Université de Savoie — Année 2012/13

L2 MASS – PEIP

MATH426 : Mathématiques pour les sciences IV

Travaux dirigés, feuille 3

Exercice 1 Soit q la forme quadratique de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$q(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz$$

1. Donner la forme polaire φ de q et montrer que φ est un produit scalaire.
2. Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ sont-ils φ-orthogonaux ? Les vecteurs $(1,0,0)$ et $(2,3,0)$ sont-ils φ-orthogonaux ? Quel est l'espace φ-orthogonal au vecteur $(1,0,0)$?
3. Donner un vecteur non nul qui soit φ-orthogonal au plan $z=0$.
4. Orthonormaliser la famille (b_1, b_2, b_3) pour φ, avec

$$b_1 = (2,2,2), b_2 = (0,-1,0), \text{ et } b_3 = (3,2,2).$$

Exercice 2 On considère la forme bilinéaire symétrique f de $\mathbb{R}^3$ définie, en posant pour chaque vecteur u et u' de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives (x,y,z) et (x',y',z') dans la base canonique, par :

$$f(u,u') = xx' + 2yy' - 2yz' - 2y'z + 3zz'.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y=0\}$. Construire une base orthonormée de F pour le produit scalaire f.
3. En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ pour f.

Exercice 3 Orthogonaliser la famille $((1,0,0),(1,-1,0),(1,0,1))$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$. Donner des caractérisations des conditions q non dégénéré et q définie positive en fonction de la matrice de q dans une base.

Exercice 5 On note $\mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriels des polynômes réels de degré au plus 2. On définit sur $(\mathbb{R}_2[x])^2$ l'application φ donnée par :

$$\varphi(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire.
2. Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base orthogonale pour φ, avec $P_1(x) = x^2 - x$, $P_2(x) = x^2 - 1$, $P_3(x) = x^2 + x$.
3. Orthonormaliser la famille $(1, x, x^2)$ pour ce produit scalaire.

Exercice 6 Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, et considérons l'application $u : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$u(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

1. Rappeler brièvement pourquoi $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

2. Montrer que u est une forme bilinéaire, puis un produit scalaire. Quelle est la forme quadratique q associée ?
3. Orthonormaliser la famille $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$.
4. Pour f dans $\mathcal{C}$, on note $||f||_2$ la racine de $q(f)$: $||f||_2 = \sqrt{q(f)}$. Parmi les fonctions affines $g \in \mathcal{C}$, quelle est celle qui minimise $|| \exp - g||_2$? À quel objet géométrique correspond g ?
5. Quel calcul donnerait le polynôme de degré 2 qui minimise $|| \exp - P||_2$?

— annales —

Exercice 7 Soit f la forme bilinéaire suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & \mapsto & 3yy' + 4xy' + 2x'y \end{array}$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique. La forme bilinéaire f est-elle symétrique ?
2. Quelle est la forme quadratique q associée à f ?
3. Donner la forme polaire φ de q, et sa matrice dans la base canonique.
4. On note $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^2$ donnée par $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$. Quelle est la matrice de φ dans cette base ?
5. Donner la signature et le rang de q.

Exercice 8 Décomposer les formes quadratiques suivantes en sommes (et différences) de carrés de formes linéaires indépendantes, et en déduire leur signature :

1. $q_1(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$
2. $q_2(x, y, z) = xy + xz + 2yz$
3. $q_3(x, y) = (x + y)^2 - (x - y)^2 + y^2$

On note φ_1 la forme polaire de q_1.

4. Donner le noyau de φ_1.
5. Donner le cône isotrope I de φ_1, et deux vecteurs de I non colinéaires.

Exercice 9 On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$, et ψ l'application définie sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ par :

$$\psi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que ψ est un produit scalaire. (On pourra utiliser librement le fait que l'intégrale d'une fonction g, continue et positive, n'est nulle que si g est identiquement nulle)
2. Orthonormaliser la famille $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ pour le produit scalaire ψ.
3. Montrer que $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \sin(2\pi x)$ sont ψ-orthogonales.
4. Soit $E = \mathrm{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$. On note h la projection ψ-orthogonale de $x \mapsto \sin(2\pi x)$ sur E. Montrer que $h(\frac{1}{2}) = 0$.

Exercice 10 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $u = (x, y, z)$ et tout $u' = (x', y', z')$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(u, u') = 2xx' + 3yy' + 2xy' + 2x'y.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice associée à f dans la base canonique $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner l'expression de la forme quadratique q associée à f par rapport à la base $\mathcal{C}_3$.
4. Soient les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (0, 0, 1)$.
   (a) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{B}$. Écrire la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Donner l'expression de la forme quadratique q associée à f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
5. Décomposer la forme q en somme (et différence) de carrés de formes linéaires indépendantes. En déduire le rang et la signature de q. La forme bilinéaire f est-elle un produit scalaire ?
6. Calculer le noyau de f et le cône isotrope de q. En déduire l'orthogonal au vecteur $(0, 0, 1)$; puis une base orthogonale pour f.
7. Déterminer les extrema de q sur $\mathbb{R}^3$.
8. (**Hors barème**) Déterminer les extrema de q sur la sphère unité $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Exercice 11 Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $u = (x, y, z)$ et tout $u' = (x', y', z')$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(u, u') = -xx' - 4xz' - 4x'z + 3yy' - 6yz' - 6zy' + zz'.$$

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice associée à f dans la base canonique $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner l'expression de la forme quadratique q associée à f par rapport à la base $\mathcal{C}_3$.
4. Soient les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$ et $v_3 = (0, 1, -1)$.
   (a) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{B}$.
   (b) Écrire la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.
   (c) Donner l'expression de la forme quadratique q associée à f par rapport à la base $\mathcal{B}$.
5. Décomposer la forme q en somme (et différence) de carrés de formes linéaires indépendantes. En déduire le rang et la signature de q. La forme bilinéaire f est-elle un produit scalaire ?
6. Calculer le noyau de f et le cône isotrope de q. En déduire l'orthogonal au vecteur $(0, 0, 1)$; puis une base orthogonale pour f.

Exercice 12 Soit $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j$.

1. Calculer le rang de q.
2. Décomposer q en somme (et différence) de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. En déduire la signature de q.

(*On pourra commencer par examiner les cas $n = 2$ puis $n = 3$.*)

Exercice 13 Décomposer sous forme de carrés les formes quadratiques suivantes ; en déduire leur signature et leur rang.

1. $\phi(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$ où $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.
2. $\phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + xz + yz$ où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.