math 426 CC2 - corrigé

Exo 1

1.a. $f((1,0),(2,1)) = 1.2 + 1.1 - 0.2 + 0.1$
$= \underline{3}$

$f((0,1),(2,1)) = 0.2 + 0.1 - 1.2 + 1.1$
$= \underline{-1}$

b. On a $f((1,\lambda),(2,1)) = 0$ si et seulement si
$1.2 + 1.1 - \lambda.2 + \lambda.1 = 0$
$\Leftrightarrow 3 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \underline{\lambda = 3}$

2. La matrice de f dans la base canonique est la matrice des $f(e_i, e_j)$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. Ici, on a
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On calcule B comme à la question précédente: Il nous faut
$f((1,1),(1,1)) = 2$
$f((1,1),(1,-1)) = -2$
$f((1,-1),(1,-1)) = 2$
$f((1,-1),(1,1)) = 2$

D'où $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Le lien entre A et B est donné par $B = {}^tPAP$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base $((1,1),(1,-1))$. C'est à dire, ici,
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exo 2.

On va décomposer les formes quadratiques en somme et différences de carrés par l'algorithme de Gauss :

1. $q(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2 = (x+2y)^2 - 4y^2 + 2y^2$
$= (x+2y)^2 - 2y^2.$

La signature de q est $(1,1)$ et son rang est 2.

2. $q(x,y,z) = xy + 2xz + 3yz.$
$= (x+3z)(y+2z) - 6z^2$
$= \dfrac{(x+y+5z)^2}{4} - \dfrac{(x-y+z)^2}{4} - 6z^2.$

La signature de q est $(1,2)$ et son rang est 3.

Exo 3.

1. On obtient la forme polaire par dédoublement des produits mixtes:

$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 3yy' + 6zz'$ (...

...) $- 4yz' - 4y'z - yx' - y'x + x'z + xz'$

2. On décompose q en sommes et différences de carrés en utilisant l'algorithme de Gauss :

$$q(x,y,z) = (x-y+z)^2 + 2y^2 + 5z^2 - 6yz$$
$$= (x-y+z)^2 + 2\left[\left(y-\frac{3}{2}z\right)^2 - \frac{9}{4}z^2\right] + 5z^2$$
$$= (x-y+z)^2 + 2\left(y-\frac{3}{2}z\right)^2 + \frac{1}{2}z^2.$$

La signature de q est $(3,0)$. q est donc définie positive, donc φ est un produit scalaire.

3. On aplique l'algorithme de Gram-Schmidt. Apelons c_1, c_2 et c_3 les trois vecteurs de la base orthonormée que l'on cherche.

- On a $c_1 = \dfrac{b_1}{\sqrt{q(b_1)}} = \dfrac{b_1}{\sqrt{12+24-32}} = \dfrac{b_1}{\sqrt{4}} = \dfrac{b_1}{2}$

  c'est à dire $\underline{c_1 = (0,1,1)}$

- Apelons d_2 le projeté orthogonal de b_2 sur l'orthogonal de c_1. On a $d_2 = b_2 - \varphi(b_2,c_1)\cdot c_1$

  Ici, $\varphi(b_2,c_1) = 0$, donc $d_2 = b_2$. Le vecteur c_2 cherché est $c_2 = \dfrac{d_2}{\sqrt{q(d_2)}} = d_2$ car $q(d_2)=1$.

  Finalement $\underline{c_2 = (1,0,0)}$.

- Apelons d_3 le projeté orthogonal de b_3 sur l'orthogonal de $\langle c_1, c_2\rangle$. On a $d_3 = b_3 - \varphi(b_3,c_1)c_1 - \varphi(b_3,c_2)c_2$

Ici, $\varphi(b_3,c_1) = -1$ et $\varphi(b_3,c_2) = 0$.

Donc $d_3 = b_3 + c_1 = (1,1,0) + (0,1,1)$
$= (1\ 2\ 1)$

Le vecteur c_3 cherché est $c_3 = \dfrac{d_3}{\sqrt{q(d_3)}}$

Ici, $q(d_3) = 1$. Donc $c_3 = d_3 = (1,2,1)$

La base orthonormalisée à partir de $(b_1\ b_2\ b_3)$ par l'algorithme de Gram-Schmidt est (c_1, c_2, c_3) avec
$$\begin{cases} c_1 = (0,1,1) \\ c_2 = (1,0,0) \\ c_3 = (1,2,1. \end{cases}$$