Université de Savoie — Année 2012/13

L2 MASS – PEIP

MATH426 : Mathématiques pour les sciences IV

Travaux dirigés, feuille 2

Exercice 1

1. Soit g une application bilinéaire de $E \times E$ dans F. Calculer $g(x+x', y+y')$ et $g(\lambda(x,y))$ avec $x, x', y, y' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Effectuer le même calcul en supposant que g est une application linéaire de l'espace vectoriel $E \times E$ dans F.
3. (a) Déterminer la forme polaire associée à la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

   (b) Quelle est la question réciproque ?

Exercice 2 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Expliciter l'application bilinéaire f de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est représentée par M dans la base (u_1, u_2) où $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (1,-1)$. Quelle est la valeur de $f((3,4),(1,2))$?

Exercice 3 On considère la forme quadratique de $\mathbb{R}^4$: $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - t^2$.

1. Déterminer sa forme polaire et sa matrice dans la base canonique.
2. Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y = 0\}$. Donner une base de F et la matrice de la restriction de q à F dans cette base.
3. Même question avec $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = 0, \ z = t\}$.

Exercice 4 On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$, $q(u) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$.

1. Calculer la forme polaire de q puis la matrice associée dans la base canonique.
2. Donner la signature et le rang de q.

Exercice 5 On considère $q(u) = x^2 + y^2 + z^2 - 2axy - 2byz$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$. Étudier le rang et la signature de q en fonction de a, b.