UNIVERSITÉ DE SAVOIE 2012/13

L2 MASS – L2 STS – PEIP

Mathématiques pour les sciences 2 (MATH426)

Premier contrôle continu – 20.02.2013 – durée 1h

Les documents, calculatrices et autres outils électroniques ne sont pas autorisés.
L'exercice 1 est obligatoire ; vous devez ensuite traiter au choix l'un des exercices 2, 3 ou 4.

Exercice 1 (10 points, obligatoire) On note b_1, b_2 et b_3 les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants, et on appelle $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la famille qu'ils forment.

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une équation du sous-espace vectoriel $F = \text{vect}(b_1, b_2)$.
3. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$u(b_1) = b_1 + 2\,b_2 + 3\,b_3, \quad u(b_2) = -b_1 + b_3, \quad u(b_3) = b_1 - b_2 + b_3.$$

   (a) Donner la matrice $M = Mat_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) Donner les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $u(-2b_1 + b_2 + b_3)$.
   (c) Donner les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de $u(-2b_1 + b_2 + b_3)$.

Exercice 2 (10 points) On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + 4z, 3x - 4y + 12z, x - 2y + 5z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer les dimensions du noyau et de l'image de f.
3. Calculer son polynôme caractéristique. En déduire, sans autres calculs, que f est diagonalisable.

Exercice 3 (10 points) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M :

$$M = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner le polynôme caractéristique de u et ses valeurs propres.
2. Calculer les espaces propres correspondants.
3. Donner une base de vecteurs propres de u, et la matrice de u dans cette base.

Exercice 4 (10 points) Pour chacune des matrices A, B, C et D suivantes, dire si elles sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ou non. On justifiera chaque affirmation.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$