Math 426 CC1 - corrigé.

Exo 1.

1. Montrons que $\mathcal{B}$ est une famille libre : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois scalaires tels que $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$, et montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

On a
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (1) \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0. & (3) \end{cases}$$

De (2) et (3), on déduit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. (1) s'écrit donc $3\lambda_1 = 0$, c'est à dire $\lambda_1 = 0$. Finalement, λ_1, λ_2 et λ_3 sont tout trois nuls. On a montré que $\mathcal{B}$ était libre. Comme $\mathcal{B}$ est une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, $\mathcal{B}$ est une base.

2. Les vecteurs de F sont combinaisons linéaires de b_1 et b_2. Si $(x, y, z) \in F$, il existe α et β deux scalaires tels que $(x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 0, -1)$. On a donc
$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha \\ z = \alpha - \beta. \end{cases}$$
Ce système est équivalent à
$$\begin{cases} x - y = \beta \\ z - y = -\beta \\ y = \alpha. \end{cases}$$
, c'est à dire
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ z - y = -\beta \\ y = \alpha. \end{cases}$$

F est donc donné par l'équation $x - 2y + z = 0$.

3. (a).
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
: les vecteurs colonnes de M sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images de b_1, b_2 et b_3 par u.

b. Les coordonnées de $-2b_1 + b_2 + b_3$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de son image par u sont obtenues en multipliant M par $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Or
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(c). On a calculé les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$ à la question précédente, et le résultat se lit $u(-2b_1 + b_2 + b_3) = -2b_1 - 5b_2 - 4b_3$.
Il ne reste qu'un calcul à faire :
$$u(-2b_1 + b_2 + b_3) = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 - 5 - 4 \\ -2 \quad +4 \\ -2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exo 2.

1. Il faut montrer que $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \forall \lambda$,
$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda f\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$
Faire le calcul ne présente aucune difficulté.

2. Calculons le noyau de f :

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0. \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 5z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$

On a donc $\ker f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = \frac{7}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Le noyau de f est donc de dimension 1.

D'après le thm du rang, $3 = \dim \operatorname{Im} f) + \dim \ker f$

donc $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$.

3. $\chi_f(x) = \det(f - x\,Id) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 4 \\ 3 & -4-x & 12 \\ 1 & -2 & 5-x \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 + \frac{3}{2}C_2}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 2x \\ 3 & -4-x & -\frac{3}{2}x \\ 1 & -2 & -x \end{vmatrix}$

$= x \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 2 \\ 3 & -4-x & -\frac{3}{2} \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = x\left[(2-x)\left[4+x-3\right] + 2(-6+4+x)\right]$

$= x\left[-x^2 + 3x - 2\right] = -x(x-1)(x-2)$

Les racines de $\chi_f(x)$ sont 0, 1 et 2.

f possède donc trois valeurs propres <u>distinctes</u>, donc f est diagonalisable.

<u>Exo 3.</u> 1.

$\chi_u(x) = \det(M - x\,Id) = \begin{vmatrix} -3-x & -2 & -2 \\ 4 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$

$= (1-x)\left[(-3-x)(3-x) + 8\right] = (1-x)\left[x^2 - 1\right]$

$= (x-1)^2(-1-x)$

Les valeurs propres de u sont les racines de $\chi_u(x)$, c'est à dire 1 (double) et -1.

2. $E_1 = \ker(u - id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \begin{array}{l} -4x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$.

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array}, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

$E_{-1} = \ker(u + id) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \begin{array}{l} -2x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + 4y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{array} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \begin{array}{l} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{array}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Une base de E_1 est $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, une base de E_{-1} est $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Une base de vecteurs propres de u est donc $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Dans cette base, la matrice de u s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

- $\chi_A = (1-x)(2-x)(-1-x)$.
  A possède 3 valeurs propres distinctes, A est donc diagonalisable
- $\chi_B = (1-x)^3$ B a donc pour seule valeur propre 1. $E_1 = \ker(B-Id) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} / -z=0\right\}$.
  $\dim E_1 = 2$. Comme la somme des dimensions des espaces propres (ici, $\dim E_1 = 2$) n'est pas égale à la dimension de l'espace (ici, 3), B n'est pas diagonalisable.
- $\chi_C = (1-x)^2(-1-x)$.
  E_1 contient clairement l'espace engendré par les deux premiers vecteurs de base, qui est de dimension 2. D'autre part E_{-1} est de dimension au moins 1, puisque -1 est valeur propre.
  On a donc $\dim E_1 + \dim E_{-1} \geq 3$. La somme des dimensions des espaces propres est donc égale à la dimension de l'espace ambiant.
  C est diagonalisable.
- $\chi_D = x^2+1$. χ_D n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc D n'est pas diagonalisable.