préciser $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$ ainsi que leurs domaine de définition.
2) Pour $h(x) = \cos(x^2+3)$ écrire h sous la forme $f \circ g(x)$ en précisant f et$g$.
3) On suppose que f et g sont impaires, que peut-on dire concernant la parité de $f \circ g$?

Exercice 11
Soit f une fonction dont la courbe est notée C_f.
a) Soit $g(x) = f(x-3)$.
Quelle transformation géométrique permet d'obtenir la courbe C_g à partir de C_f ?
b) Soit $h(x) = f(x+2) - 3$.
Quelle transformation géométrique permet d'obtenir la courbe C_h à partir de C_f ?
c) Soit $k(x) = -2 + f(-x)$.
Quelles transformations géométriques permettent d'obtenir la courbe C_k à partir de C_f ?
d) Soit $a(x) = -f(-x)$.
Quelle(s) transformation(s) géométrique(s) permet(tent) d'obtenir la courbe C_a à partir de C_f ?

Exercice 12 Étudier et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^4 - 6x$, 2) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-1}$.

Exercice 13 Donner le tableau de variation ainsi que les branches infinies de la fonction suivante (étudier la position de la courbe par rapport à son asymptote quand il s'agit d'une asymptote oblique) : $f(x) = \dfrac{x^3+10x}{x^2+1}$.

Exercice 14
Étudier les branches infinies des courbes définies par (même remarque que ci-dessus) :
$f(x) = 2x + 1 - \sqrt{x}$; $g(x) = x - 2 + \dfrac{x+1}{x-1}$; $h(x) = 3x + 2 - \sqrt{4x^2 - x}$ uniquement en $+\infty$.