Rappels d'algèbre linéaire

- Dans toute la suite $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1. Définitions.

Définition. On dit que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E si

1. $0_E \in F$;
2. pour tout $u \in F$, pour tout $x \in \mathbf{K}$, $x \cdot u \in F$;
3. pour tous $u \in F$ et $v \in F$, $u + v \in F$.

- Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs de E.

Définition. On appelle *combinaison linéaire* de $u_1, \dots, u_p$ tout vecteur v de E de la forme

$$v = x_1 \cdot u_1 + \ldots + x_p \cdot u_p, \quad \text{où} \quad x_1 \in \mathbf{K}, \ldots, x_p \in \mathbf{K}.$$

- L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ est un sous-espace vectoriel de E noté $\operatorname{vect}(u_1, \ldots, u_p)$: c'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1, \dots, u_p$.

Définition. 1. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre si, pour tous scalaires $x_1 \in \mathbf{K}, \dots, x_p \in \mathbf{K}$,

$$x_1 \cdot u_1 + \ldots + x_p \cdot u_p = 0_E \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0, \ldots, x_p = 0.$$

2. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est *liée* lorsqu'elle n'est pas libre c'est à dire lorsqu'il existe des scalaires $x_1, \dots, x_p$ **non tous nuls** tels que $x_1 \cdot u_1 + \ldots + x_p \cdot u_p = 0_E$.
3. La famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est *génératrice* de E si, pour tout vecteur $v \in E$, il existe des scalaires $x_1, \dots, x_p$ tels que $v = x_1 \cdot u_1 + \ldots + x_p \cdot u_p$. Autrement dit $E = \operatorname{vect}(u_1, \ldots, u_p)$.
4. $(u_1, \ldots, u_p)$ est une *base* de E si c'est une famille libre **et** génératrice de E.

- Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de E, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique p-uplet de scalaires $(x_1, \ldots, x_p)$ tels que $v = x_1 \cdot u_1 + \ldots + x_p \cdot u_p$.
  - ⋆ L'existence vient de « génératrice », l'unicité de « libre ».
- Cet unique p-uplet de scalaires $(x_1, \ldots, x_p)$ tels que $v = x_1 \cdot u_1 + \ldots + x_p \cdot u_p$ s'appelle les *coordonnées de v dans la base $(u_1, \ldots, u_p)$*.

Définition. Un espace vectoriel E est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal c'est à dire le même nombre de vecteurs.*

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal des bases de E s'appelle la dimension de E notée $\dim E$.

Exemple(s). • La base canonique de $\mathbf{R}^3$ est formée des trois vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

- Les coordonnées du vecteur $v = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base canonique sont (x_1, x_2, x_3) puisque
$$(x_1, x_2, x_3) = x_1\,(1,0,0) + x_2\,(0,1,0) + x_3\,(0,0,1), \quad \text{soit} \quad v = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3.$$
- Les coordonnées de ce même vecteur $v = (x_1, x_2, x_3)$ dans la base formée des trois vecteurs $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (0,0,1)$ sont $(x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2)$ puisque
$$(x_1, x_2, x_3) = x_1\,(1,1,1) + (x_2 - x_1)\,(0,1,1) + (x_3 - x_2)\,(0,0,1),$$
c'est à dire $v = x_1 \cdot u_1 + (x_2 - x_1) \cdot u_2 + (x_3 - x_2) \cdot u_3$.

Exercice(s) 1. 1. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$. Quelles sont les coordonnées de $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ dans $\mathcal{B}$?

2. Montrer que $\mathcal{C} = (1, (X-1), (X-1)^2)$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$ puis déterminer les coordonnées de $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ dans $\mathcal{C}$.

3. Les vecteurs $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (1, 2, -1)$ et $u_3 = (3, 0, 1)$ forment-ils une base de $\mathbf{R}^3$? Donner une équation du sous-espace $F = \mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3)$.

Théorème (de la base incomplète)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathcal{L}$ une famille libre de E et $\mathcal{G}$ une famille génératrice. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.*

Corollaire. *Soient E un espace vectoriel de dimension p, u_1, …, u_p p vecteurs de E.*

1. *Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre, alors $p \leq n$. Si de plus $p = n$, alors c'est une base de E.*
2. *Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice, alors $p \geq n$. Si de plus $p = n$, alors c'est une base de E.*

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont *supplémentaires* ou encore que F et G sont en *somme directe* si, tout vecteur u de E se décompose de manière unique
$$u = v + w, \quad \text{avec} \quad v \in F \text{ et } w \in G.$$
- Ceci signifie que $F \cap G = \{0_E\}$ **et** $E = F + G$.
- Plus généralement, des sous-espaces F_1, …, F_p de E sont en somme directe si tout vecteur u de E s'écrit de manière unique
$$u = v_1 + \ldots + v_p \quad \text{avec} \quad v_1 \in F_1, \ldots, v_p \in F_p.$$

2. Applications linéaires.

2.1. Généralités.

- Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, f une application de E dans F.

Définition. Une *application linéaire* est une application f de E dans F vérifiant :

1. pour tout vecteur u de E et tout scalaire x, $f(x \cdot u) = x \cdot f(u)$;
2. pour tous vecteurs u et v de E, $f(u + v) = f(u) + f(v)$.

- L'ensemble des applications linéaire de E dans F est noté $\mathcal{L}(E; F)$.
- L'ensemble des endomorphismes de E — les applications linéaires de E dans E — est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Lorsque $F = \mathbf{K}$, on dit que f est une forme linéaire.

Exemple(s). 1. $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ où $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3$ est une forme linéaire.

2. $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ où $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 - 3x_3)$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

3. $f : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathbf{R}[X]$ où $f(P) = P - XP'$ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Définition. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. *Le noyau de* f est le sous-espace vectoriel de E, $\ker f$, défini par

$$\ker f = \{u \in E : f(u) = 0_F\}.$$

2. *L'image de* f est le sous-espace vectoriel de F, $\operatorname{Im} f$, défini par

$$\operatorname{Im} f = \{f(u) : u \in E\}.$$

Le rang de f, $\operatorname{rg}(f)$, est la dimension de $\operatorname{Im} f$

- Lorsque $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E – en particulier si c'est une base de E –, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Théorème (Théorème du rang)**.** *Soit f une application linéaire de E dans F où E est de dimension finie. Alors*

$$\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \ker f + \operatorname{rg}(f).$$

2.2. Matrice d'une application linéaire.

- Dans ce paragraphe, E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie, $\dim E = n$, $\dim F = p$.
- $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F.

Coordonnées d'un vecteur. Dire que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E signifie que, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique n-uplet de scalaires, $x_1 \in \mathbf{K}, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$, tel que : $u = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n$. Ce n-uplet de scalaires, x_1, …, x_1 est appelé *coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$*. On représente les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ en colonne et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ soit

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. C'est la matrice de taille $p \times n$, notée $\mathcal{M}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f)$, dont la j^{e} colonne est formée par les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ de $f(e_j)$, l'image du j^{e} vecteur de la base $\mathcal{B}$.

Les coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ du vecteur $f(u)$ s'obtiennent à partir des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et de la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ à l'aide de la relation :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}(f(u)) = \mathcal{M}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}(f)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u).$$

Formule du changement de base. Soient f un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On note $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}}(f)$ et $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'}(f)$.

Définition. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}(Id_E)$. La j^{e} colonne de P est formée des coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de e'_j, le j^{e} vecteur de la base $\mathcal{B}'$.

Proposition. $M' = P^{-1} M P$

2.3. Déterminant.

Définition. Le *déterminant* d'une matrice **carrée** A est l'unique forme alternée des colonnes de A égale à 1 lorsque $A = I$.

- À retenir en dimension 2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- et en dimension 3

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$
$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Remarque(s). • Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.

- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.
- $\det(AB) = \det A \det B$.

Définition. Soient f un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}}(f)$.
Le *déterminant de* f est $\det f = \det M$.

- Cette définition a bien un sens : en effet, si M' est la matrice de f dans une autre base $\mathcal{B}'$ alors $\det M = \det M'$.

Théorème. *Soit f un endomorphisme de E de dimension finie. On a équivalence entre*

1. *f est un isomorphisme (f est bijective) ;*
2. *$\ker f = \{0_E\}$ (f est injective) ;*
3. *$\operatorname{rg} f = \dim E$ (f est surjective) ;*
4. *$\det f \neq 0$.*

Réduction des endomorphismes

1. Définitions.

- Soit f un endomorphisme de E.

Définition. 1. Un scalaire λ est *valeur propre de f* s'il existe un vecteur u de E, **non nul**, vérifiant $f(u) = \lambda \cdot u$.

2. Si $u \neq 0$ vérifie la relation $f(u) = \lambda \cdot u$, *u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

Remarque(s). • L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le *spectre de f* et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.

- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, le *sous-espace propre associée à λ*, noté E_λ est l'ensemble des vecteurs vérifiant la relation $f(u) = \lambda \cdot u$ c'est à dire
$$E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E).$$

- On utilise le même vocabulaire, valeur propre, vecteur propre, pour les matrices carrées.

- Si M est la matrice de f dans une base donnée, M et f ont les mêmes éléments propres.

Définition. On appelle *polynôme caractéristique de f* noté C_f le polynôme
$$C_f(\lambda) = \det(f - \lambda Id_E)$$

Proposition. *Un scalaire λ est valeur propre de f si et seulement si c'est une racine du polynôme caractéristique.*

2. Diagonalisation.

Définition. Un endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ formée de vecteurs propres de f.

Remarque(s). Si f est diagonalisable, la matrice de f dans la base formée des vecteurs propres est une matrice diagonale et les termes diagonaux sont les valeurs propres.

- Soit M la matrice représentant l'endomorphisme f dans une certaine base. Alors f est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que
$$P^{-1}MP = D, \qquad \text{avec } D \text{ une matrice diagonale.}$$

Proposition. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f, $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs propres associés respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Alors la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.*

Théorème. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est diagonalisable ;*
2. *$E = \oplus_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda$;*
3. *$\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(f)} \dim E_\lambda$.*

Remarque(s). Si f possède trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, alors f est diagonalisable si et seulement si

$$\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dim E_{\lambda_3}.$$

Corollaire. *Lorsque* $\dim E = n$, *si* f *possède* n *valeurs propres distinctes, alors* f *est diagonalisable.*

Définition. Un polynôme est scindé sur $\mathbf{K}$ s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré un.

Remarque(s). Tout polynôme est scindé sur $\mathbf{C}$.

Exemple(s). Soient $P(X) = (X-1)^2(X+4)$ et $Q(X) = (X-1)(X^2+1)$. P est scindé sur $\mathbf{R}$ alors que Q n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$.

Théorème. *Soient* E *un espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$ *et* f *un endomorphisme de* E. f *est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur* $\mathbf{K}$ *et si la multiplicité algébrique des valeurs propres est égale à la dimension du sous-espace propre associé.*

Traduction. On suppose que le polynôme caractéristique de f est $C_f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}(\lambda-\lambda_3)^{n_3}$. C_f est scindé. f est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{\lambda_1} = n_1$, $\dim E_{\lambda_2} = n_2$ et $\dim E_{\lambda_3} = n_3$.

À retenir. Soit M une matrice carrée représentant l'endomorphisme f dans une base donnée. Les étapes de la diagonalisation sont les suivantes :

1. On détermine le polynôme caractéristique $C_f(\lambda)(f) = \det(M - \lambda I)$
   - Si C_f n'est pas scindé, f n'est pas diagonalisable.
2. Si C_f est scindé, pour chaque valeur propre de f c'est à dire pour chaque racine de C_f on détermine le sous-espace propre associé $E_\lambda = \ker(f - \lambda I)$ et on en donne une base et la dimension.
   - On vérifie si la dimension de E est égale à la somme des dimensions des sous-espaces propres pour conclure si f est diagonalisable ou pas.
3. Si f est diagonalisable, on rassemble les vecteurs propres en colonne dans une matrice P et on forme la matrice diagonale D avec les valeurs propres correspondantes : si le troisième vecteur propre est associé à la valeur propre 2, le troisième terme diagonal de D est 2. On a alors $P^{-1}MP = D$.
   - On ne calcule P^{-1} que si c'est explicitement demandé.

3. Trigonalisation.

Définition. Un endomorphisme f est triangularisable, ou trigonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire.

- Soit M la matrice représentant l'endomorphisme f dans une certaine base. Alors f est trigonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}MP = T, \qquad \text{avec } T \text{ une matrice triangulaire.}$$

Théorème. *Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

Exemple(s). Un endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ différent de l'identité dont le polynôme caractéristique est $C_f(x) = (1-x)^3$ est trigonalisable mais non diagonalisable. Il est trigonalisable car son polynôme caractéristique est scindé. Il n'est par contre pas diagonalisable, car s'il l'était, l'espace propre E_1 serait $\mathbf{R}^3$ tout entier, donc pour tout vecteur u de $\mathbf{R}^3$, on aurait $f(u) = u$, autrement dit, f serait l'identité.

Remarque(s). Comme tout polynôme est scindé sur $\mathbf{C}$, tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbf{C}$.

4. Théorème de Cayley-Hamilton.

L'endomorphisme f ayant le même ensemble de départ que d'arrivée, on peut le composer avec lui même, et l'application obtenue est encore un endomorphisme. On note f^k la composée de f avec lui même k fois : $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, etc...

Définition. Soit $P(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + \cdots + p_k X^k$ un polynôme de $\mathbf{K}[X]$, et f un endomorphisme. On note $P(f)$ l'endomorphisme définit par $P(f) = p_0 Id + p_1 f + p_2 f^2 + \cdots + p_k f^k$, où Id est l'identité de $\mathbf{K}$.

- Soit M la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$. Alors, pour tout k, la matrice de f^k dans la base $\mathcal{B}$ est M^k. Par conséquent, si $P(X) = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + \cdots + p_k X^k$ est un polynôme de $\mathbf{K}[X]$, alors la matrice de $P(f)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $p_0 I + p_1 M + p_2 M^2 + \cdots + p_k M^k$, où I désigne la matrice identité.

Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton)**.** *Soit f un endomorphisme et C_f son polynôme caractéristique. Alors $C_f(f) = 0$.*

Exemple(s). Soit f la rotation du plan d'angle $\frac{\pi}{2}$. Sa matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $C_f(x) = x^2 + 1$. Calculons $C_f(f)$. f^2 est la composée de f avec elle même, c'est la rotation d'angle π, c'est à dire $-Id$, et sa matrice est $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $C_f(f) = f^2 + Id = -Id + Id$ est bien l'endomorphisme nul. De même $C_f(M) = M^2 + Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.