Mathématiques pour les sciences 2 (Math426)

Deuxième contrôle continu – 17.04.2013 – durée 1h

Les documents, calculatrices et autres outils électroniques ne sont pas autorisés.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par

$$f\big((x,y),(x',y')\big) = xx' + xy' - yx' + yy'.$$

1. (a) Calculer $f((1,0),(2,1))$ et $f((0,1),(2,1))$.
   (b) Pour quelle valeur de λ, a-t-on $f((1,\lambda),(2,1)) = 0$?
2. Déterminer la matrice A représentant f dans la base canonique.
3. Déterminer la matrice B représentant f dans la base $((1,1),(1,-1))$.
4. Rappeler la relation entre B et A à l'aide d'une matrice de passage P que l'on précisera.

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, donner la forme polaire associée à la forme quadratique q et donner sa signature et son rang :

1. $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $q((x,y)) = x^2 + 4xy + 2y^2$;
2. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = xy + 2xz + 3yz$.

Exercice 3 Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 8yz - 2yx + 2xz.$$

1. Donner la forme polaire φ de q.
2. Montrer que φ est un produit scalaire.
3. Orthonormaliser la base (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ pour le produit scalaire φ, où b_1, b_2, b_3 sont les vecteurs :

$$b_1 = (0,2,2),\ b_2 = (1,0,0),\ b_3 = (1,1,0).$$