(1).

Math 121b CC2 correct°.

Exo 1 1. g est bien définie dès que le dénominateur est non nul. Or celui-ci s'annule si et seulement si

$$e^{t} - e^{-t} = 0 \iff e^{t} = e^{-t} \iff e^{2t} = 1$$

$$\iff 2t = 0 \iff t = 0.$$

On a donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.
$$g(\ln(2)) = \frac{e^{\ln 2} - 4e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}} = \frac{2 - 4 \cdot \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = 0.$$

3. • $$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{t} - 4e^{-t}}{e^{t} - e^{-t}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1 - 4\overbrace{e^{-2t}}^{0}}{1 - \underbrace{e^{-2t}}_{0}} = 1$$

• $$\lim_{t \to -\infty} g(t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{t} - 4e^{-t}}{e^{t} - 4e^{-t}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{2t} - 4}{e^{2} - 1}$$

$$= \frac{-4}{-1} = 4$$

4. g est dérivable sur son domaine de définit°, et on a :

$$g'(t) = \frac{(e^{t} + 4e^{-t})(e^{t} - e^{-t}) - (e^{t} - 4e^{-t})(e^{t} + e^{-t})}{(e^{t} - e^{-t})^2}$$

$$= \frac{e^{2t} + 4 - 1 - 4e^{-2t} - e^{2t} + 4 - 1 + 4e^{-2t}}{(e^{t} - e^{-t})^2}$$

$$= \frac{6}{(e^{t} - e^{-t})^2}.$$

$g'(t)$ est donc strictement positive pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D'où le tableau :

(2).

t		0	
$g'(t)$	$+$	||	$+$
$g(t)$	4 $\nearrow$	||	$\nearrow$ 1

5. Pour tracer le graphe, il nous manque le comportement en 0, et les intersect° avec les axes.
On voit sur le tableau de variat° que g ne peut s'annuler qu'une fois, entre 0 et $+\infty$. On a vu que $g(\ln 2) = 0$. On a donc trouvé la seule intersect° du graphe de g avec l'axe des x. Comme g n'est pas définie en 0, il n'y a pas d'intersect° du graphe avec l'axe de y.

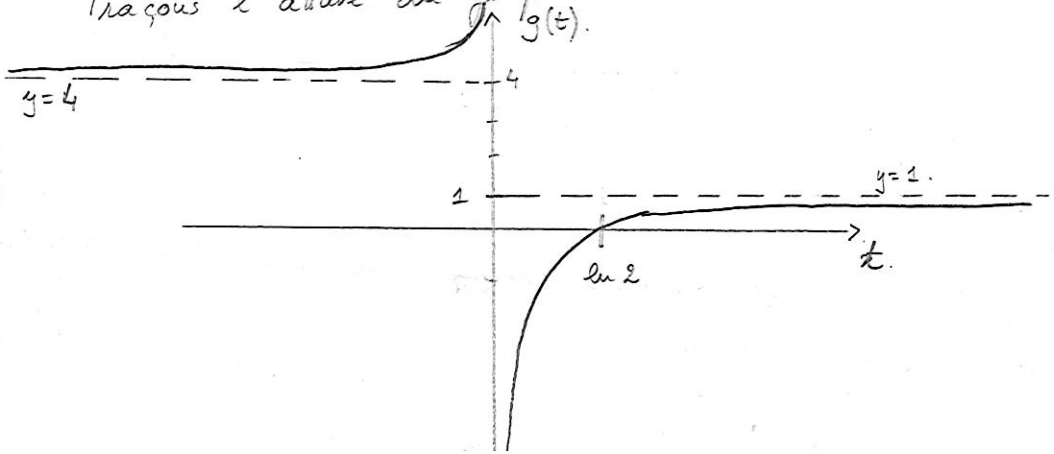
Comportement en 0 : on distingue 0^+ et 0^- :

$$\lim_{t \to 0^+} g(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{t} - 4e^{-t}}{e^{t} - e^{-t}} \begin{matrix} \} \to -3 \\ \} \to 0^+ \end{matrix} = -\infty$$

et

$$\lim_{t \to 0^-} g(t) = \lim_{t \to 0^-} \frac{e^{t} - 4e^{-t}}{e^{t} - e^{-t}} \begin{matrix} \} \to -3 \\ \} \to 0^- \end{matrix} = +\infty.$$

Traçons l'allure du graphe :



Exo 2.

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin\frac{t}{2}\, dt$

intégrons par partie avec $u = t$, $v' = \sin\frac{t}{2}$

on a $u' = 1$ $v = -2\cos\frac{t}{2}$

D'où

$$I = \left[-2t\cos\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\cos\frac{t}{2}\, dt$$

$$= -2\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} - (-2.0.\cos 0) + 2\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right).$$

(nota bene: l'intégrale J de la feuille 3 était essentiellement la même).

2. $\int \frac{t}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\, dt$; on a fait apparaître une forme $\frac{u'}{u}$ dont les primitives sont les $\ln|u|$ + cste

$= \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \text{cste}$ (les valeurs absolues ne sont pas nécessaires puisque $t^2+1 > 0$ $\forall t$.

(rem: l'intégrale I de la feuille 3 était sur le même principe).

3. $y' - \frac{t}{t^2+1} y = 0$

→ Au brouillon:

$\frac{y'}{y} = \frac{t}{t^2+1} \Rightarrow \ln y = \int \frac{t}{t^2+1}\, dt + \text{cste}$

$\Rightarrow y = K e^{\int \frac{t}{t^2+1} dt}$

Les solut° sont de la forme

$y(t) = K e^{\int \frac{t}{t^2+1} dt}$, $K \in \mathbb{R}$

On a calculé ces primitives à la question précédente, donc

$y(t) = K e^{\frac{1}{2}\ln(t^2+1)} = K e^{\ln\sqrt{t^2+1}} = K\sqrt{t^2+1}$, $K \in \mathbb{R}$.

4. Pour avoir $y(0) = 2$ il faut que

$K\sqrt{0^2+1} = 2$, c'est à dire $K = 2$.

La solut° de (E) qui vérifie $y(0) = 2$ est donc.

$$\boxed{y(t) = 2\sqrt{t^2+1}}$$

Exo 3.

1. (H) : $y'' - y' - 2y = 0$.

L'équat°, caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, dont le Δ est $\Delta = 1+8 = 9 > 0$, et dont les racines sont $r_1 = 2$, $r_2 = 1$. Les solut° de (H) sont donc les

$$\boxed{y(t) = A e^{2t} + B e^{-t} \text{ avec } A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}.}$$

2. On cherche une solut° particulière sous la forme $y(t) = (at+b)e^t$. On a:

$y'(t) = (at+a+b)e^t$ et $y''(t) = (at+2a+b)e^t$

$y(t)$ vérifie ainsi (E) si

$(at+2a+b)e^t - (at+a+b)e^t - 2(at+b)e^t = (2t+1)e^t$

c'est à dire

$(-2at + a - 2b)e^t = (2t+1)e^t$.

En identifiant, il vient

$\begin{cases} -2a = 2 \\ a - 2b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1. \end{cases}$

Une solut° particulière de (E) est donc

$$\boxed{y(t) = (-t-1)e^t}$$

3. Les solut° de (E) sont donc, d'après 1. et 2., les fonctions de la forme

$$y(t) = Ae^{2t} + Be^{-t} + (-t-1)e^t, \text{ avec } A \in \mathbb{R},\ B \in \mathbb{R}$$