Université de Savoie — Année 2012/13

L2 MASS – L2 STS – PEIP

MATH436 : Mathématiques pour les sciences IV
Travaux dirigés, feuille 1

Exercice 1 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$a = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

1. Pour chacune des familles suivantes, dire si elles sont libres, génératrices et si elles forment des bases : (a, b), (a, b, c), (a, b, d), (a, b, c, d).
2. On note F l'espace vectoriel engendré par a, b et c. Donner sa dimension et une base de celui-ci. Donner une présentation de F sous forme de paramétrisation, et une autre sous forme d'équation.
3. On note G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, x + z = 0\right\}.$$

   Donner sa dimension, donner une base de G et une présentation de G par paramétrisation.
4. Montrer que F et G sont en somme directe.

Exercice 2
Soient E et F les ensembles donnés par $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y = 0\}$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}$, et soit u l'application donnée par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + 3y,\ x + y + z) \end{array}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que u est linéaire.
3. Donner la matrice de u dans les bases canoniques.
4. Quel est le rang de u ?
5. Quelle est la dimension de $E \cap F$?

Exercice 3 Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par : $(\Delta(P))(X) = P(X + 1) - P(X)$.

1. Déterminer la matrice A de Δ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$. Que valent le noyau et l'image de Δ ?
2. Déterminer la matrice B de Δ dans la base $\mathcal{C} = \{Y_0\,, Y_1\,, Y_2\,, Y_3\}$ où : $Y_0 = 1\,, Y_1(X) = X\,,$ $Y_2(X) = X(X-1)\,, Y_3(X) = X(X-1)(X-2)$. (On montrera que $\Delta(Y_0) = 0$ et que $\Delta(Y_i) = i\,Y_{i-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.)
   Calculer B^4. Que vaut A^4 ? Que vaut Δ^4 ? Les plus courageux pourront aussi déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$, calculer son inverse et vérifier la formule du changement de bases.

Exercice 4 On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On note $u : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ l'application définie par $u(f)(x) = f(x + 2\pi) - f(x)$. Montrer que u est linéaire. Quel est son noyau ?

3. On note $\mathcal{P}$ le sous ensemble de $\mathcal{F}$ formé des fonctions 2π périodiques. Montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.
4. Montrer que $(\cos(t), \sin(t))$ et $(\sin(t), \sin(2t), \sin(3t))$ sont deux familles libres de $\mathcal{P}$ (idée : regarder où s'annulent ces fonctions).
5. On considère la famille $(t \mapsto e^{nt}), n \in \mathbb{Z}$. Montrer que cette famille est libre. (idée : regarder le comportement à l'infini). Est-elle génératrice de F ?

Exercice 5 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. Déterminer les valeurs propres et espaces propres de M.
2. Calculer M^n pour $n \geq 1$, après avoir diagonalisé M.

Exercice 6 On considère le système d'équations différentielles (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} y_1'(t) &= 4y_1 + 6y_2 \\ y_2'(t) &= -3y_1 - 5y_2 \end{cases}$$

1. En notant $Y(t)$ le vecteur $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, écrire (S) sous forme matricielle.
2. Montrer qu'il existe une matrice inversible Q que l'on précisera telle que $Z(t) = QY(t)$ vérifie un système d'équations différentielles diagonal.
3. Donner la solution générale du système (S).

Exercice 7 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable supérieurement alors elle l'est inférieurement.

Exercice 8 À l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, calculer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 Soit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de M. Est-elle diagonalisable ?
2. Trigonaliser M.

— annales —

Exercice 10 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui admet A pour matrice dans la base canonique $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le noyau de f. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer l'image de f. Vérifier le théorème du rang.
4. Calculer le polynôme caractéristique de f.

5. Montrer que f est inversible puis, en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, calculer l'inverse A^{-1} de la matrice de A.
6. Déterminer les valeurs propres de f.
7. Calculer les espaces propres de f.
8. Diagonaliser A.

Exercice 11 On considère

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+4z, 3x-4y+12z, x-2y+5z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer noyau, image et rang de cette application linéaire. L'application f est-elle inversible ?
3. Calculer son polynôme caractéristique. En déduire ses valeurs propres.
4. Ecrire la forme diagonale d'une matrice de f dans une base adaptée.
5. Déterminer une matrice de passage P de $\mathcal{C}_3$ à une base $\mathcal{B}$ telle que f soit diagonale dans cette base.
6. Inverser la matrice P.

Exercice 12 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui admet A pour matrice dans la base canonique $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le noyau de f. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer l'image de f. Vérifier le théorème du rang.
4. Calculer le polynôme caractéristique de f.
5. Déterminer les valeurs propres de f.
6. Calculer les espaces propres de f.
7. Diagonaliser A.

Exercice 13 On considère

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x+y+2z, -2x+y+2z, -x+y+z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer noyau, image et rang de cette application linéaire. L'application f est-elle inversible ?
3. Calculer son polynôme caractéristique. En déduire ses valeurs propres.
4. Ecrire la forme diagonale d'une matrice de f dans une base adaptée.
5. Déterminer une matrice de passage P de $\mathcal{C}_3$ à une base $\mathcal{B}$ telle que f soit diagonale dans cette base.
6. Inverser la matrice P.