Université de Savoie — Année 2012/13

MATH426 : Mathématiques pour les sciences IV

Travaux dirigés, feuille 4

Exercice 1 Déterminer et représenter les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f_1(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;
2. $f_2(x, y) = \ln(x^2 + y)$;
3. $f_3(x, y, z) = \ln(xyz)$.

Exercice 2 Déterminer les lignes de niveau des fonctions suivantes :

1. $f_1(x, y) = x + y$; $f_2(x, y) = \sqrt{xy}$;
2. $f_3(x, y) = (1 + x + y)^2$;
3. $f_4(x, y) = x^2 - y^2$; $f_5(x, y, z) = x + y + z$;
4. $f_6(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $f_7(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Exercice 3 Justifier que les fonctions suivantes sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Peut-on les étendre par continuité en 0 ?

1. $f_1(x, y) = \frac{2x^3+3y^2}{x^2+y^2}$;
2. $f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^4}$;
3. $f_3(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$.

Exercice 4 Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes en précisant les domaines de validité :

1. $f_1(x, y) = x^4 + 3x^2y^2 + 2y^4$; $f_2(x, y) = x^y$;
2. $f_3(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; $f_4(x, y, z) = (xy)^z$.

Exercice 5 Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, 2, 0)$, pour $f(x, y, z) = \ln(xy+z)$. En déduire $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1, 2, 0)$ avec $u = (1, 1, 1)$.

Exercice 6 Déterminer f telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x}$ et $f(1, y) = \sin y$.

Exercice 7

1. Calculer l'équation du plan tangent au graphe de $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ en un point (x_0, y_0, z_0) quelconque puis en un point choisi.
2. Calculer l'équation du plan tangent au niveau 0 de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^4$ en un point (x_0, y_0, z_0) quelconque du niveau puis en un point choisi.

(*On commencera par faire un dessin.*)

Exercice 8 Soit F une fonction de 2 variables réelles, C^1, et (a, b) un point de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$, et on note $c = F(a, b)$. Un théorème (appelé théorème des fonctions implicites) affirme qu'alors, il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$, définie et C^1 sur un intervalle ouvert I contenant a telle que

$$F(x, y) = c \Leftrightarrow y = \varphi(x),\ \ x \in V$$

pour (x, y) suffisamment voisin de (a, b). On pose $F_1(x, y) = x^2 + y^2$, $F_2(x, y) = y^2 - x^4$.

1. Peut-on appliquer le théorème des fonctions implicites à F_1 en $(a, b) = (0, 1)$? Quelle est la fonction φ dans ce cas ?
2. Qu'est-ce qui s'oppose à appliquer le théorème des fonctions implicites à F_1 en $(a, b) = (1, 0)$?
3. Même questions pour F_2 en $(1, 1)$ et en $(0, 0)$. Dans le cas de $(1, 1)$, expliciter le "suffisamment voisin de (a, b)" de l'énoncé. Pourquoi cette condition est-elle nécessaire ?
4. Montrer que si F vérifie les hypothèses du théorème en (a, b), alors φ' s'exprime en fonction des dérivées partielles de F. Vérifier cette relation sur F_1 en $(0, 1)$.

Exercice 9 Étudier les extrema des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$;
2. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;
3. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

Exercice 10 Déterminer les extrema des fonctions dans les cas suivants :

1. $f(x, y) = x + 2y + 1$ sur $\{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$;
2. $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$ sur $\{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$;
3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $\{0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2\}$.

Exercice 11 Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 - y^2$.

1. Montrer que f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Étudier la nature de ces points critiques.

Exercice 12 Soit $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.

1. Montrer que f admet un point critique unique.
2. Le développement de f à l'ordre 2 permet-il de donner la nature de celui-ci ?
3. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine admet un minumum en 0.
4. Représenter $Z = \{(x, y);\ f(x, y) = 0\}$, et déterminer le signe de f sur chacune des régions délimitée par Z.
5. f admet-elle un minimum en 0 ?

Exercice 13 Soit $f(x, y) = 2x^3 - y^2 + 2xy + 1$.

1. Déterminer les extrema relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. L'application f possède-t-elle un maximum absolu ? un minimum absolu ?
3. Représenter le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0, x + y + 1 \geq 0\}$. Montrer que la restriction de f à D admet 2 extrema absolus que l'on calculera.

Exercice 14 On cherche le maximum de la fonction $f(x, y, z) = x + y + z$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

1. Écrire le Lagrangien associé au problème.
2. Déterminer le point où le maximum est atteint et la valeur de ce maximum.
3. Vous vous déplacez sur la sphère de rayon 1 et vous demandez où la somme des distances aux trois plans de coordonnées est maximale. Qu'en dire ?

Exercice 15 Calculer le minimum et le maximum de :

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ sur la droite $D = \{x + 2y = 1\}$;
2. $g(x,y) = 2x + y$ sur le cercle $D = \{(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4\}$;
3. $h(x,y) = 2x + y$ sur le disque $D = \{(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4\}$;
4. $i(x,y) = xy$ sur l'ellipse (pleine) $D = \{x^2 + 4y^2 \leq 1\}$;
5. $j(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ sur le plan $D = \{x + 2y + z = 1\}$;
6. $k(x,y) = 2x + y + z$ sur la sphère $D = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
7. $l(x,y) = xyz$ sur la sphère $D = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Exercice 16

1. Calculer l'aire maximale d'un rectangle de périmètre donné.
2. Calculer le volume maximal du parallélépidède rectangle inscrit dans une sphère donnée.