Exo 1.

1.

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x - 5 & x^2 - 5 \\ \hline -(x^4 \qquad - 5x^2) & x^2 + 2x + 1 \\ \quad 2x^3 + x^2 - 10x - 5 & \\ \quad -(2x^3 \qquad - 10x) & \\ \qquad x^2 \qquad - 5 & \\ \qquad -(x^2 \qquad - 5) & \\ \qquad\qquad 0. & \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x - 5 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 5)}$

2. $P(x) = 0 \iff (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 5) = 0$

$\iff (x+1)^2 (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0.$

$\iff \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases}$

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } -1,\ \sqrt{5} \text{ et } -\sqrt{5}.}$

On a mis P sous forme factorisée :

$\boxed{P(x) = (x+1)^2 (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})}.$

3. $x \in \mathcal{D}f \iff x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x - 5 \geq 0.$

ie $P(x) \geq 0$

Etablissons le tableau des signes de $P(x)$.

x		$-\sqrt{5}$		-1		$\sqrt{5}$	
P	+	0	−	0	−	0	+

Ainsi, $\boxed{\mathcal{D}f =]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[\cup \{-1\}.}$

Exo 2

1. Si $3-2x \geq 0$, c'est à dire $x \leq \frac{3}{2}$,

on a $|3-2x| = 3-2x$.

Si $3-2x \leq 0$, c'est à dire $x \geq \frac{3}{2}$,

on a $|3-2x| = -3+2x$.

Sous forme de tableau, on a donc :

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $3/2$	$+\infty$
$\|3-2x\|$	$3-2x$	$-3+2x$

2. Comme $\frac{3}{2} \leq 2$ et $x \geq 2$, on a

$|3-2x| = -3+2x$.

Encadrons $-3+2x$, sachant que $2 \leq x \leq 3$.

On a $4 \leq 2x \leq 6$ et $1 \leq -3+2x \leq 3$.

Encadrons maintenant $y \cdot |3-2x|$.

- Si $y \in [-1, 0]$.

Alors $0 \leq -y \leq 1$

donc $0 \leq (-y)(-3+2x) \leq 3$.

donc $-3 \leq y(-3+2x) \leq 0$ (1)

- Si $y \in [0, 5]$,

Alors $0 \leq (y)(-3+2x) \leq 15$. (2)

Finalement, $x \in [2,3]$ et $y \in [-1,5]$ donne,

par (1) et (2) : $\boxed{-3 \leq y \cdot |3-2x| \leq 15}$

Exo 3.

1. h est bien définie si le dénominateur de la fraction rationnelle est non nul, c'est à dire $x-1 \neq 0$, ou encore, $x \neq 1$.

$\boxed{D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

2. h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, car c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. On a

$$h'(x) = \frac{(-4x+9)(x-1) - (-2x^2+9x-9)(1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2(-4+2) + x(9+4-9) + (-9+9)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+4x}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{2x(-x+2)}{(x-1)^2}}$$

3. On utilise la forme factorisée de h' pour établir le tableau des signes de h', d'où l'on déduit les variations de h:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	

4. • $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2+9x-9}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2\left(-2+\frac{9}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$.

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \cdot \frac{-2+\frac{9}{x}-\frac{9}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} \Big\} -2.$$

($\frac{9}{x} \to 0$, $\frac{9}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$)

$= -\infty$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x^2+9x-9}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2\left(-2+\frac{9}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$.

$$= \lim_{x \to -\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} \; \frac{-2+\frac{9}{x}-\frac{9}{x^2} \;\} \to -2.}{1-\frac{1}{x} \;\} \to 1}$$

$= +\infty$

• On distingue les limites à droite et à gauche:

$$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{-2x^2+9x-9 \;\} \longrightarrow -2}{x-1 \;\} \longrightarrow 0^-}$$

$= +\infty$.

$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{-2x^2+9x-9 \;\} \longrightarrow -2}{x-1 \;\} \longrightarrow 0^+}$$

$= -\infty$.

5. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2+9x-9}{(x-1)\,x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2\left(-2+\frac{9}{x}-\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2 + \frac{9}{x} - \frac{9}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = -2.$$

Calculons maintenant $\lim_{x \to +\infty} h(x) - (-2x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 + 9x - 9}{x - 1} + 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 + 9x - 9 + 2x^2 - 2x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{7x - 9}{x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(7 - \frac{9}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{7 - \frac{9}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 7.$$

On a donc $\lim_{x \to +\infty} h(x) - (-2x + 7) = 0$.

Autrement dit, le graphe de h est asymptotique en $+\infty$, à la droite d'équation $y = -2x + 7$.

Pour connaître la position du graphe de h par rapport à son asymptote, étudions le signe de la différence $h(x) - (-2x+7)$ pour x grand.

$$h(x) - (-2x+7) = \frac{-2x^2 + 9x - 9}{x - 1} + \frac{(2x - 7)(x - 1)}{x - 1}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x^2 + 9x - 9x - 9 + 7}{x - 1} = \frac{-2}{x - 1}.$$

Pour $x > 1$, cette valeur est négative. Le graphe de h est donc au-dessous de son asymptote

6. Pour tracer le graphe de h, il nous manque les points d'intersection avec les axes. On a $h(0) = 9$, et $h(x) = 0 \iff -2x^2 + 9x - 9 = 0 \iff \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$

$(\Delta = 81 - 72 = 9)$

Les points critiques sont 0 et 2 (points où $h'(x)=0$), et $h(2) = \dfrac{-8+18-9}{1} = 1$.

Notons l'asymptote verticale en $x = 1$, trouvée à la question 4.