Licence de Sciences et Technologies - 1ère année
MATH221 - Suites et fonctions réelles

2013–2014

CHAPITRE 1

Nombres réels

Dans ce chapitre, on construit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels à partir des suites de nombres rationnels.

1. Suites de nombres rationnels

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un *corps commutatif*.

(1) $(\mathbb{Q},+)$ est un *groupe abélien* pour l'addition :

(a) l'addition est *associative* :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad (a+b)+c = a+(b+c).$$

(b) 0 est *élément neutre* de l'addition :

$$\forall a \in \mathbb{Q} \quad 0+a = a+0 = a.$$

(c) tout élément a un *opposé* :

$$\forall a \in \mathbb{Q} \quad \exists a' := -a \quad a+a' = a'+a = 0.$$

(d) l'addition est *commutative* :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a+b = b+a.$$

(2) la multiplication est associative : $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

(3) la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c) \quad \text{et} \quad (a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

(4) 1 est élément neutre de la multiplication :

$$\forall a \in \mathbb{Q} \quad 1 \times a = a \times 1 = a.$$

(5) tout élément non nul a un *inverse* :

$$\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \quad \exists a^* := 1/a \quad a \times a^* = a^* \times a = 1.$$

(6) la multiplication est *commutative* :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a \times b = b \times a.$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est *totalement ordonné* :

(1) la relation $\leq$ est une relation d'ordre :

(a) la relation $\leq$ est *réflexive* :

$$\forall a \in \mathbb{Q} \quad a \leq a.$$

(b) la relation $\leq$ est *transitive* :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad a \leq b \quad \text{et} \quad b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c.$$

(c) la relation $\leq$ est *antisymétrique* :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a \leq b \quad \text{et} \quad b \leq a \;\Rightarrow\; a = b.$$

(2) L'ordre est *total* :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a \leq b \quad \text{ou} \quad b \leq a.$$

On note $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ et

$$\mathbb{Q}_- := \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0\} \quad \mathbb{Q}_+ := \{a \in \mathbb{Q} : a \geq 0\}$$
$$\mathbb{Q}_-^* := \{a \in \mathbb{Q} : a < 0\} \quad \mathbb{Q}_+^* := \{a \in \mathbb{Q} : a > 0\}.$$

La relation d'ordre satisfait à :

(1) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad a \leq b \;\Rightarrow\; a + c \leq b + c$.

(2) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \quad a \leq b \quad \text{et} \quad c \geq 0 \;\Rightarrow\; a \times c \leq b \times c$.

On note $a < b$ si $a \leq b$ et $a \neq b$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est *archimédien* :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad na > b.$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$ possède une propriété de densité :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a < b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Q} \quad a < c < b.$$

On définit pour $a \in \mathbb{Q}$

$$|a| := \max(a, -a).$$

Alors

$$|-a| = |a|,$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$
$$|a - b| \leq |a| + |b|,$$
$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|,$$
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

On note :

- $(a_n)_n$ une suite $a_0, a_1, \ldots$ d'éléments de $\mathbb{Q}$,
- $(a_n)_{n \geq n_0}$ une suite $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots$ d'éléments de $\mathbb{Q}$.

Définition 1.1. On dit qu'une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{Q}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq K.$$

Remarque 1.1. Soit $(a_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $K \in \mathbb{Q}_+$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad |a_n| \leq K.$$

alors la suite $(a_n)_n$ est *bornée* : en effet

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0-1}|, K).$$

Définition 1.2. On dit qu'une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ *converge* vers $l \in \mathbb{Q}$ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n \;\Rightarrow\; |a_p - l| < \varepsilon.$$

Remarque 1.2. Ce nombre l est unique. En effet, supposons que $(a_n)_n$ converge vers l et vers l' avec $l \neq l'$ et montrons que l'on arrive à une contradiction.

Comme $l' \neq l$, $\frac{|l'-l|}{3} \in \mathbb{Q}_+^*$. Donc, comme $(a_n)_n$ converge vers l et vers l',

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad p \geq n_0, \; |a_p - l| < \frac{|l' - l|}{3},$$
$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad p \geq n_1, \;\Rightarrow\; |a_p - l'| < \frac{|l' - l|}{3}.$$

Donc, si $p \geq \max(n_0, n_1)$, on a

$$|l' - l| \leq |l' - u_p + u_p - l| \leq |l' - u_p| + |u_p - l| < \frac{2|l' - l|}{3}$$

Puisque $|l' - l| > 0$, on aurait donc $1 < \frac{2}{3}$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $l = l'$.

On note

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l.$$

Une suite $(a_n)_n \subset \mathbb{Q}$ qui converge vers un nombre $l \in \mathbb{Q}$ est dite *convergente.*

Exemple 1.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n := \frac{1}{n}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Comme $\mathbb{Q}$ est archimédien, il existe n tel que $n > \frac{1}{\varepsilon}$. On a alors

$$p \geq n \Rightarrow \ |a_p| = \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

Exemple 1.2. Soit $a \in \mathbb{Q}^*$, avec $|a| < 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n := 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

On a

$$S_n - \frac{1}{1-a} = \frac{-a^{n+1}}{1-a} \quad \text{donc} \quad \left|S_n - \frac{1}{1-a}\right| \leq \frac{|a|^{n+1}}{1-a}.$$

Soit $b := 1/|a|$: alors $b \in \mathbb{Q}$ et $b > 1$. Soit $c := b - 1$: alors $c \in \mathbb{Q}_+^*$. On a

$$b^{n+1} > b^n = (1 + c)^n > 1 + nc,$$

donc, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$

$$n > \frac{1}{c}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1-a} - 1\Big) \ \Rightarrow \ b^{n+1} > \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{1-a} \ \Rightarrow \ \frac{|a|^{n+1}}{1-a} < \varepsilon.$$

La suite $(S_n)_n$ converge vers $1/(1 - a)$.

Définition 1.3. On dit qu'une suite $(a_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n, \ q \geq n \ \Rightarrow \ |a_p - a_q| < \varepsilon.$$

Exemple 1.3. (1) La suite $(a_n)_n$ définie par

$$a_n := \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}$$

est une suite de Cauchy : si $0 < n \leq p < q$,

$$0 < a_q - a_p = \sum_{m=p+1}^{q} \frac{1}{m!} = \frac{1}{(p+1)!}\sum_{j=0}^{q-p-1} \frac{(p+1)!}{(p+1+j)!} \leq \frac{1}{(p+1)!}\sum_{j=0}^{q-p-1} \frac{1}{(p+2)^j}$$

$$= \frac{1}{(p+1)!}\frac{1 - \frac{1}{(p+2)^{q-p}}}{1 - \frac{1}{p+2}} \leq \frac{p+2}{(p+1)(p+1)!} \leq \frac{1}{p \cdot p!} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{n},$$

donc

$$|a_p - a_q| = a_q - a_p \leq \frac{1}{n}.$$

Si $n \leq q < p$, on a

$$0 < a_p - a_q \leq \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad |a_p - a_q| = a_p - a_q \leq \frac{1}{n}$$

Donc, si $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ et si $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (propriété d'Archimède), on a

$$p \geq n,\ q \geq n \ \Rightarrow\ |a_p - a_q| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(2) La suite définie par

$$a_n := (-1)^n$$

n'est pas une suite de Cauchy : pour tout p pair et tout q impair (aussi grands que l'on veut) $|a_p - a_q| = 2$ et est supérieur à tout $\varepsilon < 2$.

Proposition 1.1. *On a*

(1) *toute suite convergente est une suite de Cauchy ;*

(2) *toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. (1) Soit $(a_n)_n$ une suite qui converge vers a. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq n \quad |a_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$p \geq n,\ q \geq n \ \Rightarrow\ |a_p - a_q| \leq |a_p - a| + |a - a_q| < \varepsilon.$$

Donc $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy.

(2) Soit $(a_n)_n$ une suite de Cauchy. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq n_1 \quad |a_p - a_{n_1}| < 1,$$

donc

$$\forall p \geq n_1 \quad |a_p| \leq |a_{n_1}| + |a_p - a_{n_1}| < |a_{n_1}| + 1.$$

Donc $(a_n)_n$ est une suite bornée. □

Remarque 1.3. On en déduit que toute suite convergente est bornée.

Proposition 1.2. *Soit $(a_n)_n$ une suite qui converge vers 0 et soit $(b_n)_n$ une suite bornée. Alors la suite $(a_nb_n)_n$ converge vers 0.*

Démonstration. Soit $K \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad |b_p| \leq K.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall p \geq n \quad |a_p| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Alors

$$\forall p \geq n \quad |a_pb_p| < \varepsilon.$$

Donc la suite $(a_nb_n)_n$ converge vers 0. □

Proposition 1.3. *Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de Cauchy et soit $k \in \mathbb{Q}$.*

(1) *la suite $(a_n + b_n)_n$ est une suite de Cauchy ;*

(2) *la suite $(ka_n)_n$ est une suite de Cauchy ;*

(3) *la suite $(a_nb_n)_n$ est une suite de Cauchy.*

Démonstration. (1) Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: comme les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites de Cauchy, il existe $n_a \in \mathbb{N}$ et $n_b \in \mathbb{N}$ tels que

$$p \geq n_a,\ q \geq n_a \ \Rightarrow\ |a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$p \geq n_b,\ q \geq n_b \ \Rightarrow\ |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On remarque

$$|a_p + b_p - (a_q + b_q)| \leq |a_p - a_q| + |b_p - b_q|.$$

Donc, en notant $n := \max(n_a, n_b)$ on a

$$p \geq n,\ q \geq n \ \Rightarrow\ |a_p + b_p - (a_q + b_q)| < \varepsilon.$$

Donc $(a_n + b_n)_n$ est une suite de Cauchy.

(2) On peut supposer $k \neq 0$; sinon la suite $(ka_n)_n$ est nulle, donc converge, donc est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: comme la suite $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n,\ q \geq n \ \Rightarrow\ |a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Donc on a

$$p \geq n,\ q \geq n \ \Rightarrow\ |ka_p - ka_q| = |k| \cdot |a_p - a_q| < \varepsilon.$$

Donc $(ka_n)_n$ est une suite de Cauchy.

(3) Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont bornées : soient $K_a \in \mathbb{Q}_+^*$ et $K_b \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq K_a,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leq K_b.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: comme les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites de Cauchy, il existe $n_a \in \mathbb{N}$ et $n_b \in \mathbb{N}$ tels que

$$p \geq n_a,\ q \geq n_a \ \Rightarrow\ |a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2K_b},$$
$$p \geq n_b,\ q \geq n_b \ \Rightarrow\ |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2K_a}.$$

On remarque

$$a_p b_p - a_q b_q = (a_p - a_q) b_p + a_q (b_p - b_q),$$

donc

$$|a_p b_p - a_q b_q| \leq |a_p - a_q| \cdot |b_p| + |a_q| \cdot |b_p - b_q|.$$

Par conséquent, en notant $n := \max(n_a, n_b)$ on a

$$p \geq n,\ q \geq n \ \Rightarrow\ |a_p b_p - a_q b_q| < \varepsilon.$$

Donc $(a_n b_n)_n$ est une suite de Cauchy. □

On démontre de manière analogue :

Proposition 1.4. *Soit $(a_n)_n$ une suite qui converge vers a et $(b_n)_n$ une suite qui converge vers b ; soit $k \in \mathbb{Q}$.*

(1) *la suite $(a_n + b_n)_n$ converge vers $a + b$;*

(2) *la suite $(ka_n)_n$ converge vers ka ;*

(3) *la suite $(a_n b_n)_n$ converge vers ab.*

DÉMONSTRATION. (1) Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: comme la suite $(a_n)_n$ converge vers a et comme la suite $(b_n)_n$ converge vers b, il existe $n_a \in \mathbb{N}$ et $n_b \in \mathbb{N}$ tels que

$$p \geq n_a \;\Rightarrow\; |a_p - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$p \geq n_b \;\Rightarrow\; |b_p - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On remarque

$$|a_p + b_p - (a+b)| \leq |a_p - a| + |b_p - b|.$$

Donc, en notant $n := \max(n_a, n_b)$ on a

$$p \geq n \;\Rightarrow\; |a_p + b_p - (a+b)| < \varepsilon.$$

Donc $(a_n + b_n)_n$ converge vers $a + b$.

(2) On peut supposer $k \neq 0$; sinon la suite $(ka_n)_n$ est nulle, donc converge vers ka. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: comme la suite $(a_n)_n$ converge vers a, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n \;\Rightarrow\; |a_p - a| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Donc on a

$$p \geq n \;\Rightarrow\; |ka_p - ka| = |k| \cdot |a_p - a| < \varepsilon.$$

Donc $(ka_n)_n$ converge vers ka.

(3) Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont bornées : soit $K_a \in \mathbb{Q}_+$ et $K_b \in \mathbb{Q}_+$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq K_a,$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |b_n| \leq K_b.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: comme la suite $(a_n)_n$ converge vers a et comme la suite $(b_n)_n$ converge vers b, il existe $n_a \in \mathbb{N}$ et $n_b \in \mathbb{N}$ tels que

$$p \geq n_a \;\Rightarrow\; |a_p - a| < \frac{\varepsilon}{2K_b},$$
$$p \geq n_b \;\Rightarrow\; |b_p - b| < \frac{\varepsilon}{2K_a}.$$

On remarque

$$a_p b_p - ab = (a_p - a) b_p + a(b_p - b),$$

donc

$$|a_p b_p - ab| \leq |a_p - a| \cdot |b_p| + |a| \cdot |b_p - b|.$$

Par conséquent, en notant $n := \max(n_a, n_b)$ on a

$$p \geq n \;\Rightarrow\; |a_p b_p - ab| < \varepsilon.$$

Donc $(a_n b_n)_n$ converge vers ab. □

Proposition 1.5. *Soit $(a_n)_n$ une suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n \neq 0.$$

De plus la suite $(1/a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de Cauchy.

DÉMONSTRATION. Comme la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0, il existe $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists p \geq n \quad |a_p| \geq \alpha.$$

Comme la suite $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n_0, \; q \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_p - a_q| < \frac{\alpha}{2}.$$

On choisit $p \geq n_0$ tel que $|a_p| \geq \alpha$. Comme
$$|a_q| \geq |a_p| - |a_p - a_q|,$$
on a
$$q \geq n_0 \;\Rightarrow\; |a_q| > \frac{\alpha}{2}.$$
D'où le premier résultat.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Comme la suite $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$p \geq n,\; q \geq n \;\Rightarrow\; |a_p - a_q| < \frac{\varepsilon\alpha^2}{4}.$$
On remarque
$$\left|\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_p}\right| = \frac{|a_p - a_q|}{|a_p a_q|}.$$
Donc, si $n' := \max(n, n_0)$, on a
$$p \geq n',\; q \geq n' \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_p}\right| < \varepsilon.$$
Donc $(1/a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de Cauchy. □

On a vu, dans la proposition 1.3 :

Proposition 1.6. *L'ensemble $\mathcal{C}$ des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ est un* anneau commutatif *.*

(1) *($\mathcal{C}$,+) est un* groupe abélien *pour l'addition, définie par*
$$(a_n)_n + (b_n)_n := (a_n + b_n)_n.$$
*L'élément neutre de l'addition est la suite constante nulle. L'*opposé *de la suite $(a_n)_n$ est la suite $(-a_n)_n$.*

(2) *La multiplication est définie par*
$$(a_n)_n \times (b_n)_n := (a_n b_n)_n.$$
Elle est associative et distributive par rapport à l'addition. La suite constante égale à 1 *est l'élément neutre de la multiplication. La multiplication est commutative.*

2. Construction de $\mathbb{R}$

Proposition 1.7. *On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ par*
$$(a_n)_n \asymp (b_n)_n \;\Leftrightarrow\; \textit{la suite } (a_n - b_n)_n \textit{ converge vers } 0.$$
L'ensemble quotient $\mathcal{C}/\asymp$ est un anneau commutatif.

Démonstration. • La relation $\asymp$ est une relation d'équivalence :

(1) la relation $\asymp$ est *réflexive* :
$$(a_n)_n \asymp (a_n)_n \;\Leftrightarrow\; \text{la suite } (a_n - a_n) \text{ converge vers } 0.$$

(2) la relation $\asymp$ est *transitive* :
si $(a_n)_n \asymp (b_n)_n$ et $(b_n)_n \asymp (c_n)_n$, alors
la suite $(a_n - b_n)_n$ converge vers 0 et la suite $(b_n - c_n)_n$ converge vers 0 ;
donc la suite $(a_n - c_n)_n$ converge vers 0 ;
donc $(a_n)_n \asymp (c_n)_n$.

(3) la relation $\asymp$ est *symétrique* :
si $(a_n)_n \asymp (b_n)_n$, alors
la suite $(a_n - b_n)_n$ converge vers 0 ;
donc la suite $(b_n - a_n)_n$ converge vers 0 ;
donc $(b_n)_n \asymp (a_n)_n$.

• On définit une addition et une multiplication sur l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\asymp$ des classes d'équivalence. Soit $x \in \mathcal{C}/\asymp$ et $y \in \mathcal{C}/\asymp$; soit $(a_n)_n \in x$ et $(b_n)_n \in y$.

(1) $x + y$ est la classe de $(a_n)_n + (b_n)_n$,

(2) xy est la classe de $(a_n)_n \times (b_n)_n$,

On doit d'abord montrer que ces résultats ne dépendent pas des représentants choisis. Soit $(a'_n)_n \in x$ et $(b'_n)_n \in y$. Alors les suites $(a'_n - a_n)_n$ et $(b'_n - b_n)_n$ convergent vers 0.
(1) La suite $(a'_n + b'_n)_n - (a_n + b_n)_n$ converge vers 0 : la classe de $(a'_n)_n + (b'_n)_n$ est égale à la classe de $(a_n)_n + (b_n)_n$.
(2) On remarque

$$a'_n b'_n - a_n b_n = (a'_n - a_n)b'_n + a_n(b'_n - b_n).$$

Donc la suite $(a'_n b'_n - a_n b_n)_n$ converge vers 0, d'après la proposition 1.2 : la classe de $(a'_n)_n \times (b'_n)_n$ est égale à la classe de $(a_n)_n \times (b_n)_n$.

• L'ensemble $\mathcal{C}/\asymp$ muni de ces deux lois est un anneau commutatif. L'élément neutre de l'addition est la classe de la suite constante nulle, c'est-à-dire l'ensemble des suites de Cauchy qui convergent vers 0. L'opposée d'une classe de suites est la classe des suites opposées. L'élément neutre de la multiplication est la classe de la suite constante égale à 1, c'est-à-dire l'ensemble des suites de Cauchy qui convergent vers 1. □

Définition 1.4. L'anneau quotient $\mathcal{C}/\asymp$ est appelé *ensemble des nombres réels* ou *droite numérique* : on le note $\mathbb{R}$; ses éléments sont appelés des *nombres réels.*

On note $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposition 1.8. *L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est un corps commutatif.*

Démonstration. Soit $(a_n)_n$ une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas vers 0 (c'est-à-dire que sa classe est $\neq 0$). D'après la proposition 1.5, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on puisse définir la suite $(1/a_n)_{n \geq n_0}$ et que celle-ci soit une suite de Cauchy. On définit une suite $(a'_n)_n$ par

$$a'_n := \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0, \\ \dfrac{1}{a_n} & \text{si } n \geq n_0. \end{cases}$$

Aors $(a'_n)_n$ est une suite de Cauchy et

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n a'_n = 1.$$

Donc la classe de $(a_n a'_n)_n$ est égale à la classe de la suite constante égale à 1; l'inverse de la classe de $(a_n)_n$ est égale à la classe de $(a'_n)_n$. □

Proposition 1.9. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est isomorphe à un sous-corps de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.*

Démonstration. On associe à $a \in \mathbb{Q}$ la classe $C(a)$ de l'ensemble des suites qui convergent vers a. L'application C est injective, vérifie

$$\forall a \in \mathbb{Q} \ \forall \in \mathbb{Q} \quad C(a + b) = C(a) + C(b) \quad \text{et} \quad C(ab) = C(a)C(b).$$

Son image est un sous-corps de $\mathbb{R}$. □

On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui convergent vers 0. Alors

$$(a_n)_n \asymp (b_n)_n \ \Leftrightarrow \ (a_n)_n - (b_n)_n \in \mathcal{C}_0.$$

Définition 1.5. On note

(1) $\mathcal{C}_-$ l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui vérifient

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^*_+ \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n \ \Rightarrow \ a_p < \varepsilon,$$

(2) $\mathcal{C}_+$ l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$ qui vérifient
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n \;\Rightarrow\; a_p > -\varepsilon.$$

Lemme 1.1. *On a*
$$\mathcal{C}_- \cap \mathcal{C}_+ = \mathcal{C}_0 \quad \textit{et} \quad \mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_+ = \mathcal{C}.$$

Démonstration. (1) Si $(a_n)_n \in \mathcal{C}_- \cap \mathcal{C}_+$, elle vérifie
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists n' \in \mathbb{N} \quad p \geq n' \;\Rightarrow\; a_p < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists n'' \in \mathbb{N} \quad p \geq n'' \;\Rightarrow\; a_p > -\varepsilon.$$
Alors
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists n := \max(n', n'') \in \mathbb{N} \quad p \geq n \;\Rightarrow\; |a_p| < \varepsilon.$$
Cela montre que la suite $(a_n)_n$ converge vers 0.

(2) On montre $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_- \cup \mathcal{C}_+$, en raisonnant par l'absurde. Supposons qu'une suite $(a_n)_n \in \mathcal{C}$ n'appartienne ni à $\mathcal{C}_-$ ni à $\mathcal{C}_+$. Alors
$$\exists \varepsilon' \in \mathbb{Q}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p' \geq n \quad a_{p'} \geq \varepsilon',$$
$$\exists \varepsilon'' \in \mathbb{Q}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p'' \geq n \quad a_{p''} \leq -\varepsilon''.$$
Donc, en posant
$$\varepsilon := \varepsilon' + \varepsilon''$$
et en remarquant
$$|a_{p'} - a_{p''}| \geq a_{p'} - a_{p''},$$
on aurait
$$\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p' \geq n \; \exists p'' \geq n \quad |a_{p'} - a_{p''}| \geq \varepsilon.$$
et la suite $(a_n)_n$ ne serait pas une suite de Cauchy : c'est absurde. □

Lemme 1.2. *Une suite de Cauchy $(a_n)_n$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_-$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que*
$$\forall n \geq n_0 \quad a_n > \alpha.$$

Démonstration. (1) On suppose que la suite de Cauchy $(a_n)_n$ n'appartient pas à $\mathcal{C}_-$: il existe $\beta \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists p \geq n \quad a_p \geq \beta.$$
Comme $(a_n)_n \in \mathcal{C}$, on a
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad p \geq n_0, \; q \geq n_0 \Rightarrow \; |a_p - a_q| < \frac{\beta}{2}.$$
Soit $q \geq n_0$: il existe $p \geq n_0$ tel que
$$a_p \geq \beta \quad \text{et} \quad a_p - a_q \leq |a_p - a_q| < \frac{\beta}{2},$$
donc
$$a_q > a_p - \frac{\beta}{2} > \frac{\beta}{2}.$$
On pose $\alpha := \beta/2$.

(2) La réciproque est évidente. □

Lemme 1.3. *On a*

(1) $(a_n)_n \in \mathcal{C}_-$ *équivaut à* $-(a_n)_n \in \mathcal{C}_+$ *;*

(2) *si* $(a_n)_n \in \mathcal{C}_+$ *et* $(b_n)_n \in \mathcal{C}_+$, *alors*
$$(a_n)_n + (b_n)_n \in \mathcal{C}_+ \quad \textit{et} \quad (a_n)_n \times (b_n)_n \in \mathcal{C}_+;$$

(3) *si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ et si $(a_n)_n \asymp (b_n)_n$, alors elles appartiennent toutes les deux à $\mathcal{C}_-$ ou elles appartiennent toutes les deux à $\mathcal{C}_+$.*

DÉMONSTRATION. L'assertion (1) et la première partie de (2) sont évidentes. Pour la seconde partie de (2), on peut supposer que ni $(a_n)_n$ ni $(b_n)_n$ n'appartiennent à $\mathcal{C}_0$; sinon $(a_n)_n \times (b_n)_n \in \mathcal{C}_0$. Donc

$$(a_n)_n \notin \mathcal{C}_- \quad \text{et} \quad (b_n)_n \notin \mathcal{C}_-.$$

D'après le lemme 1.2, il existe $\alpha' \in \mathbb{Q}_+^*$, $\alpha'' \in \mathbb{Q}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, $n^{**} \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n > \alpha' \quad \text{et} \quad \forall n \geq n^{**} \quad b_n > \alpha''$$

Donc, en notant $n^\star := \max(n_0, n^{**})$ et $\alpha := \alpha'\alpha''$,

$$\forall n \geq n^\star \quad a_n b_n > \alpha.$$

Cela montre, d'après le lemme 1.2, que $(a_n)_n \times (b_n)_n \notin \mathcal{C}_-$, donc $(a_n)_n \times (b_n)_n \in \mathcal{C}_+$.

(3) On suppose $(a_n)_n \in \mathcal{C}_+$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$

$$\exists n' \in \mathbb{N} \quad p \geq n' \ \Rightarrow \ a_p > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $(a_n)_n \asymp (b_n)_n$,

$$\exists n'' \in \mathbb{N} \quad p \geq n'' \ \Rightarrow \ a_p - b_p \leq |a_p - b_p| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n := \max(n', n'')$: alors

$$p \geq n \ \Rightarrow \ b_p > a_p - \frac{\varepsilon}{2} > -\varepsilon.$$

Donc $(b_n)_n \in \mathcal{C}_+$. On montrerait de même que si $(a_n)_n \in \mathcal{C}_-$, alors $(b_n)_n \in \mathcal{C}_-$. □

Définition 1.6. L'ensemble des classes d'équivalence des suites de Cauchy dans $\mathcal{C}_-$ est appelé l'ensemble des *nombres réels négatifs* ; on le note $\mathbb{R}_-$. L'ensemble des classes d'équivalence des suites de Cauchy dans $\mathcal{C}_+$ est appelé l'ensemble des *nombres réels positifs* ; on le note $\mathbb{R}_+$.

On note

$$\mathbb{R}_-^* := \mathbb{R}_- \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

On a, d'après les lemmes 1.1 et 1.3 :

(1) $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \{0\}$ et $\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$;

(2) $x \in \mathbb{R}_-$ équivaut à $-x \in \mathbb{R}_+$;

(3) si $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$, alors

$$x + y \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad xy \in \mathbb{R}_+.$$

On définit une relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$ par

$$x \leq y \ \Leftrightarrow \ y - x \in \mathbb{R}_+.$$

On en déduit facilement :

Proposition 1.10. *La relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre et l'ensemble $\mathbb{R}$ est ainsi totalement ordonné. De plus, pour tous les réels x, y, z, on a*

$$x \leq y \ \Rightarrow x + z \leq y + z$$

et, si $z \geq 0$,

$$x \leq y \ \Rightarrow xz \leq yz.$$

On définit pour $x \in \mathbb{R}$
$$|x| := \max(x, -x).$$
Alors
$$\begin{gathered} |-x| = |x|, \\ |x+y| \leq |x| + |y|, \\ |x-y| \leq |x| + |y|, \\ \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|, \\ |x \cdot y| = |x| \cdot |y|. \end{gathered}$$
L'injection $C : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante : l'ordre de $\mathbb{R}$ prolonge l'ordre de $\mathbb{Q}$.

Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$; soit x la classe de $(a_n)_n$ et soit y la classe de $(b_n)_n$. Si
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; a_n \leq b_n,$$
alors $x \leq y$.

Lemme 1.4. *Toute suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ converge vers le nombre réel qui est sa classe.*

Démonstration. Soit $(a_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$ et x sa classe. Il s'agit de démontrer :
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n \;\Rightarrow\; |a_p - x| < \varepsilon.$$
Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$p \geq n,\; q \geq n \;\Rightarrow\; |a_p - a_q| < \varepsilon.$$
On a donc, pour tout $p \geq n$:
$$\forall q \geq n \quad a_p - \varepsilon < a_q < a_p + \varepsilon.$$
On en déduit, pour tout $p \geq n$:
$$a_p - \varepsilon \leq x \leq a_p + \varepsilon,$$
donc $|x - a_p| < \varepsilon$. Ce qui montre que la suite $(a_n)_n$ converge vers x. □

Exemple 1.4. La suite définie par
$$a_n := \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}$$
est une suite de Cauchy. Si $0 < p < q$,
$$0 < a_q - a_p \leq \frac{1}{p \cdot p!}.$$
Si la suite $(a_n)_n$ convergeait vers un rationnel $\dfrac{m_1}{m_2} \in \mathbb{Q}_+^*$ (avec $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$), on aurait pour $1 < p$,
$$0 < \frac{m_1}{m_2} - a_p \leq \frac{1}{p \cdot p!}$$
(la suite $(a_n)_n$ est strictement croissante). Si $m_2 \leq p$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que
$$\frac{m_1}{m_2} - a_p = \frac{\ell}{p!},$$
donc
$$0 < \ell \leq \frac{1}{p}$$

qui est impossible. On note e la classe de la suite de Cauchy $(a_n)_n$. D'après le lemme 1.4,

$$\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}$ est archimédien :

Proposition 1.11. *Pour tout nombre réel x, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$p > x.$$

Démonstration. Soit $(a_n)_n$ une suite de Cauchy dans la classe x. C'est une suite bornée : il existe $K \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq K.$$

La suite $(K - a_n)_n$ appartient donc à $\mathcal{C}_+$, donc $K - x \geq 0$. Soit $K = q/r$, avec $q, r \in \mathbb{N}^*$, on a $x \leq q$, donc on prendra $p := q + 1$. □

Corollaire. *On a*

(1) *pour tous les nombres réels $x > 0$ et y, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$px > y;$$

(2) *pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que*

$$0 < a < \varepsilon;$$

(3) *pour tous les nombres réels x et ε, avec $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ unique tel que*

$$p\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon;$$

(4) *pour tous les nombres réels x, y, avec $x < y$, il existe $a \in \mathbb{Q}$ tel que*

$$x < a < y.$$

(5) *pour tous les nombres $a, b \in \mathbb{Q}$, avec $a < b$, il existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que*

$$a < z < b.$$

Démonstration. (1) On remplace x par y/x dans la proposition 1.11.

(2) D'après la proposition 1.11, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{\varepsilon} < p.$$

On pose alors $a = 1/p$.

(3) D'après le (1), il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\varepsilon > |x|$. L'ensemble P des entiers p tels que $p\varepsilon \leq x$ est non vide (il contient $-q$) et majoré par $q - 1$. Donc P a un plus grand élément p qui vérifie

$$p\varepsilon \leq x < (p+1)\varepsilon.$$

S'il existe un entier p' tel que

$$p'\varepsilon \leq x < (p'+1)\varepsilon,$$

on a

$$p\varepsilon < (p'+1)\varepsilon \quad \text{et} \quad p'\varepsilon < (p+1)\varepsilon,$$

donc

$$p \leq p' \quad \text{et} \quad p' \leq p,$$

par conséquent $p = p'$, d'où l'unicité.

(4) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q(y - x) > 1$ et $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p \leq xq < p + 1$. Alors

$$x < \frac{p+1}{q} \quad \text{et} \quad qy > qx + 1 \geq p + 1,$$

donc
$$x < \frac{p+1}{q} < y.$$
On choisit $a := (p+1)/q$.

(5) Le réel e appartient à $\mathbb{R}_+^*$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p(b-a) > \mathrm{e}$; alors
$$a < a + \frac{\mathrm{e}}{p} < b.$$
On choisit $z := a + \mathrm{e}/p$. On a $z \notin \mathbb{Q}$, sinon on aurait $\mathrm{e} \in \mathbb{Q}$. □

On en déduit :

Proposition 1.12. *Pour tout nombre réel $0 \leq x < 1$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p_n \in \mathbb{N}$ unique tel que*
$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n+1}{10^n}.$$

À tout réel x on associe donc une suite $p_1, p_2, \ldots$ d'entiers. On a
$$p_{n+1} < 10(p_n+1) \quad \text{et} \quad 10p_n < p_{n+1}+1,$$
donc
$$10p_n \leq p_{n+1} \leq 10p_n + 9.$$
On a $p_1 \leq 10x < 10$, donc $p_1 \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. On a $p_n < 10^n$; si
$$p_n = \sum_{k=1}^{n} d_k 10^{n-k},$$
où $d_1, \ldots, d_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ alors
$$p_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} d_k 10^{n+1-k},$$
avec $d_{n+1} \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. On définit aussi une suite $0, d_1, d_2, \ldots$ d'entiers compris entre 0 et 9, appelée *développement décimal illimité* de x. On note
$$a_n := \frac{p_n}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k} \tag{1.1}$$
C'est la *valeur décimale approchée par défaut d'ordre n* de x. Soit
$$b_n := \frac{p_n+1}{10^n},$$
c'est la *valeur décimale approchée par excès d'ordre n* de x.

Lemme 1.5. *La suite $0, d_1, d_2, \ldots$ contient une infinité de termes $\neq 9$: c'est un* développement propre.

Démonstration. En effet, si l'on suppose
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad d_n = 9,$$
alors, pour $n > n_0$,
$$a_n - a_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{d_k}{10^k} = \frac{9}{10^{n_0+1}} \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{10^{k-n_0-1}} = \frac{9}{10^{n_0+1}} \sum_{j=0}^{n-n_0-1} \frac{1}{10^j}$$
$$= \frac{9}{10^{n_0+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-n_0}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10^{n-n_0}-1}{10^n} = \frac{1}{10^{n_0}} - \frac{1}{10^n}$$

Pour tout $n \geq n_0$

$$a_n + \frac{1}{10^n} = a_{n_0} + \frac{1}{10^{n_0}}.$$

Notons b ce nombre rationnel. Comme

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq x < a_n + \frac{1}{10^n},$$

on a

$$\forall n \geq n_0 \quad b - \frac{1}{10^n} \leq x < b,$$

donc

$$\forall n \geq n_0 \quad 0 < 10^n(b - x) \leq 1. \tag{1.2}$$

Mais, d'après le (1) du corollaire de la proposition 1.11, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p(b - x) > 1$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$10^n(b - x) > 1.$$

ce qui contredit (1.2). □

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des développements décimaux propres : $0, d_1, d_2, \ldots$

Théorème 1.1. *L'application*

$$D : x \in [0, 1[\to 0, d_1, d_2, \ldots \in \mathcal{D}$$

est une bijection. La suite $(a_n)_{n>0}$ définie par (1.1) est une suite de Cauchy dans la classe x.

Démonstration. Soit $0, d_1, d_2, \ldots$ une suite d'entiers de $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ dans $\mathcal{D}$. On note

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k}$$

La suite $(a_n)_n$ est une suite croissante de $\mathbb{Q}_+$. Pour $p < q$ des entiers naturels

$$\begin{aligned} a_q - a_p &= \sum_{k=p+1}^{q} \frac{d_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^{p+1}} \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{10^{k-p-1}} = \frac{9}{10^{p+1}} \sum_{j=0}^{q-p-1} \frac{1}{10^j} \\ &= \frac{9}{10^{p+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^{q-p}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10^{q-p} - 1}{10^q} = \frac{1}{10^p} - \frac{1}{10^q} \leq \frac{1}{10^p}. \end{aligned}$$

Donc la suite $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy : soit x sa classe.

D'après le lemme 1.4, la suite $(a_n)_n$ converge vers x ; on a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ a_n < x.$$

Par hypothèse, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(q_n)_{n>0}$ (non nuls) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_{q_n} \leq 8.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$r \geq q \ \Rightarrow \ 0 \leq x - a_r < \frac{1}{10^{q_n}}.$$

En particulier, il existe $r \geq q_n$ tel que

$$0 \leq x - a_r < \frac{1}{10^{q_n}}.$$

Donc

$$a_{q_n - 1} \leq a_r \leq x$$

et

$$\begin{aligned} x < a_r + \frac{1}{10^{q_n}} &\leq a_{q_n-1} + \frac{d_{q_n}}{10^{q_n}} + \sum_{k=q_n+1}^{r} \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^{q_n}} \\ &\leq a_{q_n-1} + \frac{8}{10^{q_n}} + \sum_{k=q_n+1}^{r} \frac{9}{10^k} + \frac{1}{10^{q_n}} \\ &\leq a_{q_n-1} + \frac{8}{10^{q_n}} + \frac{1}{10^{q_n}} + \frac{1}{10^{q_n}} = a_{q_n-1} + \frac{1}{10^{q_n-1}}. \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$a_{q_n-1} \leq x < a_{q_n-1} + \frac{1}{10^{q_n-1}},$$

ce qui prouve que les premiers termes du développement décimal illimité de x sont : $0, d_1, \ldots, d_{q_n-1}$. Comme cela est vrai pour tout n, on a $D(x) = 0, d_1, d_2, \ldots$ □

Si $x \in \mathbb{R}$, on appelle *partie entière* de x l'unique entier $p_0 \in \mathbb{Z}$ tel que

$$p_0 \leq x < p_0 + 1.$$

On la note

$$E(x) \quad \text{ou} \quad \lfloor x \rfloor.$$

– Le développement décimal illimité de $x \in \mathbb{R}_+$ est : $p_0, d_1, d_2, \ldots$, où $0, d_1, d_2, \ldots$ est le développement décimal illimité de $x - p_0$.
– Le développement décimal illimité de $x \in \mathbb{R}_-$ est : $-p_0, d_1, d_2, \ldots$, où $p_0, d_1, d_2, \ldots$ est le développement décimal illimité de $-x$.

Revenant aux suites de nombres réels, on note :

- $(x_n)_n$ une suite $x_0, x_1, \ldots$ d'éléments de $\mathbb{R}$,
- $(x_n)_{n\geq n_0}$ une suite $x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots$ d'éléments de $\mathbb{R}$.

Définition 1.7. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \leq K.$$

Cela est intéressant si $K \in \mathbb{R}_+^*$; sinon la suite est nulle.

Remarque 1.4. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $K \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad |x_n| \leq K.$$

alors la suite $(x_n)_n$ est *bornée*.

Définition 1.8. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ *converge* vers $x \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n \ \Rightarrow \ |x_p - x| < \varepsilon.$$

Ce nombre x est unique : on note

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Remarque 1.5. Une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite $(x_n - x)_n$ converge vers 0.

Remarque 1.6. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(x_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$, alors la suite $(x_n)_n$ converge aussi vers x.

Définition 1.9. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n, \ q \geq n \ \Rightarrow \ |x_p - x_q| < \varepsilon.$$

Remarque 1.7. Dans les définitions 1.7, 1.8 et 1.9, on peut se limiter à $K \in \mathbb{Q}_+$ ou $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$.

On démontre comme on a démontré la proposition 1.1 :

Proposition 1.13. *On a*

(1) *toute suite convergente est une suite de Cauchy ;*

(2) *toute suite de Cauchy est bornée.*

Théorème 1.2. *Une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que toute suite de Cauchy converge. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{R}$.

(1) Si $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le (4) du corollaire de la proposition 1.11, il existe $a_n \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x_n - \frac{1}{n} < a_n < x_n + \frac{1}{n}.$$

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n,\ q \geq n \ \Rightarrow\ |x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En écrivant

$$|a_p - a_q| \leq |a_p - x_p| + |x_p - x_q| + |x_q - a_q|,$$

on en déduit que si $n' \in \mathbb{N}$ vérifie

$$n' \geq n \quad \text{et} \quad n' > \frac{3}{\varepsilon},$$

on a

$$p \geq n',\ q \geq n' \ \Rightarrow\ |a_p - a_q| < \varepsilon.$$

Donc la suite $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathbb{Q}$: soit $x \in \mathbb{R}$ sa classe.

(2) D'après le lemme 1.4, la suite $(a_n)_n$ converge vers x. Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$: il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n' \ \Rightarrow\ |a_p - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit n'' tel que

$$n'' > \frac{2}{\varepsilon},$$

Si $n := \max(n', n'')$, en utilisant

$$|x_p - x| \leq |x_p - a_p| + |a_p - x|,$$

on obtient,

$$p \geq n \ \Rightarrow\ |x_p - x| < \varepsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(x_n)_n$ converge vers x. □

Proposition 1.14. *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui converge vers x.*

(1) *Si*

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad x_n \leq 0,$$

alors $x \leq 0$.

(2) *Si*

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad x_n \geq 0,$$

alors $x \geq 0$.

DÉMONSTRATION. (1) On suppose $x > 0$. Alors, il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n' \;\Rightarrow\; x - x_n \leq |x - x_n| < \frac{x}{2},$$

donc

$$n \geq n' \;\Rightarrow\; 0 < \frac{x}{2} < x_n,$$

ce qui est exclu : donc $x \leq 0$.

(2) La démonstration est analogue. □

Remarque 1.8. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui converge vers x.

(1) Si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n \leq 0,$$

alors $x \leq 0$.

(2) Si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n \geq 0,$$

alors $x \geq 0$.

Définition 1.10. On appelle *droite numérique achevée* l'ensemble ordonné

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty.$$

On peut prolonger partiellement à $\overline{\mathbb{R}}$ les opérations de $\mathbb{R}$. On a

$$-(-\infty) = +\infty \quad \text{et} \quad -(+\infty) = -\infty.$$

Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$:
– si $x \neq -\infty$ alors $x + (+\infty) = +\infty$;
– si $x \neq +\infty$ alors $x + (-\infty) = -\infty$;
– si $x < 0$, alors $x \times (-\infty) = +\infty$ et $x \times (+\infty) = -\infty$;
– si $x > 0$, alors $x \times (-\infty) = -\infty$ et $x \times (+\infty) = +\infty$.

On ne définit pas :

$$(-\infty) + (+\infty) \quad \text{ou} \quad 0 \times (-\infty) \quad \text{ou} \quad 0 \times (-\infty).$$

Définition 1.11. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ *tend* vers $-\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n \;\Rightarrow\; x_p < -A.$$

Si cette propriété est vérifiée, elle l'est pour tout $A \in \mathbb{R}$. On note

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty.$$

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ *tend* vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n \;\Rightarrow\; x_p > A.$$

Si cette propriété est vérifiée, elle l'est pour tout $A \in \mathbb{R}$. On note

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty.$$

Remarque 1.9. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ tende vers $-\infty$, alors la suite $(x_n)_n$ tend aussi vers $-\infty$; s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ tende vers $+\infty$, alors la suite $(x_n)_n$ tend aussi vers $+\infty$

Proposition 1.15. *(1) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui tend vers $-\infty$. Alors*

$$\exists n_0 \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n < 0$$

et la suite $(1/x_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 0.
(2) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui tend vers $+\infty$. Alors

$$\exists n_0 \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n > 0$$

et la suite $(1/x_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 0.

Démonstration. (1) Comme $(x_n)_n$ tend vers $-\infty$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; x_n < -1 < 0.$$

Par ailleurs, soit $\varepsilon > 0$

$$\exists n' \in \mathbb{N} \quad n \geq n' \;\Rightarrow\; x_n < -\frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow\; -\varepsilon < \frac{1}{x_n}$$

(en multipliant les deux membres par $-\varepsilon/x_n$). Donc, pour $n \geq \max(n_0, n')$,

$$-\varepsilon < \frac{1}{x_n} < 0.$$

Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, cela montre que la suite $(1/x_n)_{n\geq n_0}$ converge vers 0.

L'assertion (2) se démontre de manière analogue. $\square$

Proposition 1.16. *(1) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui converge vers 0 et telle que*

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n < 0.$$

Alors la suite $(1/x_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $-\infty$.
(2) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui converge vers 0 et telle que

$$\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n > 0.$$

Alors la suite $(1/x_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $A > 0$, comme la suite $(x_n)_n$ converge vers 0,

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad p \geq n \;\Rightarrow\; -\frac{1}{A} < x_p < 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_p} < -A$$

(en multipliant les deux membres par $-A/x_p$), ce qui montre que la suite $(1/x_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $-\infty$. $\square$

CHAPITRE 2

Suites réelles

Dans ce chapitre, on étudie les propriétés et la convergence des suites à valeurs réelles.

1. Suites de nombres réels

On démontre comme on a démontré la proposition 1.2 :

Proposition 2.1. *Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers 0 et soit $(y_n)_n$ une suite bornée. Alors la suite $(x_n y_n)_n$ converge vers 0.*

Exemple 2.1. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n := \frac{\sin n}{n}.$$

La suite $(1/n)_{n>0}$ converge vers 0 et la suite $(\sin n)_{n>0}$ est bornée, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Proposition 2.2. *Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers x et $(y_n)_n$ une suite qui converge vers y ; soit $k \in \mathbb{R}$.*

(1) *la suite $(x_n + y_n)_n$ converge vers $x + y$;*
(2) *la suite $(kx_n)_n$ converge vers kx ;*
(3) *la suite $(x_n y_n)_n$ converge vers xy ;*
(4) *la suite $(|x_n|)_n$ converge vers $|x|$.*

Démonstration. Les trois premières propriétés se démontrent comme la proposition 1.4.

(4) On suppose que $(x_n)_n$ converge vers x. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n \;\Rightarrow\; |x_p - x| < \varepsilon.$$

Comme

$$\big||x_p| - |x|\big| \leq |x_p - x|,$$

on a

$$p \geq n \;\Rightarrow\; \big||x_p| - |x|\big| < \varepsilon.$$

Donc la suite $(|x_n|)_n$ converge vers $|x|$. □

Proposition 2.3. *Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ qui convergent ; soit*

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{et} \quad y := \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Si

$$\forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad x_n \leq y_n,$$

alors $x \leq y$.

Démonstration. D'après la proposition 2.2, la suite $(y_n - x_n)_n$ converge vers $y - x$; la proposition 1.14. permet de conclure : $y - x \geq 0$. □

Remarque 2.1. Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ qui convergent ; soit

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{et} \quad y := \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Si

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \ \Rightarrow \ x_n \leq y_n,$$

alors $x \leq y$.

Exemple 2.2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n := 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad y_n := 1 + \frac{1}{n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n < y_n$ et

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 1.$$

On démontre comme on a démontré la proposition 1.5 :

Proposition 2.4. *Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers $x \neq 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \neq 0.$$

De plus la suite $(1/x_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $1/x$.

Définition 2.1. On dit qu'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est
– *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq m,$$

– *majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq M.$$

Remarque 2.2. Toute suite bornée est minorée et majorée ; Toute suite minorée et majorée est bornée.

Proposition 2.5. *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui converge vers un nombre $x < 0$ ou qui tend vers $-\infty$. Il existe alors $M < 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \leq M.$$

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui converge vers un nombre $x > 0$ ou qui tend vers $+\infty$. Il existe alors $m > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \geq m.$$

Démonstration. (1) On suppose :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

où $x < 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow \ x_n - x < -\frac{x}{2}.$$

On choisit donc $M = x/2$.
(2) On suppose :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Soit $M < 0$ quelconque : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \ \Rightarrow \ x_n < -M.$$

C'est le résultat.
Les autres assertions se démontrent de la même manière. □

Proposition 2.6. *Soit $(x_n)_n$ une suite qui tend vers $-\infty$, soit $(y_n)_n$ une suite et soit $k \in \mathbb{R}^*$;*

(1) *si $(y_n)_n$ est majorée, alors $(x_n + y_n)_n$ tend vers $-\infty$;*

(2) *si $k < 0$, alors $(kx_n)_n$ tend vers $+\infty$; si $k > 0$, alors $(kx_n)_n$ tend vers $-\infty$*

(3) *s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $m > 0$ tels que*
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; y_n \geq m,$$
alors $(x_n y_n)_n$ tend vers $-\infty$;

(4) *s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M < 0$ tels que*
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; y_n \leq M,$$
alors $(x_n y_n)_n$ tend vers $+\infty$;

(5) *la suite $(|x_n|)_n$ tend vers $+\infty$.*

Soit $(x_n)_n$ une suite qui tend vers $+\infty$, soit $(y_n)_n$ une suite et soit $k \in \mathbb{R}^*$.

(1) *si $(y_n)_n$ est minorée, alors $(x_n + y_n)_n$ tend vers $+\infty$;*

(2) *si $k < 0$, alors $(kx_n)_n$ tend vers $-\infty$; si $k > 0$, alors $(kx_n)_n$ tend vers $+\infty$*

(3) *s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M < 0$ tels que*
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; y_n \leq M,$$
alors $(x_n y_n)_n$ tend vers $-\infty$;

(4) *s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $m > 0$ tels que*
$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; y_n \geq m,$$
alors $(x_n y_n)_n$ tend vers $+\infty$;

(5) *la suite $(|x_n|)_n$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration. On suppose que la suite $(x_n)_n$ tend vers $-\infty$.

(1) Soit M un majorant de la suite $(y_n)_n$:
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad y_p \leq M.$$
Soit $A > 0$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$p \geq n \;\Rightarrow\; x_p < -A - M.$$
Donc
$$p \geq n \;\Rightarrow\; x_p + y_p < -A.$$
Ce qui montre que la suite $(x_n + y_n)_n$ tend vers $-\infty$.

(2) On suppose que $k < 0$. Soit $A > 0$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$p \geq n \;\Rightarrow\; x_p < \frac{A}{k}.$$
Alors
$$p \geq n \;\Rightarrow\; kx_p > A.$$
Ce qui montre que la suite $(kx_n)_n$ tend vers $+\infty$. On démontre de même que si $k > 0$, alors la suite $(kx_n)_n$ tend vers $-\infty$.

(3) Soit $A > 0$: il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq n_1 \;\Rightarrow\; x_n < -\frac{A}{m}.$$
Donc, si $n' := \max(n_0, n_1)$
$$n \geq n' \;\Rightarrow\; x_n y_n < -\frac{A}{m} y_n \leq -A.$$

Ce qui montre que la suite $(x_ny_n)_n$ tend vers $-\infty$.

(4) Soit $A > 0$: il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_1 \;\Rightarrow\; x_n < \frac{A}{M}.$$

Donc, si $n' := \max(n_0, n_1)$

$$n \geq n' \;\Rightarrow\; x_ny_n > \frac{A}{M}y_n \geq A.$$

Ce qui montre que la suite $(x_ny_n)_n$ tend vers $+\infty$

(5) Soit $A > 0$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n \;\Rightarrow\; x_p < -A.$$

Donc

$$p \geq n \;\Rightarrow\; |x_p| = -x_p > A.$$

Ce qui montre que la suite $(|x_n|)_n$ tend vers $+\infty$

Si l'on suppose que la suite $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$, les démonstrations sont analogues. □

Exemple 2.3. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n := n + (-1)^n \mathrm{arctg} n \quad \text{et} \quad y_n := -(2 + \cos n)n.$$

La suite $(n)_n$ tend vers $+\infty$; la suite $((-1)^n \mathrm{arctg} n)_n$ est bornée, donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

La suite $(-(2+\cos n))_n$ est majorée par -1 ; la suite $(n)_n$ tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty.$$

On déduit de la proposition 2.6 :

Corollaire. *Soit $(x_n)_n$ une suite qui tend vers $-\infty$ et soit $(y_n)_n$ une suite.*

(1) *si $(y_n)_n$ converge vers un réel y ou si $(y_n)_n$ tend vers $-\infty$, alors $(x_n+y_n)_n$ tend vers $-\infty$;*

(2) *si $(y_n)_n$ converge vers un réel $y > 0$ ou si $(y_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(x_ny_n)_n$ tend vers $-\infty$;*

(3) *si $(y_n)_n$ converge vers un réel $y < 0$ ou si $(y_n)_n$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(x_ny_n)_n$ tend vers $+\infty$;*

Soit $(x_n)_n$ une suite qui tend vers $+\infty$ et soit $(y_n)_n$ une suite.

(1) *si $(y_n)_n$ converge vers un réel y ou si $(y_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors $(x_n+y_n)_n$ tend vers $+\infty$;*

(2) *si $(y_n)_n$ converge vers un réel $y < 0$ ou si $(y_n)_n$ tend vers $-\infty$, alors la suite $(x_ny_n)_n$ tend vers $-\infty$;*

(3) *si $(y_n)_n$ converge vers un réel $y > 0$ ou si $(y_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors la suite $(x_ny_n)_n$ tend vers $+\infty$;*

Définition 2.2. Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$.

- On dit que $(y_n)_n$ est *dominée* par $(x_n)_n$ s'il existe une suite $(c_n)_n$ bornée et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad y_n = c_nx_n.$$

On note

$$(y_n)_n = O((x_n)_n).$$

- On dit que $(y_n)_n$ est *négligeable* devant $(x_n)_n$ s'il existe une suite $(c_n)_n$ qui converge vers 0 et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que
$$\forall n \geq n_0 \quad y_n = c_n x_n.$$
On note
$$(y_n)_n = o((x_n)_n).$$
- On dit que $(y_n)_n$ est *équivalente* à $(x_n)_n$ s'il existe une suite $(c_n)_n$ qui converge vers 1 et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que
$$\forall n \geq n_0 \quad y_n = c_n x_n.$$
On note
$$(y_n)_n \sim (x_n)_n$$
(cette relation est symétrique).

Remarque 2.3. Si
$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \neq 0,$$

(1) $(y_n)_n$ est dominée par $(x_n)_n$ si et seulement si la suite $(y_n/x_n)_{n \geq n_0}$ est bornée ;

(2) $(y_n)_n$ est négligeable devant $(x_n)_n$ si et seulement si la suite $(y_n/x_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

(3) $(y_n)_n$ est équivalente à $(x_n)_n$ si et seulement si la suite $(y_n/x_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 1.

Exemple 2.4. (1) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$x_n := n \quad \text{et} \quad y_n := n + 1.$$
Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont équivalentes car
$$\lim_{n \to \infty} (y_n/x_n) = 1.$$
Par ailleurs $\lim\limits_{n \to \infty} (y_n - x_n) = 1$.

(2) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$x_n := \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad y_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}.$$
Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ ne sont pas équivalentes car
$$\lim_{n \to \infty} (y_n/x_n) = +\infty.$$
Par ailleurs $\lim\limits_{n \to \infty} (y_n - x_n) = 0$.

Proposition 2.7. *Soit $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ équivalentes.*

(1) *S'il existe $M \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que*
$$\forall n \geq n_0 \quad x_n < M,$$
alors il existe M' du même signe que M et n' tels que
$$\forall n \geq n' \quad x'_n < M'.$$

(2) *S'il existe $m \in \mathbb{R}$ et n_0 tels que*
$$\forall n \geq n_0 \quad x_n > m,$$
alors il existe m' du même signe que m et $n' \in \mathbb{N}$ tels que
$$\forall n \geq n' \quad x'_n > m'.$$

DÉMONSTRATION. (1) Il existe une suite $(c_n)_n$ qui converge vers 1 et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad x'_n = c_n x_n.$$

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1 \quad \frac{1}{2} < c_n < \frac{3}{2}.$$

Soit donc $n' := \max(n_1, n_0)$

$$\forall n \geq n' \quad x'_n = x_n c_n < M c_n,$$

et

$$M c_n = 0 \text{ si } M = 0,\ M c_n < \frac{M}{2} \text{ si } M < 0,\ M c_n < \frac{3M}{2} \text{ si } M > 0.$$

On pose donc

$$M' := \begin{cases} 0 & \text{si } M = 0 \\ M/2 & \text{si } M < 0 \\ 3M/2 & \text{si } M > 0 \end{cases}$$

Le (2) se démontre de manière analogue. □

Proposition 2.8. *Si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ équivalentes et si $(x_n)_n$ converge vers $x \in \mathbb{R}$, alors $(y_n)_n$ converge vers x.*

Réciproquement, si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ qui convergent vers $x \neq 0$, alors elles sont équivalentes.

DÉMONSTRATION. Le sens direct est une conséquence du (3) de la proposition 2.2. Réciproquement, si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent vers $x \neq 0$, d'après la proposition 2.4, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \neq 0$$

et la suite $(1/x_n)_n$ converge vers $1/x$. D'après la proposition 2.2, la suite $(y_n/x_n)_n$ converge vers 1 : donc les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont équivalentes. □

Exemple 2.5. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n := \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad y_n := \frac{1}{n^2}.$$

Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent vers 0. Elles ne sont pas équivalentes car

$$\lim_{n\to\infty} (y_n/x_n) = 0.$$

Proposition 2.9. *Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ équivalentes ;*

(1) *si $(x_n)_n$ tend vers $-\infty$, alors $(y_n)_n$ tend vers $-\infty$;*

(2) *si $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors $(y_n)_n$ tend vers $+\infty$.*

DÉMONSTRATION. (1) Il existe une suite $(c_n)_n$ qui converge vers 1 et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad y_n = c_n x_n.$$

On conclut avec le (2) du corollaire de la proposition 2.6.

Le (2) se démontre de manière analogue. □

Exemple 2.6. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n := n \quad \text{et} \quad y_n := n^2.$$

Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ tendent vers $+\infty$. Elles ne sont pas équivalentes car

$$\lim_{n\to\infty} (y_n/x_n) = +\infty.$$

Proposition 2.10. *Soit $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ équivalentes ; soit $(y_n)_n$ et $(y'_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ équivalentes.*

(1) *Alors $(x_ny_n)_n$ et $(x'_ny'_n)_n$ sont deux suites équivalentes.*

(2) *Si*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_nx'_n \neq 0,$$

alors $(y_n/x_n)_n$ et $(y'_n/x'_n)_n$ sont deux suites équivalentes.

Démonstration. Le (1) résulte du (3) de la proposition 2.2 ; le (2) résulte du (3) de la proposition 2.2 et de la proposition 2.4. □

Proposition 2.11. *Soient $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ équivalentes ; soient $(y_n)_n$ et $(y'_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ équivalentes.*

(1) *La suite $(x_ny_n)_n$ converge vers z si et seulement si la suite $(x'_ny'_n)_n$ converge vers z ;*

(2) *La suite $(x_ny_n)_n$ tend vers $-\infty$ si et seulement si la suite $(x'_ny'_n)_n$ tend vers $-\infty$;*

(3) *La suite $(x_ny_n)_n$ tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite $(x'_ny'_n)_n$ tend vers $+\infty$;*

- *On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geq n_0 \quad x_nx'_n \neq 0.$$

(4) *La suite $(y_n/x_n)_{n\geq n_0}$ converge vers z si et seulement si la suite des quotients $(y'_n/x'_n)_{n\geq n_0}$ converge vers z.*

(5) *La suite $(y_n/x_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $-\infty$ si et seulement si la suite des quotients $(y'_n/x'_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $-\infty$.*

(6) *La suite $(y_n/x_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite des quotients $(y'_n/x'_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Si $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ sont équivalentes et si $(y_n)_n$ et $(y'_n)_n$ sont équivalentes, alors $(x_ny_n)_n$ et $(x'_ny'_n)_n$ sont équivalentes, d'après la proposition 2.10. Donc l'assertion (1) résulte de la proposition 2.8 ; (2) et (3) résultent de la proposition 2.9.

- On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \neq 0 \quad \text{et} \quad x'_n \neq 0.$$

Si $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ sont équivalentes et si $(y_n)_n$ et $(y'_n)_n$ sont équivalentes, alors $(y_n/x_n)_{n\geq n_0}$ et $(y'_n/x'_n)_{n\geq n_0}$ sont équivalentes, d'après la proposition 2.10. Donc (4) résulte de la proposition 2.8 ; les assertions (5) et (6) résultent de la proposition 2.9. □

Exemple 2.7. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n := n \quad \text{et} \quad x'_n := n + (-1)^n.$$

Les suites $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ sont équivalentes car

$$\lim_{n\to\infty} (x'_n/x_n) = 1.$$

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$y_n := n + \frac{1}{n}.$$

La suite $(x_n - y_n)_n$ converge vers 0 ; la suite $(x'_n - y_n)_n$ ne converge pas : elles ne sont pas équivalentes.

Proposition 2.12. *Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$. Si $(y_n)_n$ est négligeable devant $(x_n)_n$, alors $(x_n + y_n)_n$ et $(x_n)_n$ sont équivalentes.*

Démonstration. S'il existe une suite $(c_n)_n$ qui converge vers 0 et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad y_n = c_n x_n.$$

alors il existe une suite $(d_n)_n$ (où $d_n = 1 + c_n$) qui converge vers 1 et un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n + y_n = d_n x_n.$$

Donc $(x_n + y_n)_n$ et $(x_n)_n$ sont équivalentes. □

Proposition 2.13. *(1) Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}$ qui convergent vers z et soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui vérifie, pour $n_0 \in \mathbb{N}$:*

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \leq z_n \leq y_n.$$

Alors la suite $(z_n)_n$ converge vers z.

(2) Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui tend vers $+\infty$ et soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui vérifie, pour $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \leq z_n.$$

Alors la suite $(z_n)_n$ tend vers $+\infty$.

(3) Soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui tend vers $-\infty$ et soit $(z_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui vérifie, pour $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq n_0 \quad z_n \leq y_n.$$

Alors la suite $(z_n)_n$ tend vers $-\infty$.

Démonstration. (1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n' \;\Rightarrow\; -\varepsilon < x_p - z.$$

De même, il existe $n'' \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n'' \;\Rightarrow\; y_p - z < \varepsilon.$$

Donc, si $n := \max(n_0, n', n'')$, on a

$$p \geq n \;\Rightarrow\; -\varepsilon < x_p - z \leq z_p - z \leq y_p - z < \varepsilon.$$

Donc la suite $(z_n)_n$ converge vers z.

(2) Soit $A > 0$. Il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que

$$p \geq n' \;\Rightarrow\; A < x_p.$$

Donc, si $n := \max(n_0, n')$, on a

$$p \geq n \;\Rightarrow\; A < x_p \leq z_p.$$

Donc la suite $(z_n)_n$ tend vers $+\infty$.

(3) se démontre comme (2). □

Exemple 2.8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$x_n := \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

On a, si $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

donc

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Les suites $(y_n)_{n>0}$ et $(z_n)_{n>0}$ définies par :

$$y_n := \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \quad \text{et} \quad z_n := \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

convergent toutes les deux vers 1. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Corollaire. *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ qui converge vers 0 et soit $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ qui vérifie, pour $n_0 \in \mathbb{N}$:*

$$\forall n \geq n_0 \quad |y_n| \leq x_n.$$

Alors la suite $(y_n)_n$ converge vers 0.

Démonstration. On a

$$\forall n \geq n_0 \quad -x_n \leq y_n \leq x_n.$$

Comme les suites $(-x_n)_n$ et $(x_n)_n$ convergent vers 0, on utilise alors le (1) de la proposition 2.13 pour conclure. □

Définition 2.3. On dit que deux sous-ensembles X et Y de $\mathbb{R}$ sont *adjacents* si

(1) pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, on a $x \leq y$;

(2) pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $0 \leq y - x < \varepsilon$.

Proposition 2.14. *Si X et Y sont deux sous-ensembles adjacents de $\mathbb{R}$, il existe un seul nombre réel z tel que*

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \quad x \leq z \leq y.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in X$ et $y_n \in Y$ tels que

$$0 \leq y_n - x_n < \frac{1}{n}.$$

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. On a

$$y_p - x_p < \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad x_q \leq y_p,$$

donc

$$x_q - x_p < \frac{1}{p}.$$

De même, on a

$$y_q - x_q < \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad x_p \leq y_q,$$

donc

$$x_p - x_q < \frac{1}{q}.$$

Cela donne

$$|x_p - x_q| < \max\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right).$$

On en déduit facilement que $(x_n)_{n>0}$ est une suite de Cauchy, donc qu'elle converge. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leq y_n < x_n + \frac{1}{n},$$

on déduit de la proposition 2.13 que la suite $(y_n)_{n>0}$ converge et que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

que l'on note z. Soit $x \in X$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x \leq y_n$, donc $x \leq z$. Soit $y \in Y$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \leq y$, donc $z \leq y$. Finalement

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \quad x \leq z \leq y.$$

Enfin si $z' \in \mathbb{R}$ vérifie

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \quad x \leq z' \leq y.$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \leq z' \leq y_n,$$

donc

$$z \leq z' \leq z.$$

Cela montre que z est unique. □

On appelle *intervalles bornés* de $\mathbb{R}$ des ensembles

$$[x, y] := \{z \in \mathbb{R} : x \leq z \leq y\} \quad]x, y] := \{z \in \mathbb{R} : x < z \leq y\}$$
$$[x, y[:= \{z \in \mathbb{R} : x \leq z < y\} \quad]x, y[:= \{z \in \mathbb{R} : x < z < y\}.$$

où $x \leq y$. Le nombre $y - x$ est la *longueur* des intervalles $[x, y]$, $]x, y]$, $[x, y[$ et $]x, y[$. On appelle *intervalles non bornés* de $\mathbb{R}$ des ensembles $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ et

$$]-\infty, y] := \{z \in \mathbb{R} : z \leq y\} \quad]-\infty, y[:= \{z \in \mathbb{R} : z < y\}$$
$$[x, +\infty[:= \{z \in \mathbb{R} : x \leq z\} \quad]x, +\infty[:= \{z \in \mathbb{R} : x < z\}.$$

Définition 2.4. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Elle est
– *croissante* si pour tous les entiers $m \leq n$ on a $x_m \leq x_n$,
– *strictement croissante* si pour tous les entiers $m < n$ on a $x_m < x_n$,
– *décroissante* si pour tous les entiers $m \leq n$ on a $x_m \geq x_n$,
– *strictement croissante* si pour tous les entiers $m < n$ on a $x_m > x_n$,
– *monotone* si elle est croissante ou décroissante,
– *strictement monotone* si si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque 2.4. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Elle est
– croissante si et seulement si pour tout entier n on a $x_n \leq x_{n+1}$,
– strictement croissante si et seulement si pour tout entier n on a $x_n < x_{n+1}$,
– décroissante si et seulement si pour tout entier n on a $x_n \geq x_{n+1}$,
– strictement décroissante si et seulement si pour tout entier n on a $x_n > x_{n+1}$.

Définition 2.5. On dit que deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ sont *adjacentes* si

(1) la suite $(x_n)_n$ est croissante,
(2) la suite $(y_n)_n$ est décroissante,
(3) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \leq y_n$;
(4) $\lim_{n \to \infty} (y_n - x_n) = 0$.

Proposition 2.15. *Soit $(I_n)_n$ (où $I_n := [x_n, y_n]$) une suite décroissante d'intervalles de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}\ I_{n+1} \subset I_n$), dont la longueur converge vers 0. Il existe un seul nombre réel z commun à tous les I_n ; c'est la limite commune des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$.*

Démonstration. Soit

$$X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad Y := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si n, p sont deux entiers, on a

$$x_n \leq x_{\max(n,p)} \leq y_{\max(n,p)} \leq y_p.$$

De plus soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(y_n - x_n)_n$ converge vers 0, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$0 \leq y_n - x_n < \varepsilon.$$

Donc les ensembles X et Y sont adjacents.

D'après la proposition 2.14, il existe $z \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq z \leq y_n.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z \in I_n.$$

Comme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq z - x_n \leq y_n - x_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0,$$

on a $\lim_{n\to\infty}(z - x_n) = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} x_n = z$. De même, comme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq y_n - z \leq y_n - x_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0,$$

on a $\lim_{n\to\infty}(y_n - z) = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} y_n = z$.

Si

$$z' \in \bigcap_{n\geq 0} I_n,$$

on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq z' \leq y_n,$$

donc $z \leq z' \leq z$. Cela montre que z est unique. □

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire. *Si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites adjacentes d'éléments de $\mathbb{R}$, alors elles convergent vers un nombre réel z.*

Exemple 2.9. Soit $x_0 < y_0$ deux réels ; on définit deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par

$$x_{n+1} := \frac{1}{3}(2x_n + y_n) \quad \text{et} \quad y_{n+1} := \frac{1}{3}(x_n + 2y_n).$$

On a

$$x_n < y_n \;\Rightarrow\; x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$$

et

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{3}(y_n - x_n).$$

Les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont donc adjacentes : elles convergent vers un nombre z. La suite $((x_n + y_n)/2)_n$ converge alors également vers z. Comme

$$\frac{1}{2}(x_{n+1} + y_{n+1}) = \frac{1}{2}(x_n + y_n),$$

on a $z = (x_0 + y_0)/2$.

Définition 2.6. On appelle *coupure* une partition [1] de $\mathbb{R}$ en deux sous-ensembles X et Y, tels que

$$\forall x \in X \; \forall y \in Y \quad x < y.$$

Proposition 2.16. *Si X et Y forment une coupure de $\mathbb{R}$, il existe un seul nombre réel z tel que*

$$\forall x \in X \; \forall y \in Y \quad x \leq z \leq y.$$

Ce nombre est dit défini *par la coupure.*

---

1. Une partition de $\mathbb{R}$ est un couple (X, Y) de deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que $X \cup Y = \mathbb{R}$ et $X \cap Y = \emptyset$.

Démonstration. Si $x \in X$ et $x' \leq x$, alors $x' \in X$: en effet, si $x' \notin X$, alors $x' \in Y$, donc $x < x'$, ce qui est impossible. De même, si $y \in Y$ et $y \leq y'$, alors $y' \in Y$: en effet, si $y' \notin Y$, alors $y' \in X$, donc $y' < y$, ce qui est impossible.

Soit $x_0 \in X$ et soit $y_0 \in Y$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. D'après le corollaire de la proposition 1.11, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p\varepsilon' > -x_0$, donc $-p\varepsilon' < x_0$. On a donc $-p\varepsilon' \in X$. De même, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q\varepsilon' > y_0$, donc $q\varepsilon' \in Y$.

L'ensemble

$$\{n \in \mathbb{Z} : n\varepsilon' \in X\}$$

contient $-p$ et est majoré par q : soit n_0 son plus grand élément. En choisissant $x := n_0\varepsilon'$ et $y := (n_0 + 1)\varepsilon'$, on a

$$x \in X \quad y \in Y \quad \text{et} \quad 0 \leq y - x = \varepsilon' < \varepsilon.$$

Cela prouve que les ensembles X et Y sont adjacents : on utilise alors la proposition 2.14. □

Définition 2.7. Un sous ensemble E de $\mathbb{R}$ est

– *minoré* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in E \quad x \geq m.$$

Un tel m est appelé un *minorant* de E.

– *majoré* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in E \quad x \leq M,$$

Un tel M est appelé un *majorant* de E.

– *borné* s'il est minoré et majoré.

Définition 2.8. (1) Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$ minoré. Si l'ensemble de ses minorants a un plus grand élément, on appelle celui-ci la *borne inférieure* de E ; on le note $\inf E$. Il peut ou non appartenir à E.

(2) Soit E un sous ensemble de $\mathbb{R}$ majoré. Si l'ensemble de ses majorants a un plus petit élément, on appelle celui-ci la *borne supérieure* de E ; on le note $\sup E$. Il peut ou non appartenir à E.

Remarque 2.5. La borne inférieure de E, si elle existe, est unique ; la borne supérieure de E, si elle existe, est unique.

Exemple 2.10. Soit

$$E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{2n+1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} \right].$$

On a, si $1 \leq k \leq n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n+1} < \frac{2n+1}{2n(n+1)} < \frac{1}{n}.$$

L'ensemble E est minoré par -1, majoré par 2. Le nombre 0 est la borne inférieure de E, il n'appartient pas à E ; Le nombre 1 est la borne supérieure de E, il appartient à E.

Théorème 2.1. *Toute partie E de $\mathbb{R}$ non vide et minorée a une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. Toute partie E de $\mathbb{R}$ non vide et majorée a une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. (1) Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide et minoré. On note X l'ensemble (non vide) de ses minorants et Y son complémentaire : comme $E \neq \emptyset$, alors $Y \neq \emptyset$. Pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, on a $x < y$. Donc (X, Y) est une coupure de $\mathbb{R}$. D'après la proposition 2.16, il existe un réel z tel que

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y \quad x \leq z \leq y.$$

Le nombre z est un minorant de E. Sinon, il existerait $e \in E$ tel que $e < z$. Il existerait alors un réel y tel que $e < y < z$. Comme $e < y$, on a $y \notin X$, donc $y \in Y$; mais alors $z \leq y$: c'est impossible.

Si x est un minorant de E, alors $x \in X$ donc $x \leq z$. Donc z est le plus grand des minorants de E : c'est la borne inférieure de E.

(2) On démontre de la même manière que si $E \subset \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors E a une borne supérieure. □

Remarque 2.6. On en déduit évidemment : toute partie E de $\overline{\mathbb{R}}$ non vide a une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ et a une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2.17. *Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

(1) *Si E est minoré, le nombre $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de E si et seulement si*

$$\begin{cases} \text{(a) pour tout } x \in E \text{ on a } x \geq m\,; \\ \text{(b) pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

(2) *Si E est majoré, le nombre $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de E si et seulement si*

$$\begin{cases} \text{(a) pour tout } x \in E \text{ on a } x \leq M\,; \\ \text{(b) pour tout } \varepsilon > 0 \text{ il existe } x \in E \text{ tel que } x > M - \varepsilon. \end{cases}$$

Démonstration. (1) La condition (a) exprime que m est un minorant ; la condition (b) exprime que, si $m'(= m + \varepsilon) > m$, le nombre m' n'est pas un minorant.

(2) se démontre de manière analogue. □

Remarque 2.7. Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.

(1) Si E est minoré et si le nombre $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de E, alors il existe une suite $(x_n)_n \subset E$ décroissante, qui converge vers m. En effet il existe $x_1 \in E$ tel que

$$m \leq x_1 < m + 1.$$

On suppose que l'on a pu construire $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, avec

$$\forall j : 1 \leq j \leq n \quad m \leq x_j < m + \frac{1}{j}.$$

Si $x_n = m$, on pose $x_{n+1} := m$. Sinon, soit $x_{n+1} \in E$ tel que

$$x_{n+1} < m + \inf\left(x_n - m, \frac{1}{n+1}\right).$$

Alors

$$m \leq x_{n+1} \leq x_n \quad \text{et} \quad x_{n+1} < m + \frac{1}{n+1}.$$

La suite $(x_n)_n$ ainsi construite convient.

(2) De même, si E est majoré et si le nombre $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de E, alors il existe une suite $(x_n)_n \subset E$ croissante, qui converge vers M.

Théorème 2.2. *On a :*

(1) *toute suite $(x_n)_n$ décroissante et minorée converge vers un nombre de $\mathbb{R}$;*

(2) *toute suite $(x_n)_n$ décroissante non minorée tend vers $-\infty$;*

(3) *toute suite $(x_n)_n$ croissante et majorée converge vers un nombre de $\mathbb{R}$;*

(4) *toute suite $(x_n)_n$ croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

Démonstration. (1) Si la suite $(x_n)_n$ est minorée, l'ensemble (non vide)

$$X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

est minoré. D'après le théorème 2.1, il a une borne inférieure m. Soit $\varepsilon > 0$; d'après la proposition 2.17, on a

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq m, \\ \exists n \in \mathbb{N} \quad x_n < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Donc, comme la suite $(x_n)_n$ est décroissante,

$$p \geq n \;\Rightarrow\; m \leq x_p \leq x_n < m + \varepsilon.$$

Cela montre que la suite $(x_n)_n$ converge vers m.

(2) On suppose que la suite $(x_n)_n$ n'est pas minorée. Soit $A > 0$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n < -A$. Donc, comme la suite $(x_n)_n$ est décroissante,

$$p \geq n \;\Rightarrow\; x_p \leq x_n < -A.$$

Cela montre que la suite $(x_n)_n$ tend vers $-\infty$.

(3) et (4) se démontrent de manière analogue. □

Exemple 2.11 (Constante d'Euler)**.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$x_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \operatorname{Ln} n.$$

On a, si $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq x \leq k+1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

donc

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx, \tag{2.1}$$

donc

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant la somme de $k = 1$ à $k = n-1$, on obtient :

$$\operatorname{Ln} n = \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

ce qui prouve que $x_n > 0$. Par ailleurs (2.1) implique aussi (en faisant $k = n-1$) :

$$\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} dx = \operatorname{Ln} n - \operatorname{Ln}(n-1),$$

ce qui prouve que $x_n - x_{n-1} \leq 0$. Donc la suite $(x_n)_n$ est à termes positifs et décroissante. D'après le théorème 2.2, elle converge. Sa limite est la *constante d'Euler* $\gamma = 0,577\,215\,664\ldots$

Définition 2.9. On appelle *sous-suite* ou *suite extraite* d'une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ une suite $(x_{p_n})_n$, où $(p_n)_n$ est une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}$.

On a évidemment :

Proposition 2.18. *Toute sous-suite*
- *d'une suite minorée est minorée ;*
- *d'une suite majorée est majorée ;*
- *d'une suite bornée est bornée ;*
- *d'une suite croissante est croissante ;*
- *d'une suite strictement croissante est strictement croissante ;*
- *d'une suite décroissante est décroissante ;*
- *d'une suite strictement décroissante est strictement décroissante ;*

– *d'une suite de Cauchy est une suite de Cauchy ;*
– *d'une suite qui converge vers $x \in \mathbb{R}$ converge vers $x \in \mathbb{R}$;*
– *d'une suite qui tend vers $-\infty$ tend vers $-\infty$;*
– *d'une suite qui tend vers $+\infty$ tend vers $+\infty$.*

Remarque 2.8. Soit $(x_n)_n$ une suite de nombres réels. S'il existe deux sous-suites : $(x_{p_n})_n$ qui converge vers x et $(x_{q_n})_n$ qui converge vers $x' \neq x$, alors la suite $(x_n)_n$ ne converge pas.

Exemple 2.12. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$x_n := \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right).$$
On note pour $n \in \mathbb{N}$,
$$p_n := 10n \quad \text{et} \quad q_n := 10n + 1.$$
Alors
$$x_{p_n} = \sin(2n\pi) = 0 \quad \text{et} \quad x_{q_n} = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \neq 0.$$
Donc la suite $(x_n)_n$ ne converge pas.

Définition 2.10. On dit que le réel x est *valeur d'adhérence* de la suite $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers n tels que
$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Exemple 2.13. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$x_n := (-1)^n + \frac{1}{n}.$$
Les nombres -1 et 1 sont deux valeurs d'adhérence de la suite $(x_n)_n$.

Définition 2.11. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. On dit que $-\infty$ est *valeur d'adhérence* de $(x_n)_n$ si cette suite n'est pas minorée ; on dit que $+\infty$ est *valeur d'adhérence* de $(x_n)_n$ si cette suite n'est pas majorée.

Proposition 2.19. *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$.*

(1) *Un réel $x \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et seulement s'il existe une sous-suite $(x_{p_n})_n$ qui converge vers x.*

(2) *La valeur $-\infty$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et seulement s'il existe une sous-suite $(x_{p_n})_n$ qui tend vers $-\infty$.*

(3) *La valeur $+\infty$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si et seulement s'il existe une sous-suite $(x_{p_n})_n$ qui tend vers $+\infty$*

Démonstration. (1) On suppose que x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$. Il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$|x_{p_1} - x| < 1.$$
Soit $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que
$$\forall j \ 1 \leq j < n \quad |x_{p_j} - x| < \frac{1}{j}.$$
Il existe $p_n > p_{n-1}$ tel que
$$|x_{p_n} - x| < \frac{1}{n}.$$
Alors la suite $(x_{p_n})_n$ converge vers x.

Réciproquement, on suppose qu'il existe une sous-suite $(x_{p_n})_n$ de $(x_n)_n$ qui converge vers x. Soit $\varepsilon > 0$: il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geq q \Rightarrow \ |x_{p_n} - x| < \varepsilon.$$

Cela montre que x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$.

(2) On suppose que $-\infty$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$. Il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$x_{p_1} < -1.$$

Soit $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que

$$\forall j \ 1 \leq j < n \quad x_{p_j} < -j.$$

Il existe $p_n > p_{n-1}$ tel que

$$x_{p_n} < -n$$

(sinon la suite $(x_k)_{k>p_{n-1}}$ serait minorée par $-n$). Alors la suite $(x_{p_n})_n$ tend vers $-\infty$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe une sous-suite $(x_{p_n})_n$ de $(x_n)_n$ qui tend vers $-\infty$. Soit $A > 0$: il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq q \Rightarrow \ x_{p_n} < -A.$$

Cela montre que $-\infty$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$.

(3) se démontre comme (2). □

Théorème 2.3 (Bolzano-Weierstraß)**.** *De toute suite bornée $(x_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}$ on peut extraire une sous-suite $(x_{p_n})_n$ qui converge vers un nombre réel.*

Démonstration. Il existe $m \leq M$ deux réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq x_n \leq M.$$

On peut supposer $m < M$ (sinon, la suite serait constante). Soit

$$y_0 := m, \ z_0 := M \quad \text{et} \quad I_0 := [y_0, z_0].$$

On construit alors une suite d'intervalles $I_n = [y_n, z_n]$ de la manière suivante : Si $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1}$ sont construits, on définit I_n par

$$I_n := \begin{cases} \left[y_{n-1}, \dfrac{y_{n-1}+z_{n-1}}{2}\right] & \text{s'il existe une infinité de valeurs de } p \text{ telles que} \\ & x_p \in \left[y_{n-1}, \dfrac{y_{n-1}+z_{n-1}}{2}\right], \\ \left[\dfrac{y_{n-1}+z_{n-1}}{2}, z_{n-1}\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\forall n \geq 1 \quad z_n - y_n = \frac{1}{2}(z_{n-1} - y_{n-1}),$$

donc

$$\forall n \geq 1 \quad z_n - y_n = \frac{M-m}{2^n}.$$

Par conséquent $(I_n)_n$ est une suite décroissante d'intervalles dont la longueur converge vers 0. D'après la proposition 2.15, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x \in I_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$: il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M - m < 2^n \varepsilon$. On a $x \in I_n$ et il existe une infinité de valeurs de p telles que $x_p \in I_n$, donc il existe une infinité de valeurs de p telles que

$$|x_p - x| \leq \frac{M-m}{2^n} < \varepsilon.$$

Cela montre que x est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$: on obtient le résultat grâce à la caractérisation de la proposition 2.19. □

Remarque 2.9. Si la suite $(x_n)_n$ est contenue dans l'intervalle $[a, b]$, toute valeur d'adhérence appartient à cet intervalle.

Exemple 2.14. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$x_n := \cos n$$

La suite $(x_n)_n$ est bornée : elle a donc une valeur d'adhérence dans $[-1, +1]$.

(1) Si l'on suppose qu'elle converge vers une limite ℓ, comme

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2(\cos n)(\cos 1)$$

et $\cos 1 \neq 1$, on a nécessairement $\ell = 0$, soit $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$. Comme

$$\cos(n+1) - \cos(n-1) = -2(\sin n)(\sin 1)$$

et $\sin 1 \neq 0$, on a nécessairement $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$. Cela est impossible car

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \cos^2 n + \sin^2 n = 1.$$

(2) En fait tout réel de $[-1, +1]$ est valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$.

CHAPITRE 3

Fonctions réelles d'une variable réelle

1. Limites

Dans ce chapitre, on étudie les limites éventuelles des fonctions d'une variable réelle, en un point ou en $-\infty$ ou en $+\infty$.

Définition 3.1. Soit $E \subset \mathbb{R}$, non vide.

(1) On dit qu'un réel a est *adhérent* à E si pour tout $\eta > 0$, l'intervalle ouvert $]a-\eta, a+\eta[$ contient un élément de E.

(2) On dit que $-\infty$ est *adhérent* à E si E n'est pas minoré.

(3) On dit que $+\infty$ est *adhérent* à E si E n'est pas majoré.

Remarque 3.1. Tout point de E est adhérent à E ; il peut exister des points adhérents à E qui n'appartiennent pas à E. Par exemple 0 et 1 sont adhérents à $]0,1[$, sans appartenir à cet intervalle.

Définition 3.2. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles.

(1) Soit a un nombre réel adhérent à E.

(a) On dit que f admet un réel b comme *limite* au point a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |x-a| < \eta \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(b) On dit que f admet $-\infty$ comme *limite* au point a si

$$\forall K > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |x-a| < \eta \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; f(x) < -K.$$

(c) On dit que f admet $+\infty$ comme *limite* au point a si

$$\forall K > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |x-a| < \eta \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; f(x) > K.$$

(2) On suppose que $-\infty$ est adhérent à E.

(a) On dit que f admet un réel b comme *limite* en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad x < -A \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(b) On dit que f admet $-\infty$ comme *limite* en $-\infty$ si

$$\forall K > 0 \quad \exists A > 0 \quad x < -A \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; f(x) < -K.$$

(c) On dit que f admet $+\infty$ comme *limite* en $-\infty$ si

$$\forall K > 0 \quad \exists A > 0 \quad x < -A \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; f(x) > K.$$

(3) On suppose que $+\infty$ est adhérent à E.

(a) On dit que f admet un réel b comme *limite* en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad x > A \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(b) On dit que f admet $-\infty$ comme *limite* en $+\infty$ si

$$\forall K > 0 \quad \exists A > 0 \quad x > A \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; f(x) < -K.$$

(c) On dit que f admet $+\infty$ comme *limite* en $+\infty$ si

$$\forall K > 0 \quad \exists A > 0 \quad x > A \text{ et } x \in E \ \Rightarrow \ f(x) > K.$$

Remarque 3.2. Si $a \in E$ et si f admet un réel b comme limite au point a,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(a) - b| < \varepsilon.$$

donc $b = f(a)$: on dit que f est *continue* au point a.

Proposition 3.1. *Il existe au plus une limite d'une fonction en un point ou en $-\infty$ ou $+\infty$.*

Démonstration. On fait la démonstration pour des limites finies, en un point $a \in \mathbb{R}$. Si b_1, b_2 sont deux limites distinctes, alors

$$\exists \eta_1 > 0 \quad |x - a| < \eta_1 \text{ et } x \in E \ \Rightarrow \ |f(x) - b_1| < \frac{|b_1 - b_2|}{2},$$
$$\exists \eta_2 > 0 \quad |x - a| < \eta_2 \text{ et } x \in E \ \Rightarrow \ |f(x) - b_2| < \frac{|b_1 - b_2|}{2}.$$

Donc, si $\eta := \min(\eta_1, \eta_2)$ on a pour $|x - a| < \eta$ et $x \in E$:

$$|b_1 - b_2| \leq |b_1 - f(x)| + |f(x) - b_2| < |b_1 - b_2|,$$

ce qui est impossible : donc il y a au plus une limite au point a. □

Si la limite existe, on la note

$$\lim_{x \to a, x \in E} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty, x \in E} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty, x \in E} f(x).$$

Si E est l'ensemble de définition de f, on note la limite

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Exemple 3.1. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \to c$. On a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c,$$
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to a} f(x) = c,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = c.$$

La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.2. Soit $f : x \in \mathbb{R} \to x \in \mathbb{R}$. On a

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to a} f(x) = a,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.3. Soit

$$f : x \in \mathbb{R}^* \to \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*.$$

On a

- $\lim_{x \to 0, x < 0} f(x) = -\infty$: soit $K > 0$; il existe $\eta = 1/K$ tel que

$$-\eta < x < 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{x} < -K.$$

- $\lim_{x \to 0, x > 0} f(x) = +\infty$: soit $K > 0$; il existe $\eta = 1/K$ tel que
$$0 < x < \eta \ \Rightarrow \ \frac{1}{x} > K.$$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$: soit $\varepsilon > 0$; il existe $A = 1/\varepsilon$ tel que
$$x < -A \ \Rightarrow \ -\varepsilon < \frac{1}{x} < 0.$$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$: soit $\varepsilon > 0$; il existe $A = 1/\varepsilon$ tel que
$$x > A \ \Rightarrow \ 0 < \frac{1}{x} < \varepsilon.$$

Proposition 3.2. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles.*

(1) *Soit a un nombre réel adhérent à E ; on suppose que $\lim_{x \to a, x \in E} f(x) = b$.*

(a) *Il existe $\alpha > 0$ et il existe $K > 0$ tels que*
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap E \quad |f(x)| \leq K.$$
(b) *Si $b > m$, il existe $\alpha > 0$ tel que*
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap E \quad f(x) > m.$$
(c) *Si $b < M$, il existe $\alpha > 0$ tel que*
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap E \quad f(x) < M.$$
(d) *Si $b \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ et il existe $m > 0$ tels que*
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap E \quad |f(x)| > m.$$

(2) *On suppose que $-\infty$ est adhérent à E et que $\lim_{x \to -\infty, x \in E} f(x) = b$.*

(a) *Il existe $A > 0$ et il existe $K > 0$ tels que*
$$\forall x \in]-\infty, -A[\cap E \quad |f(x)| \leq K.$$
(b) *Si $b > m$, il existe $A > 0$ tel que*
$$\forall x \in]-\infty, -A[\cap E \quad f(x) > m.$$
(c) *Si $b < M$, il existe $A > 0$ tel que*
$$\forall x \in]-\infty, -A[\cap E \quad f(x) < M.$$
(d) *Si $b \neq 0$, il existe $A > 0$ et il existe $m > 0$ tels que*
$$\forall x \in]-\infty, -A[\cap E \quad |f(x)| > m.$$

(3) *On suppose que $+\infty$ est adhérent à E et que $\lim_{x \to +\infty, x \in E} f(x) = b$.*

(a) *Il existe $A > 0$ et il existe $K > 0$ tels que*
$$\forall x \in]A, +\infty[\cap E \quad |f(x)| \leq K.$$
(b) *Si $b > m$, il existe $A > 0$ tel que*
$$\forall x \in]A, +\infty[\cap E \quad f(x) > m.$$
(c) *Si $b < M$, il existe $A > 0$ tel que*
$$\forall x \in]A, +\infty[\cap E \quad f(x) < M.$$

(d) *Si $b \neq 0$, il existe $A > 0$ et il existe $m > 0$ tels que*

$$\forall x \in]A, +\infty[\cap E \quad |f(x)| > m.$$

DÉMONSTRATION. (1) (a) On a

$$\exists \eta > 0 \quad x \in E\cap]a-\eta, a+\eta[\Rightarrow |f(x) - b| < 1$$

et

$$|f(x) - b| < 1 \Rightarrow -|b| - 1 < f(x) < |b| + 1$$

on choisit donc $\alpha = \eta$ et $K = |b| + 1$. □

Définition 3.3. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles.

(1) Soit a un nombre réel adhérent à $\{x \in E : x < a\}$.

(a) On dit que f admet un réel b comme *limite à gauche* au point a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad a - \eta < x < a \text{ et } x \in E \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(b) On dit que f admet $-\infty$ comme *limite à gauche* au point a si

$$\forall K > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad a - \eta < x < a \text{ et } x \in E \Rightarrow f(x) < -K.$$

(c) On dit que f admet $+\infty$ comme *limite à gauche* au point a si

$$\forall K > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad a - \eta < x < a \text{ et } x \in E \Rightarrow f(x) > K.$$

(2) Soit a un nombre réel adhérent à $\{x \in E : x > a\}$.

(a) On dit que f admet un réel b comme *limite à droite* au point a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad a < x < a + \eta \text{ et } x \in E \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(b) On dit que f admet $-\infty$ comme *limite à droite* au point a si

$$\forall K > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad a < x < a + \eta \text{ et } x \in E \Rightarrow f(x) < -K.$$

(c) On dit que f admet $+\infty$ comme *limite à droite* au point a si

$$\forall K > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad a < x < a + \eta \text{ et } x \in E \Rightarrow f(x) > K.$$

Proposition 3.3. *Soient $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles ; soit a un nombre réel adhérent à $\{x \in E : x < a\}$ et à $\{x \in E : x > a\}$.*

(1)
- *Si $a \notin E$, la fonction f admet un réel b comme limite au point a si et seulement si b est limite à gauche et limite à droite de f au point a.*
- *Si $a \in E$, la fonction f admet un réel b comme limite au point a si et seulement si $b = f(a)$ et b est limite à gauche et limite à droite de f au point a.*

(2) *La fonction f admet $-\infty$ comme limite au point a si et seulement si $-\infty$ est limite à gauche et limite à droite de f au point a.*

(3) *La fonction f admet $+\infty$ comme limite au point a si et seulement si $+\infty$ est limite à gauche et limite à droite de f au point a.*

DÉMONSTRATION. (1) (a) On suppose $a \notin E$.
Si f admet b comme limite au point a, soit $\varepsilon > 0$:

$$\exists \eta > 0 \quad x \in E\cap]a-\eta, a+\eta[\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

donc

$$x \in E\cap]a-\eta, a[\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{et} \quad x \in E\cap]a, a+\eta[\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Par conséquent b est limite à gauche et limite à droite de f au point a. Réciproquement, si b est limite à gauche et limite à droite de f au point a, soit $\varepsilon > 0$:

$$\exists \eta_g > 0 \quad x \in E \cap]a - \eta_g, a[\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$
$$\exists \eta_d > 0 \quad x \in E \cap]a, a + \eta_d[\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

donc, en notant $\eta := \min(\eta_g, \eta_d)$,

$$x \in E \cap]a - \eta, a + \eta[\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

(1) (b) On suppose $a \in E$. Le sens direct se démontre de manière identique. La réciproque est vraie si $f(a) = b$. □

Proposition 3.4. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles.*

(1) *Soit a un nombre réel adhérent à E.*
   (a) *f admet un réel b comme limite au point a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers b,*
   (b) *f admet $-\infty$ comme limite au point a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $-\infty$,*
   (c) *f admet $+\infty$ comme limite au point a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $+\infty$.*

(2) *On suppose que $-\infty$ est adhérent à E.*
   (a) *f admet un réel b comme limite en $-\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui tend vers $-\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers b,*
   (b) *f admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui tend vers $-\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $-\infty$,*
   (c) *f admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui tend vers $-\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $+\infty$.*

(3) *On suppose que $+\infty$ est adhérent à E.*
   (a) *f admet un réel b comme limite en $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui tend vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers b,*
   (b) *f admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui tend vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $-\infty$,*
   (c) *f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui tend vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $+\infty$.*

Démonstration. On fait la démonstration pour une limite $b \in \mathbb{R}$, en un point $a \in \mathbb{R}$.
(i) On suppose :

$$\lim_{x \to a, x \in E} f(x) = b.$$

Soit $(x_n)_n$ une suite de points de E qui converge vers a. On considère la suite de points $(f(x_n))_n$. Soit $\varepsilon > 0$: il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - a| < \eta \text{ et } x \in E \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \eta.$$

Par conséquent

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - b| < \varepsilon.$$

Donc la suite $(f(x_n))_n$ converge vers b.

(ii) On suppose que f n'admet pas b comme limite au point a :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x \in E \ : \ |x-a| < \eta \text{ et } |f(x)-b| \geq \varepsilon.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists x_n \in E \ : \ |x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - b| \geq \varepsilon.$$

On a une suite $(x_n)_{n>0}$ qui est incluse dans E, qui converge vers a et telle que la suite $(f(x_n))_{n>0}$ ne converge pas vers b.

On a donc démontré l'équivalence proposée. □

Exemple 3.4. Soit la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}^* \to \cos\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}.$$

Les suites $(x_n)_{n>0}$ et $(y_n)_n$ définies par

$$x_n := \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad y_n := \frac{1}{(2n+1)\pi}$$

convergent vers 0 ; on a

$$f(x_n) = 1 \quad \text{et} \quad f(y_n) = -1$$

donc la fonction f n'admet pas de limite au point 0.

Proposition 3.5. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles.*

(1) *Soit a un nombre réel adhérent à E ; f a une limite au point a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge.*

(2) *On suppose que $-\infty$ est adhérent à E ; f a une limite en $-\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui tend vers $-\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ converge.*

(3) *On suppose que $+\infty$ est adhérent à E ; f a une limite en $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui tend vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_n$ converge.*

Démonstration. On fait la démonstration pour une limite en un point $a \in \mathbb{R}$. On suppose que pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge. Toutes les suites $(f(x_n))_n$ convergent vers le même nombre. En effet, soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites qui convergent vers a. Soit

$$b_x := \lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad \text{et} \quad b_y := \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Si $b_x \neq b_y$, soit $(z_n)_n$ la suite définie par

$$z_n := \begin{cases} x_n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ y_n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La suite $(z_n)_n$ converge vers a et la suite $(f(z_n))_n$ ne converge pas. D'où le résultat. On utilise ensuite la proposition 3.4. □

Proposition 3.6. *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$; soient k un réel et $b, c \in \mathbb{R}$.*

(1) *Soit a un nombre réel adhérent à E. On suppose*

$$\lim_{x\to a, x\in E} f(x) = b \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to a, x\in E} g(x) = c.$$

Alors

(a) $\lim_{x\to a, x\in E} (f+g)(x) = b + c,$

(b) $\lim_{x\to a, x\in E} (kf)(x) = kb,$

(c) $\lim\limits_{x\to a, x\in E}(fg)(x) = bc$,

(d) $\lim\limits_{x\to a, x\in E}|f|(x) = |b|$.

(2) *On suppose que* $-\infty$ *est adhérent à* E *et*

$$\lim_{x\to-\infty, x\in E} f(x) = b \quad et \quad \lim_{x\to-\infty, x\in E} g(x) = c.$$

Alors

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty, x\in E}(f+g)(x) = b+c$,

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty, x\in E}(kf)(x) = kb$,

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty, x\in E}(fg)(x) = bc$,

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty, x\in E}|f|(x) = |b|$.

(3) *On suppose que* $+\infty$ *est adhérent à* E *et*

$$\lim_{x\to+\infty, x\in E} f(x) = b \quad et \quad \lim_{x\to+\infty, x\in E} g(x) = c.$$

Alors

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty, x\in E}(f+g)(x) = b+c$,

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty, x\in E}(kf)(x) = kb$,

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty, x\in E}(fg)(x) = bc$,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty, x\in E}|f|(x) = |b|$.

Démonstration. Cela résulte des propositions 2.2 et 3.4. □

Exemple 3.5. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul ; on démontre par récurrence sur n (grâce au (1) (c) de la proposition 3.6) :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{x\to a} x^n = a^n.$$

La fonction $x \to x^n$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exemple 3.6. La fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \to \frac{\cos x}{x}$$

n'a pas de limite finie en 0, car la fonction cos a pour limite 1 en 0 et la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \to \frac{1}{x}$$

n'a pas de limite finie en 0 : on a

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[\quad g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}.$$

Définition 3.4. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. On dit que f est

– *minorée* sur E si $f(E)$ est minoré,
– *majorée* sur E si $f(E)$ est majoré,
– *bornée* sur E si $f(E)$ est borné.

Proposition 3.7. *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un ensemble* $E \subset \mathbb{R}$ *; soit* k *un réel. Soit* a *un nombre réel adhérent à* E.

(1) *On suppose* $\lim_{x\to a, x\in E} f(x) = 0$.
S'il existe $\alpha > 0$ *tel que* g *soit bornée dans* $]a-\alpha, a+\alpha[\cap E$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x\in E} (fg)(x) = 0.$$

(2) *On suppose* $\lim_{x\to a, x\in E} f(x) = -\infty$.

(a) *S'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* g *soit majorée dans* $]a-\alpha, a+\alpha[\cap E$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x\in E} (f+g)(x) = -\infty.$$

(b) *On a :*

$$\text{si } k<0, \text{ alors } \lim_{x\to a, x\in E} (kf)(x) = +\infty,$$
$$\text{si } k>0, \text{ alors } \lim_{x\to a, x\in E} (kf)(x) = -\infty.$$

(c) *S'il existe* $\alpha > 0$ *et* $m > 0$ *tels que* g *soit minorée par* m *dans* $]a-\alpha, a+\alpha[\cap E$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x\in E} (fg)(x) = -\infty.$$

(d) *S'il existe* $\alpha > 0$ *et* $M < 0$ *tels que* g *soit majorée par* M *dans* $]a-\alpha, a+\alpha[\cap E$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x\in E} (fg)(x) = +\infty.$$

(e) $\lim_{x\to a, x\in E} |f|(x) = +\infty$.

(3) *On suppose* $\lim_{x\to a, x\in E} f(x) = +\infty$.

(a) *S'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* g *soit minorée dans* $]a-\alpha, a+\alpha[\cap E$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x\in E} (f+g)(x) = +\infty.$$

(b) *On a :*

$$\text{si } k<0, \text{ alors } \lim_{x\to a, x\in E} (kf)(x) = -\infty,$$
$$\text{si } k>0, \text{ alors } \lim_{x\to a, x\in E} (kf)(x) = +\infty.$$

(c) *S'il existe* $\alpha > 0$ *et* $m > 0$ *tels que* g *soit minorée par* m *dans* $]a-\alpha, a+\alpha[\cap E$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x\in E} (fg)(x) = +\infty.$$

(d) *S'il existe* $\alpha > 0$ *et* $M < 0$ *tels que* g *soit majorée par* M *dans* $]a-\alpha, a+\alpha[\cap E$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x\in E} (fg)(x) = -\infty.$$

(e) $\lim_{x\to a, x\in E} |f|(x) = +\infty$.

Démonstration. Cela résulte des propositions 2.1, 2.6 et 3.4. □

Exemple 3.7. Soit la fonction

$$f : x \in]0, +\infty[\to \mathrm{e}^{-1/x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\lim_{x\to 0, x>0} \mathrm{e}^{-1/x} = 0$$

et

$$\forall x > 0 \quad \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1,$$

donc $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$.

On a des résultats analogues pour des limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

Proposition 3.8. *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$; soit k un réel. On suppose que $-\infty$ est adhérent à E.*

(1) *On suppose* $\lim\limits_{x\to-\infty, x\in E} f(x) = 0$.
S'il existe $A > 0$ tel que g soit bornée dans $]-\infty, -A[\cap E$, alors

$$\lim_{x\to-\infty, x\in E} (fg)(x) = 0.$$

(2) *On suppose* $\lim\limits_{x\to-\infty, x\in E} f(x) = -\infty$.

(a) *S'il existe $A > 0$ tel que g soit majorée dans $]-\infty, -A[\cap E$, alors*

$$\lim_{x\to-\infty, x\in E} (f+g)(x) = -\infty.$$

(b) *On a :*

$$\text{si } k < 0, \text{ alors } \lim_{x\to-\infty, x\in E} (kf)(x) = +\infty,$$
$$\text{si } k > 0, \text{ alors } \lim_{x\to-\infty, x\in E} (kf)(x) = -\infty.$$

(c) *S'il existe $A > 0$ et $m > 0$ tels que g soit minorée par m dans $]-\infty, -A[\cap E$, alors*

$$\lim_{x\to-\infty, x\in E} (fg)(x) = -\infty.$$

(d) *S'il existe $A > 0$ et $M < 0$ tels que g soit majorée par M dans $]-\infty, -A[\cap E$, alors*

$$\lim_{x\to-\infty, x\in E} (fg)(x) = +\infty.$$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty, x\in E} |f|(x) = +\infty$.

(3) *On suppose* $\lim\limits_{x\to-\infty, x\in E} f(x) = +\infty$.

(a) *S'il existe $A > 0$ tel que g soit minorée dans $]-\infty, -A[\cap E$, alors*

$$\lim_{x\to-\infty, x\in E} (f+g)(x) = +\infty.$$

(b) *On a :*

$$\text{si } k < 0, \text{ alors } \lim_{x\to-\infty, x\in E} (kf)(x) = -\infty,$$
$$\text{si } k > 0, \text{ alors } \lim_{x\to-\infty, x\in E} (kf)(x) = +\infty$$

(c) *S'il existe $A > 0$ et $m > 0$ tels que g soit minorée par m dans $]-\infty, -A[\cap E$, alors*

$$\lim_{x\to-\infty, x\in E} (fg)(x) = +\infty.$$

(d) *S'il existe $A > 0$ et $M < 0$ tels que g soit majorée par M dans $]-\infty, -A[\cap E$, alors*

$$\lim_{x\to-\infty, x\in E} (fg)(x) = -\infty.$$

(e) $\lim_{x\to-\infty, x\in E} |f|(x) = +\infty$.

Exemple 3.8. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul. On a

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

On le démontre par récurrence sur n. C'est vrai si $n = 1$. On a

$$x^2 = x \cdot x \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

On utilise alors le (2) (d) de la proposition 3.8 : $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et le résultat est démontré pour $n = 2$. Supposons le résultat établi pour n.

• Si $n+1$ est impair (donc n est pair)

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

On utilise alors le (3) (d) de la proposition 3.8 : $\lim_{x\to-\infty} x^{n+1} = -\infty$ et le résultat est démontré pour $n+1$ dans ce cas.

• Si $n+1$ est pair (donc n est impair)

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

On utilise alors le (2) (d) de la proposition 3.8 : $\lim_{x\to-\infty} x^{n+1} = +\infty$ et le résultat est démontré pour $n+1$ dans ce cas.

Finalement le résultat est établi pour $n+1$. Donc il est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 3.9. *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$; soit k un réel. On suppose que $+\infty$ est adhérent à E.*

(1) *On suppose* $\lim_{x\to+\infty, x\in E} f(x) = 0$.
S'il existe $A > 0$ tel que g soit bornée dans $]A, +\infty[\cap E$, alors

$$\lim_{x\to+\infty, x\in E} (fg)(x) = 0.$$

(2) *On suppose* $\lim_{x\to+\infty, x\in E} f(x) = -\infty$.

(a) *S'il existe $A > 0$ tel que g soit majorée dans $]A, +\infty[\cap E$, alors*

$$\lim_{x\to+\infty, x\in E} (f+g)(x) = -\infty.$$

(b) *On a :*

$$\text{si } k < 0, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty, x\in E} (kf)(x) = +\infty,$$
$$\text{si } k > 0, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty, x\in E} (kf)(x) = -\infty.$$

(c) *S'il existe $A > 0$ et $m > 0$ tels que g soit minorée par m dans $]A, +\infty[\cap E$, alors*

$$\lim_{x\to+\infty, x\in E} (fg)(x) = -\infty.$$

(d) *S'il existe $A > 0$ et $M < 0$ tels que g soit majorée par M dans $]A, +\infty[\cap E$, alors*

$$\lim_{x\to+\infty, x\in E} (fg)(x) = +\infty.$$

(e) $\lim_{x\to+\infty, x\in E} |f|(x) = +\infty$.

(3) *On suppose* $\lim_{x\to+\infty, x\in E} f(x) = +\infty$.

(a) *S'il existe* $A > 0$ *tel que* g *soit minorée dans* $]A, +\infty[\cap E$*, alors*
$$\lim_{x\to+\infty, x\in E} (f+g)(x) = +\infty.$$

(b) *On a :*
$$\text{si } k < 0, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty, x\in E} (kf)(x) = -\infty,$$
$$\text{si } k > 0, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty, x\in E} (kf)(x) = +\infty$$

(c) *S'il existe* $A > 0$ *et* $m > 0$ *tels que* g *soit minorée par* m *dans* $]A, +\infty[\cap E$*, alors*
$$\lim_{x\to+\infty, x\in E} (fg)(x) = +\infty.$$

(d) *S'il existe* $A > 0$ *et* $M < 0$ *tels que* g *soit majorée par* M *dans* $]A, +\infty[\cap E$*, alors*
$$\lim_{x\to+\infty, x\in E} (fg)(x) = +\infty.$$

(e) $\lim_{x\to+\infty, x\in E} |f|(x) = +\infty$.

Exemple 3.9. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul. On a
$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty.$$
On le démontre par récurrence sur n.

La proposition suivante fournit la limite de $1/f$, quand f admet une limite non nulle (éventuellement infinie).

Proposition 3.10. *Soit* $E \subset \mathbb{R}$ *et* f *une fonction définie sur* E*, à valeurs réelles.*

(1) *Soit* a *un nombre réel adhérent à* E*.*

(a) *Si* f *admet un réel* b *comme limite en* a *et si* $b \neq 0$*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que, en notant* $E_\alpha := E\cap]a-\alpha, a+\alpha[$,
$$\forall x \in E_\alpha \quad f(x) \neq 0$$
et (a *est adhérent à* E_α*)*
$$\lim_{x\to a, x\in E_\alpha} (1/f)(x) = 1/b.$$

(b) *Si* f *admet* $-\infty$ *comme limite en* a*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que, en notant* $E_\alpha := E\cap]a-\alpha, a+\alpha[$,
$$\forall x \in E_\alpha \quad f(x) < 0$$
et (a *est adhérent à* E_α*)*
$$\lim_{x\to a, x\in E_\alpha} (1/f)(x) = 0.$$

(c) *Si* f *admet* $+\infty$ *comme limite en* a*, il existe* $\alpha > 0$ *tel que, en notant* $E_\alpha := E\cap]a-\alpha, a+\alpha[$,
$$\forall x \in E_\alpha \quad f(x) > 0$$
et (a *est adhérent à* E_α*)*
$$\lim_{x\to a, x\in E_\alpha} (1/f)(x) = 0.$$

(2) *On suppose que* $-\infty$ *est adhérent à* E*.*

(a) *Si f admet un réel b comme limite en $-\infty$ et si $b \neq 0$, il existe $A > 0$ tel que, en notant $E_{-A} := E \cap]-\infty, -A[$,*

$$\forall x \in E_{-A} \quad f(x) \neq 0$$

et ($-\infty$ est adhérent à E_{-A})

$$\lim_{x \to -\infty, x \in E_{-A}} (1/f)(x) = 1/b.$$

(b) *Si f admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$, il existe A tel que, en notant $E_{-A} := E \cap]-\infty, -A[$,*

$$\forall x \in E_{-A} \quad f(x) < 0$$

et ($-\infty$ est adhérent à E_{-A})

$$\lim_{x \to -\infty, x \in E_{-A}} (1/f)(x) = 0.$$

(c) *Si f admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$, il existe A tel que, en notant $E_{-A} := E \cap]-\infty, -A[$,*

$$\forall x \in E_{-A} \quad f(x) > 0$$

et ($-\infty$ est adhérent à E_{-A})

$$\lim_{x \to -\infty, x \in E_{-A}} (1/f)(x) = 0.$$

(3) *On suppose que $+\infty$ est adhérent à E.*

(a) *Si f admet un réel b comme limite en $+\infty$ et si $b \neq 0$, il existe $A > 0$ tel que, en notant $E_A := E \cap]A, +\infty[$,*

$$\forall x \in E_A \quad f(x) \neq 0$$

et ($+\infty$ est adhérent à E_A)

$$\lim_{x \to +\infty, x \in E_A} (1/f)(x) = 1/b.$$

(b) *Si f admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$, il existe A tel que, en notant $E_A := E \cap]-A, +\infty[$,*

$$\forall x \in E_A \quad f(x) < 0$$

et ($+\infty$ est adhérent à E_A)

$$\lim_{x \to +\infty, x \in E_A} (1/f)(x) = 0.$$

(c) *Si f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$, il existe A tel que, en notant $E_A := E \cap]A, +\infty[$,*

$$\forall x \in E_A \quad f(x) > 0$$

et ($+\infty$ est adhérent à E_A)

$$\lim_{x \to +\infty, x \in E_A} (1/f)(x) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Le premier point du (1) (a) a été démontré au (1) (d) de la proposition 3.2. On utilise ensuite les propositions 2.4 et 3.4. □

Exemple 3.10. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul. On a

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Pour le premier point, cela résulte des (2) (b) et (2) (c) de la proposition 3.10 ; pour le second point, cela résulte du (3) (c) de la même proposition.

La proposition suivante fournit la limite de $1/f$, quand f admet une limite nulle.

Proposition 3.11. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles.*

(1) *Soit a un nombre réel adhérent à E.*

(a) *Si f admet 0 comme limite en a et s'il existe $\alpha > 0$ tel que, en notant $E_\alpha^* := E \cap]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}$,*

$$\forall x \in E_\alpha^* \quad f(x) < 0$$

alors, si a est adhérent à E_α^*,

$$\lim_{x \to a, x \in E_\alpha^*} (1/f)(x) = -\infty.$$

(b) *Si f admet 0 comme limite en a et s'il existe $\alpha > 0$ tel que, en notant $E_\alpha^* := E \cap]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}$,*

$$\forall x \in E_\alpha^* \quad f(x) > 0$$

alors, si a est adhérent à E_α^*,

$$\lim_{x \to a, x \in E_\alpha^*} (1/f)(x) = +\infty.$$

(2) *On suppose que $-\infty$ est adhérent à E.*

(a) *Si f admet 0 comme limite en $-\infty$ et s'il existe $A > 0$ tel que, en notant $E_{-A} := E \cap]-\infty, -A[$,*

$$\forall x \in E_{-A} \quad f(x) < 0$$

alors (comme $-\infty$ est adhérent à E_{-A})

$$\lim_{x \to -\infty, x \in E_{-A}} (1/f)(x) = -\infty.$$

(b) *Si f admet 0 comme limite en $-\infty$ et s'il existe $A > 0$ tel que, en notant $E_{-A} := E \cap]-\infty, -A[$,*

$$\forall x \in E_{-A} \quad f(x) > 0$$

alors (comme $-\infty$ est adhérent à E_{-A})

$$\lim_{x \to -\infty, x \in E_{-A}} (1/f)(x) = +\infty.$$

(3) *On suppose que $+\infty$ est adhérent à E.*

(a) *Si f admet 0 comme limite en $+\infty$ et s'il existe $A > 0$ tel que, en notant $E_A := E \cap]A, +\infty[$,*

$$\forall x \in E_A \quad f(x) < 0$$

alors (comme $+\infty$ est adhérent à E_A)

$$\lim_{x \to +\infty, x \in E_A} (1/f)(x) = -\infty.$$

(b) *Si f admet 0 comme limite en $+\infty$ et s'il existe $A > 0$ tel que, en notant $E_A := E \cap]A, +\infty[$,*

$$\forall x \in E_A \quad f(x) > 0$$

alors (comme $+\infty$ est adhérent à E_A)

$$\lim_{x \to +\infty, x \in E_A} (1/f)(x) = +\infty.$$

DÉMONSTRATION. (1) (a) Soit $K > 0$: il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in E \cap]a-\eta, a+\eta[\quad -f(x) = |f(x)| < \frac{1}{K}.$$

Donc

$$\forall x \in E_\alpha^* \cap]a-\eta, a+\eta[\quad \frac{1}{f(x)} < -K.$$

Par conséquent $\lim_{x \to a, x \in E_\alpha^*} (1/f)(x) = -\infty$. □

Exemple 3.11. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul. On a

$$\lim_{x \to 0, x<0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \\ +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0, x>0} \frac{1}{x^n} = +\infty.$$

Cela résulte du (1) de la proposition 3.11.

Exemple 3.12. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels avec $a_n \neq 0$. On définit une fonction (polynomiale)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ est impair et } a_n > 0 \text{ ou si } n \text{ est pair et } a_n < 0 \\ +\infty & \text{si } n \text{ est impair et } a_n < 0 \text{ ou si } n \text{ est pair et } a_n > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n < 0 \\ +\infty & \text{si } a_n > 0 \end{cases}$$

En effet, on écrit, pour $x \neq 0$

$$p(x) = a_n x^n \Big(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\Big).$$

D'après la proposition 3.6,

$$\lim_{x \to -\infty} a_n \Big(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\Big) = a_n,$$
$$\lim_{x \to -\infty} a_n \Big(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\Big) = a_n,$$

d'où le résultat.

Exemple 3.13. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers non nuls et $a_0, a_1, \dots, a_m$ et $b_0, \dots, b_n$ des réels avec $a_m b_n \neq 0$. On définit une fonction (rationnelle)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où

$$p(x) := a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$
$$q(x) := b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

On écrit, pour $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \frac{1 + \frac{a_{m-1}}{a_m} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{a_1}{a_m} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{a_m} \cdot \frac{1}{x^m}}{1 + \frac{b_{n-1}}{b_n} \cdot \frac{1}{x} + \dots + \frac{b_1}{b_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{b_n} \cdot \frac{1}{x^n}}$$

Par conséquent

• si $m < n$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,$$

• si $m = n$,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{a_m}{b_n} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{a_m}{b_n},$$

• si $m > n$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } m-n \text{ est impair et } \dfrac{a_m}{b_n} > 0 \\ & \text{ou si } m-n \text{ est pair et } \dfrac{a_m}{b_n} < 0 \\ +\infty & \text{si } m-n \text{ est impair et } \dfrac{a_m}{b_n} < 0 \\ & \text{ou si } m-n \text{ est pair et } \dfrac{a_m}{b_n} > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \dfrac{a_m}{b_n} < 0 \\ +\infty & \text{si } \dfrac{a_m}{b_n} > 0 \end{cases}$$

On déduit de la proposition 2.3 et de la proposition 3.4 :

Proposition 3.12. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies sur E, à valeurs réelles.*

(1) *Soit a un nombre réel adhérent à E. S'il existe une suite $(x_n)_n$ qui est incluse dans E, qui converge vers a, telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq g(x_n)$$

et si f admet un réel b comme limite au point a et g admet un réel c comme limite au point a, alors $b \leq c$.

(2) *On suppose que $-\infty$ est adhérent à E. S'il existe une suite $(x_n)_n$ qui est incluse dans E, qui tend vers $-\infty$, telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq g(x_n)$$

et si f admet un réel b comme limite en $-\infty$ et g admet un réel c comme limite en $-\infty$, alors $b \leq c$.

(3) *On suppose que $+\infty$ est adhérent à E. S'il existe une suite $(x_n)_n$ qui est incluse dans E, qui tend vers $+\infty$, telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq g(x_n)$$

et si f admet un réel b comme limite en $+\infty$ et g admet un réel c comme limite en $+\infty$, alors $b \leq c$.

En prenant f ou g identiquement nulle, on obtient :

Corollaire. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles.*

(1) *Soit a un nombre réel adhérent à E.*

(a) *S'il existe une suite $(x_n)_n$ qui est incluse dans E, qui converge vers a, telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq 0$$

et si f admet un réel b comme limite au point a, alors $b \leq 0$.

(b) *S'il existe une suite* $(x_n)_n$ *qui est incluse dans* E*, qui converge vers* a*, telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \geq 0$$
et si f *admet un réel* b *comme limite au point* a*, alors* $b \geq 0$*.*

(2) *On suppose que* $-\infty$ *est adhérent à* E*.*

(a) *S'il existe une suite* $(x_n)_n$ *qui est incluse dans* E*, qui tend vers* $-\infty$*, telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq 0$$
et si f *admet un réel* b *comme limite en* $-\infty$*, alors* $b \leq 0$*.*

(b) *S'il existe une suite* $(x_n)_n$ *qui est incluse dans* E*, qui tend vers* $-\infty$*, telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \geq 0$$
et si f *admet un réel* b *comme limite en* $-\infty$*, alors* $b \geq 0$*.*

(3) *On suppose que* $+\infty$ *est adhérent à* E*.*

(a) *S'il existe une suite* $(x_n)_n$ *qui est incluse dans* E*, qui tend vers* $+\infty$*, telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq 0$$
et si f *admet un réel* b *comme limite en* $+\infty$*, alors* $b \leq 0$*.*

(b) *S'il existe une suite* $(x_n)_n$ *qui est incluse dans* E*, qui tend vers* $+\infty$*, telle que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \geq 0$$
et si f *admet un réel* b *comme limite en* $+\infty$*, alors* $b \geq 0$*.*

On déduit de la proposition 2.13 et de la proposition 3.4 les deux propositions suivantes.

Proposition 3.13. *Soient* $E \subset \mathbb{R}$ *et* f, g, h *trois fonctions définies sur* E*, à valeurs réelles.*

(1) *Soit* a *un nombre réel adhérent à* E *; on suppose qu'il existe* $\alpha > 0$ *tel que*
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap E \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$
Si f *et* h *admettent le même réel* b *comme limite au point* a*, alors* g *admet aussi* b *comme limite au point* a*.*

(2) *On suppose que* $-\infty$ *est adhérent à* E *et qu'il existe* $A > 0$ *tel que*
$$\forall x \in]-\infty, -A[\cap E \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$
Si f *et* h *admettent le même réel* b *comme limite en* $-\infty$*, alors* g *admet aussi* b *comme limite en* $-\infty$*.*

(3) *On suppose que* $+\infty$ *est adhérent à* E *et qu'il existe* $A > 0$ *tel que*
$$\forall x \in]A, +\infty[\cap E \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$
Si f *et* h *admettent le même réel* b *comme limite en* $+\infty$*, alors* g *admet aussi* b *comme limite en* $+\infty$*.*

Exemple 3.14. Soit la fonction
$$f : x \in]-1, +\infty[\to \frac{2x + \sin x}{x+1} \in \mathbb{R}.$$
On a
$$\forall x > -1 \quad \frac{2x-1}{x+1} \leq \frac{2x+\sin x}{x+1} \leq \frac{2x+1}{x+1}$$
par ailleurs
$$\forall x > -1 \quad \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+1}=2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+1}=2$$

On en déduit $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$.

Proposition 3.14. *Soit $E\subset\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies sur E, à valeurs réelles.*

(1) *Soit a un nombre réel adhérent à E ; on suppose qu'il existe $\alpha>0$ tel que*

$$\forall x\in]a-\alpha,a+\alpha[\cap E \quad f(x)\leq g(x).$$

   (a) *si f admet $+\infty$ comme limite au point a, alors g admet $+\infty$ comme limite au point a,*

   (b) *si g admet $-\infty$ comme limite au point a, alors f admet $-\infty$ comme limite au point a.*

(2) *On suppose que $-\infty$ est adhérent à E et qu'il existe $A>0$ tel que*

$$\forall x\in]-\infty,-A[\cap E \quad f(x)\leq g(x)$$

   (a) *si f admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$, alors g admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$,*

   (b) *si g admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$, alors f admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$.*

(3) *On suppose que $+\infty$ est adhérent à E. S'il existe $A>0$ tel que*

$$\forall x\in]A,+\infty[\cap E \quad f(x)\leq g(x)$$

   (a) *si f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$, alors g admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$,*

   (b) *si g admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$, alors f admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$.*

Proposition 3.15. *Soit $E\subset\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. Soit $F\subset\mathbb{R}$, avec $f(E)\subset F$ et g une fonction définie sur F, à valeurs réelles. On peut alors définir $g\circ f:E\to\mathbb{R}$.*

(1) *Soit a un nombre réel adhérent à E.*

   (a) *On suppose que f admet un réel b comme limite au point a. Alors b est adhérent à F.*

      (i) *On suppose que g admet un réel c comme limite au point b. Alors $g\circ f$ admet c comme limite au point a.*

      (ii) *On suppose que g admet $-\infty$ comme limite au point b. Alors $g\circ f$ admet $-\infty$ comme limite au point a.*

      (iii) *On suppose que g admet $+\infty$ comme limite au point b. Alors $g\circ f$ admet $+\infty$ comme limite au point a.*

   (b) *On suppose que f admet $-\infty$ comme limite au point a. Alors $-\infty$ est adhérent à F.*

      (i) *On suppose que g admet un réel c comme limite en $-\infty$. Alors $g\circ f$ admet c comme limite au point a.*

      (ii) *On suppose que g admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$. Alors $g\circ f$ admet $-\infty$ comme limite au point a.*

      (iii) *On suppose que g admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$. Alors $g\circ f$ admet $+\infty$ comme limite au point a.*

   (c) *On suppose que f admet $+\infty$ comme limite au point a. Alors $+\infty$ est adhérent à F.*

(i) *On suppose que* g *admet un réel* c *comme limite en* $+\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* c *comme limite au point* a.

(ii) *On suppose que* g *admet* $-\infty$ *comme limite en* $+\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* $-\infty$ *comme limite au point* a.

(iii) *On suppose que* g *admet* $+\infty$ *comme limite en* $+\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* $+\infty$ *comme limite au point* a.

(2) *On suppose que* $-\infty$ *est adhérent à* E.

(a) *On suppose que* f *admet un réel* b *comme limite en* $-\infty$. *Alors* b *est adhérent à* F.

(i) *On suppose que* g *admet un réel* c *comme limite au point* b. *Alors* $g \circ f$ *admet* c *comme limite en* $-\infty$.

(ii) *On suppose que* g *admet* $-\infty$ *comme limite au point* b. *Alors* $g \circ f$ *admet* $-\infty$ *comme limite en* $-\infty$.

(iii) *On suppose que* g *admet* $+\infty$ *comme limite au point* b. *Alors* $g \circ f$ *admet* $+\infty$ *comme limite en* $-\infty$.

(b) *On suppose que* f *admet* $-\infty$ *comme limite en* $-\infty$. *Alors* $-\infty$ *est adhérent à* F.

(i) *On suppose que* g *admet un réel* c *comme limite en* $-\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* c *comme limite en* $-\infty$.

(ii) *On suppose que* g *admet* $-\infty$ *comme limite en* $-\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* $-\infty$ *comme limite en* $-\infty$.

(iii) *On suppose que* g *admet* $+\infty$ *comme limite en* $-\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* $+\infty$ *comme limite en* $-\infty$.

(c) *On suppose que* f *admet* $+\infty$ *comme limite en* $-\infty$. *Alors* $+\infty$ *est adhérent à* F.

(i) *On suppose que* g *admet un réel* c *comme limite en* $+\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* c *comme limite en* $-\infty$.

(ii) *On suppose que* g *admet* $-\infty$ *comme limite en* $+\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* $-\infty$ *comme limite en* $-\infty$.

(iii) *On suppose que* g *admet* $+\infty$ *comme limite en* $+\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* $+\infty$ *comme limite en* $-\infty$.

(3) *On suppose que* $+\infty$ *est adhérent à* E.

(a) *On suppose que* f *admet un réel* b *comme limite en* $+\infty$. *Alors* b *est adhérent à* F.

(i) *On suppose que* g *admet un réel* c *comme limite au point* b. *Alors* $g \circ f$ *admet* c *comme limite en* $+\infty$.

(ii) *On suppose que* g *admet* $-\infty$ *comme limite au point* b. *Alors* $g \circ f$ *admet* $-\infty$ *comme limite en* $+\infty$.

(iii) *On suppose que* g *admet* $+\infty$ *comme limite au point* b. *Alors* $g \circ f$ *admet* $+\infty$ *comme limite en* $+\infty$.

(b) *On suppose que* f *admet* $-\infty$ *comme limite en* $+\infty$. *Alors* $-\infty$ *est adhérent à* F.

(i) *On suppose que* g *admet un réel* c *comme limite en* $-\infty$. *Alors* $g \circ f$ *admet* c *comme limite en* $+\infty$.

(ii) *On suppose que g admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$. Alors $g \circ f$ admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$.*

(iii) *On suppose que g admet $+\infty$ comme limite en $-\infty$. Alors $g \circ f$ admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.*

(c) *On suppose que f admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$. Alors $+\infty$ est adhérent à F.*

(i) *On suppose que g admet un réel c comme limite en $+\infty$. Alors $g \circ f$ admet c comme limite en $+\infty$.*

(ii) *On suppose que g admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$. Alors $g \circ f$ admet $-\infty$ comme limite en $+\infty$.*

(iii) *On suppose que g admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$. Alors $g \circ f$ admet $+\infty$ comme limite en $+\infty$.*

DÉMONSTRATION. On démontre le résultat en des points et pour des limites dans $\mathbb{R}$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - a| < \eta \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Comme l'intervalle $]a - \eta, a + \eta[$ contient un élément de E, l'intervalle $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ contient un élément de $f(E)$, donc de F. Par conséquent b est adhérent à F.

• Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$|y - b| < \eta \text{ et } y \in F \;\Rightarrow\; |g(y) - c| < \varepsilon.$$

Et il existe $\theta > 0$ tel que

$$|x - a| < \theta \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \eta.$$

Donc, comme $x \in E \;\Rightarrow\; f(x) \in F$, on a

$$|x - a| < \theta \text{ et } x \in E \;\Rightarrow\; |g(f(x)) - c| < \varepsilon.$$

Par conséquent $g \circ f$ admet c comme limite au point b. □

Exemple 3.15. Soit la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \to \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} + 2} \in \mathbb{R}_+^*.$$

On définit

$$e : x \in \mathbb{R} \to \mathrm{e}^{x} \in \mathbb{R}_+^*.$$

et

$$g : x \in \mathbb{R} \to \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2} \in \mathbb{R}.$$

On a $f = g \circ e$. Comme

$$\lim_{x \to +\infty} e(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$$

on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Exemple 3.16. On établit facilement

$$\forall x \in \Big[-\frac{1}{2}, 1\Big] \quad x - x^2 \leq \mathrm{Ln}\,(1 + x) \leq x.$$

Donc

$$\forall x \in \Big[-\frac{1}{2}, 0\Big] \quad \mathrm{e} \leq (1 + x)^{1/x} \leq \mathrm{e}^{1-x},$$
$$\forall x \in \Big[0, 1\Big] \quad \mathrm{e}^{1-x} \leq (1 + x)^{1/x} \leq \mathrm{e}.$$

On en déduit

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}$$

et par conséquent

$$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

On en déduit également

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Ln}\,(1+x)}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to -\infty} x\mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} x\mathrm{Ln}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Définition 3.5. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles.

(1) Si f est minorée, sa *borne inférieure*[1] sur E est la borne inférieure de $f(E)$: on la note

$$\inf_{x\in E} f(x).$$

(2) Si f est majorée, sa *borne supérieure*[2] sur E est la borne supérieure de $f(E)$: on la note

$$\sup_{x\in E} f(x).$$

Définition 3.6. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. Elle est
– *croissante* si pour tous les réels de E tels que $x < y$ on a $f(x) \leq f(y)$,
– *strictement croissante* si pour tous les réels de E tels que $x < y$ on a $f(x) < f(y)$,
– *décroissante* si pour tous les réels de E tels que $x < y$ on a $f(x) \geq f(y)$,
– *strictement croissante* si pour tous les réels de E tels que $x < y$ on a $f(x) \geq f(y)$,
– *monotone* si elle est croissante ou décroissante,
– *strictement monotone* si si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Proposition 3.16. *Soit $E \subset \mathbb{R}$, non vide et soient f, g deux fonctions définies sur E, à valeurs réelles ; soit h une fonction définie sur F, avec $f(E) \subset F$.*

(1) *Si f est croissante, alors $-f$ est décroissante.*

(2) *Si f est décroissante, alors $-f$ est croissante.*

(3) *Si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.*

(4) *Si f et g sont décroissantes, alors $f+g$ est décroissante.*

(5) *Si f est croissante et si $k \in \mathbb{R}_+^*$, alors kf est croissante ; si $k \in \mathbb{R}_-^*$, alors kf est décroissante.*

(6) *Si f est décroissante et si $k \in \mathbb{R}_+^*$, alors kf est décroissante ; si $k \in \mathbb{R}_-^*$, alors kf est croissante.*

(7) *Si f et g sont positives et croissantes, alors fg est positive et croissante.*

(8) *Si f et g sont négatives et croissantes, alors fg est positive et décroissante.*

(9) *Si f et g sont positives et décroissantes, alors fg est positive et décroissante.*

(10) *Si f et g sont négatives et décroissantes, alors fg est positive et croissante.*

(11) *Si f est strictement positive et croissante, alors $1/f$ est strictement positive et décroissante.*

(12) *Si f est strictement négative et croissante, alors $1/f$ est strictement négative et décroissante.*

1. qui existe d'après le théorème 2.1
2. qui existe d'après le théorème 2.1

(13) *Si f est strictement positive et décroissante, alors $1/f$ est strictement positive et croissante.*

(14) *Si f est strictement négative et décroissante, alors $1/f$ est strictement négative et croissante.*

(15) *Si f est strictement croissante, alors f^{-1} est strictement croissante.*

(16) *Si f est strictement décroissante, alors f^{-1} est strictement décroissante.*

(17) *Si f et h sont croissantes, alors $h \circ f$ est croissante.*

(18) *Si f et h sont décroissantes, alors $h \circ f$ est croissante.*

(19) *Si f est croissante et h décroissante, alors $h \circ f$ est décroissante.*

(20) *Si f est décroissante et h croissante, alors $h \circ f$ est décroissante.*

Proposition 3.17. *Soit $E \subset \mathbb{R}$, non vide et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles, croissante.*

(1) *On suppose que le nombre réel a est adhérent à $\{x \in E : x < a\}$.*
   (a) *Si f est majorée sur $\{x \in E : x < a\}$, alors f admet $\sup\limits_{x \in E, x<a} f(x)$ pour limite à gauche en a.*
   (b) *Si f n'est pas majorée sur $\{x \in E : x < a\}$, alors f admet $+\infty$ pour limite à gauche en a.*

(2) *On suppose que le nombre réel a est adhérent à $\{x \in E : x > a\}$.*
   (a) *Si f est minorée sur $\{x \in E : x > a\}$, alors f admet $\inf\limits_{x \in E, x>a} f(x)$ pour limite à droite en a.*
   (b) *Si f n'est pas minorée sur $\{x \in E : x > a\}$, alors f admet $-\infty$ pour limite à droite en a.*

(3) *On suppose que $-\infty$ est adhérent à E.*
   (a) *Si f est minorée, alors f admet $\inf\limits_{x \in E} f(x)$ pour limite en $-\infty$.*
   (b) *Si f n'est pas minorée, alors f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$.*

(4) *On suppose que $+\infty$ est adhérent à E.*
   (a) *Si f est majorée, alors f admet $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ pour limite en $+\infty$.*
   (b) *Si f n'est pas majorée, alors f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$.*

Démonstration. (1) (a) L'ensemble $\{f(x) : x \in E, x < a\}$ est non vide (car $\{x \in E : x < a\} \neq \emptyset$) et majoré. D'après le théorème 2.1, il a une borne supérieure notée $b := \sup\limits_{x \in E, x<a} f(x)$. On a

$$\forall x \in E \quad x < a \ \Rightarrow \ f(x) \leq b.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists x_0 \in E \text{ tel que } x_0 < a \text{ et } f(x_0) > b - \varepsilon.$$

On note $\eta := a - x_0$, comme f est croissante

$$\forall x \in E \quad x_0 = a - \eta < x < a \ \Rightarrow \ b - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq b$$

ce qui prouve que f admet b pour limite à gauche en a.

(1) (b) Si f n'est pas majorée sur $\{x \in E : x < a\}$, soit $K > 0$: on a

$$\exists x_0 \in E \quad \text{tel que } x_0 < a \text{ et } f(x_0) > K.$$

On note $\eta := a - x_0$, comme f est croissante

$$\forall x \in E \quad x_0 = a - \eta < x < a \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(x_0) > K$$

ce qui prouve que f admet $+\infty$ pour limite à gauche en a.

(2) (a) L'ensemble $\{f(x) : x \in E, x > a\}$ est non vide (car $\{x \in E : x > a\} \neq \emptyset$) et minoré. D'après le théorème 2.1, il a une borne inférieure notée $b := \inf\limits_{x \in E, x < a} f(x)$. On a

$$\forall x \in E \quad x > a \;\Rightarrow\; f(x) \geq b.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists x_0 \in E \quad \text{tel que } x_0 > a \text{ et } f(x_0) < b + \varepsilon.$$

On note $\eta := x_0 - a$, comme f est croissante

$$\forall x \in E \quad a < x < a + \eta = x_0 \;\Rightarrow\; b \leq f(x) \leq f(x_0) < b + \varepsilon$$

ce qui prouve que f admet b pour limite à droite en a.

(2) (b) Si f n'est pas minorée sur $\{x \in E : x > a\}$, soit $K > 0$: on a

$$\exists x_0 \in E \text{ tel que } x_0 > a \text{ et } f(x_0) < -K.$$

On note $\eta := x_0 - a$, comme f est croissante

$$\forall x \in E \quad x_0 = a < x < a + \eta \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0) < -K$$

ce qui prouve que f admet $-\infty$ pour limite à droite en a.

(3) (a) L'ensemble $\{f(x) : x \in E\}$ est non vide (car $E \neq \emptyset$) et minoré. D'après le théorème 2.1, il a une borne inférieure notée $b := \inf\limits_{x \in E} f(x)$. On a

$$\forall x \in E \quad f(x) \geq b.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists x_0 \in E \; f(x_0) < b + \varepsilon.$$

Comme f est croissante,

$$\forall x \in E \quad x < \min(x_0, 0) \;\Rightarrow\; b \leq f(x) \leq f(x_0) < b + \varepsilon$$

ce qui prouve que f admet b pour limite en $-\infty$.

(3) (b) Si f n'est pas minorée sur E, soit $K > 0$: on a

$$\exists x_0 \in E \quad f(x_0) < -K.$$

Comme f est croissante,

$$\forall x \in E \quad x < \min(x_0, 0) \;\Rightarrow\; f(x) \leq f(x_0) < -K$$

ce qui prouve que f admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$.

(4) (a) L'ensemble $\{f(x) : x \in E\}$ est non vide (car $E \neq \emptyset$) et majoré. D'après le théorème 2.1, il a une borne supérieure notée $b := \sup\limits_{x \in E} f(x)$. On a

$$\forall x \in E \quad f(x) \leq b.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists x_0 \in E \; f(x_0) > b - \varepsilon.$$

Comme f est croissante,

$$\forall x \in E \quad x > \max(x_0, 0) \;\Rightarrow\; b - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq b$$

ce qui prouve que f admet b pour limite en $+\infty$.

(4) (b) Si f n'est pas majorée sur E, soit $K > 0$: on a

$$\exists x_0 \in E \quad f(x_0) > K.$$

Comme f est croissante,

$$\forall x \in E \quad x > \max(x_0, 0) \ \Rightarrow \ f(x) \geq f(x_0) > K$$

ce qui prouve que f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$. □

On a un résultat analogue pour une fonction décroissante.

Proposition 3.18. *Soit $E \subset \mathbb{R}$, non vide et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles, décroissante.*

(1) *On suppose que le nombre réel a est adhérent à $\{x \in E : x < a\}$.*
   - (a) *Si f est minorée sur $\{x \in E : x < a\}$, alors f admet $\inf\limits_{x\in E, x<a} f(x)$ pour limite à gauche en a.*
   - (b) *Si f n'est pas minorée sur $\{x \in E : x < a\}$, alors f admet $-\infty$ pour limite à gauche en a.*

(2) *On suppose que le nombre réel a est adhérent à $\{x \in E : x > a\}$.*
   - (a) *Si f est majorée sur $\{x \in E : x > a\}$, alors f admet $\sup\limits_{x\in E, x>a} f(x)$ pour limite à droite en a.*
   - (b) *Si f n'est pas majorée sur $\{x \in E : x > a\}$, alors f admet $+\infty$ pour limite à droite en a.*

(3) *On suppose que $-\infty$ est adhérent à E.*
   - (a) *Si f est majorée, alors f admet $\sup\limits_{x\in E} f(x)$ pour limite en $-\infty$.*
   - (b) *Si f n'est pas majorée, alors f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$.*

(4) *On suppose que $+\infty$ est adhérent à E.*
   - (a) *Si f est minorée, alors f admet $\inf\limits_{x\in E} f(x)$ pour limite en $+\infty$.*
   - (b) *Si f n'est pas minorée, alors f admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$.*

On a alors le résultat suivant.

Proposition 3.19. *Si f est une fonction monotone définie sur un intervalle[3] $I \subset \mathbb{R}$, alors f a des limites à gauche et à droite finies en tout point de I qui n'est pas une de ses extrémités.*

2. Continuité

On détaille les propriétés des fonctions qui sont continues en un point, puis celles des fonctions qui sont continues sur tout un intervalle.

Définition 3.7. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. Soit $a \in E$. On dit que f est *continue au point a* si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |x - a| < \eta \text{ et } x \in E \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

On dit que f est *continue* si elle l'est en tout point de son domaine de définition.

Remarque 3.3. (1) La fonction f est continue au point a si et seulement si elle admet $f(a)$ comme limite au point a.

(2) La fonction f est continue au point a si et seulement si

$$\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0.$$

3. quelconque : ouvert, fermé, semi-ouvert, borné ou non

Exemple 3.17. Soit

$$f : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Comme

$$\lim_{x \to 0, x > 0} \mathrm{e}^{-1/x} = \lim_{y \to -\infty} \mathrm{e}^{y} = 0,$$

la fonction f est continue au point 0.

Proposition 3.20. *Soient $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. Soit $a \notin E$ un nombre réel adhérent à E. On suppose que f admet le réel b comme limite au point a. Alors la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $E \cup \{a\}$ par*

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in E \\ b & \textit{si } x = a \end{cases}$$

est continue au point a ; on l'appelle le prolongement par continuité *en a de f (il est unique).*

Exemple 3.18. La fonction

$$f : x \in \mathbb{R}^* \to \frac{\sin x}{x}$$

peut se prolonger par continuité en 0 par 1.

On déduit de la proposition 3.2.

Proposition 3.21. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. Soit $a \in E$; on suppose que f est continue au point a.*

(1) *Il existe $\alpha > 0$ et il existe $K > 0$ tels que*

$$\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap E \quad |f(x)| \leq K.$$

(2) *Si $f(a) > m$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap E \quad f(x) > m.$$

(3) *Si $f(a) < M$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap E \quad f(x) < M.$$

(4) *Si $f(a) \neq 0$, il existe $\alpha > 0$ et il existe $m > 0$ tels que*

$$\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\cap E \quad |f(x)| > m.$$

Définition 3.8. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. Soit $a \in E$.

(1) On suppose que a est adhérent à $\{x \in E : x < a\}$: on dit que f est *continue à gauche au point* a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad a - \eta < x < a \text{ et } x \in E \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

(2) On suppose que a est adhérent à $\{x \in E : x > a\}$: on dit que f est *continue à droite au point* a si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad a < x < a + \eta \text{ et } x \in E \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Remarque 3.4. f est continue à gauche (à droite) au point a si et seulement si elle admet $f(a)$ comme limite à gauche (à droite) au point a.

On déduit de la proposition 3.3.

Proposition 3.22. *Soient $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles ; soit $a \in E$ un nombre réel adhérent à $\{x \in E : x < a\}$ et à $\{x \in E : x > a\}$. La fonction f est continue au point a si et seulement si elle est continue à gauche et à droite au point a.*

On déduit de la proposition 3.4.

Proposition 3.23. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. Soit $a \in E$. La fonction f est continue au point a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de points de E qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

On déduit des propositions 3.6 et 3.10.

Proposition 3.24. *Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et k un réel. Soit $a \in E$. Si f et g sont continues au point a, alors*

$$f+g, \quad kf, \quad fg, \quad |f|$$

sont continues au point a.

Si $g(a) \neq 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f/g$$

est définie dans $]a-\alpha, a+\alpha[\cap E$ et est continue au point a.

Exemple 3.19. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels avec $a_n \neq 0$. On définit une fonction (polynomiale)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Alors p est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.20. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers non nuls et $a_0, a_1, \ldots, a_m$ et $b_0, \ldots, b_n$ des réels avec $a_m b_n \neq 0$. On définit une fonction (rationnelle)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où

$$\begin{aligned} p(x) &:= a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ q(x) &:= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{Z}$ l'ensemble des zéros de q ; alors f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$.

On déduit de la proposition 3.7.

Proposition 3.25. *Soit f une fonction définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$, soit $a \in E$ et soit g une fonction définie sur $E \setminus \{a\}$. On suppose que f est continue en a et que $f(a) = 0$. S'il existe $\alpha > 0$ tel que g soit bornée dans $]a-\alpha, a+\alpha[\cap\big(E \setminus \{a\}\big)$, alors fg peut se prolonger par continuité par 0 en a.*

Exemple 3.21. La fonction

$$f : x \in \mathbb{R}^* \to x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}$$

peut se prolonger par continuité par 0 en 0.

On déduit de la proposition 3.15.

Proposition 3.26. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles. Soit $F \subset \mathbb{R}$, avec $f(E) \subset F$ et g une fonction définie sur F, à valeurs réelles. Soit $a \in E$ et $b = f(a) \in F$. Si f est continue au point a et si g est continue au point b, alors $g \circ f$ est continue au point a.*

Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.

Proposition 3.27. *Soit f une fonction monotone définie sur un intervalle*[4] *I de $\mathbb{R}$. Si l'image $f(I)$ de f est un intervalle, alors f est continue.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer f croissante, sinon, on fait la démonstration pour $-f$. On note a et b les extrémités (éventuellement infinies) de I.

• Soit $x_0 \in]a, b[$. D'après la proposition 3.19, au point x_0, la fonction f a une limite à gauche, notée $f(x_0 - 0)$ et une limite à droite, notée $f(x_0 + 0)$. On a

$$f(x_0 - 0) \leq f(x_0) \leq f(x_0 + 0)$$

et

$$\begin{aligned} &\forall x \in]a, x_0[\quad f(x) \leq f(x_0 - 0), \\ &\forall x \in]x_0, b[\quad f(x_0 + 0) \leq f(x). \end{aligned}$$

Si $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$, alors

$$]f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)[\cap f(I) = \{f(x_0)\}$$

donc $f(I) = \{f(x_0)\}$, ce qui est contradictoire. Par conséquent $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ et f est continue au point x_0.

• On suppose que $a \in I$ (donc a est fini) : d'après la proposition 3.17, la fonction f a une limite à droite au point a, notée $f(a + 0)$. On a

$$f(a) \leq f(a + 0)$$

et

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad f(a + 0) \leq f(x).$$

Si $f(a) < f(a + 0)$, alors

$$[f(a), f(a + 0)[\cap f(I) = \{f(a)\}$$

donc $f(I) = \{f(a)\}$, ce qui est contradictoire. Par conséquent $f(a) = f(a + 0)$ et f est continue au point a.

• Si $b \in I$, on démontre de même que la fonction f est continue au point b. □

Proposition 3.28. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle borné, ouvert ou semi-ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Si f est monotone et bornée, alors elle peut se prolonger par continuité aux extrémités de I, qui n'appartiennent pas à I, en une fonction monotone.*

Si f est strictement monotone, son prolongement est strictement monotone.

DÉMONSTRATION. On peut supposer f croissante, sinon, on fait la démonstration pour $-f$. On note a et b les extrémités (finies) de I.

- On suppose $a \notin I$. D'après la proposition 3.17, f admet $\inf_{x \in I} f(x)$ pour limite à droite au point a.
- On suppose $b \notin I$. D'après la proposition 3.17, f admet $\sup_{x \in I} f(x)$ pour limite à gauche au point b.

La fonction f peut donc se prolonger par continuité en a et/ou b en une fonction croissante.

On précise l'étude quand f est strictement croissante. Supposons $a \notin I$. S'il existe $x_0 \in I$, avec $x_0 > a$, tel que $\inf_{x \in I} f(x) = f(x_0)$, comme

$$\forall y \in I \cap]a, x_0] \quad \inf_{x \in I} f(x) \leq f(y) \leq f(x_0),$$

on a

$$\forall y \in I \cap]a, x_0] \quad f(y) = f(x_0),$$

qui est impossible. Donc

$$\forall x \in I \quad x > a \Rightarrow \inf_{x \in I} f(x) < f(x).$$

4. quelconque : ouvert, fermé, semi-ouvert, borné ou non

On raisonne de même si $b \notin I$. $\square$

Définition 3.9. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur E, à valeurs réelles.

(1) Soit $a \in E$.

(a) a est un *minimum* de f sur E si f est minorée et si $f(a)$ est égal à la borne inférieure de f sur E :

$$\forall x \in E \quad f(x) \geq f(a).$$

On le note

$$\min_{x \in E} f(x).$$

(b) a est un *minimum strict* de f sur E si

$$\forall x \in E \quad x \neq a \Rightarrow \ f(x) > f(a),$$

(c) a est un *maximum* de f sur E si f est majorée et si $f(a)$ est égal à la borne supérieure de f sur E :

$$\forall x \in E \quad f(x) \leq f(a).$$

On le note

$$\max_{x \in E} f(x).$$

(d) a est un *maximum strict* de f sur E si

$$\forall x \in E \quad x \neq a \Rightarrow \ f(x) < f(a),$$

(e) a est un *extremum* de f sur E si c'est un minimum ou un maximum de f sur E ; c'est un *extremum strict* de f sur E si c'est un minimum strict ou un maximum strict de f sur E.

(2) Soit $a \in E$.

(a) a est un *minimum local* de f sur E s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap E \quad f(x) \geq f(a)$$

(b) a est un *minimum local strict* de f sur E si

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap E \quad x \neq a \Rightarrow \ f(x) > f(a),$$

(c) a est un *maximum local* de f sur E s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap E \quad f(x) \leq f(a)$$

(d) a est un *maximum local strict* de f sur E si

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap E \quad x \neq a \ \Rightarrow \ f(x) < f(a),$$

(e) a est un *extremum local* de f sur E si c'est un minimum local ou un maximum local de f sur E ; c'est un *extremum local strict* de f sur E si c'est un minimum local strict ou un maximum local strict de f sur E.

Théorème 3.1. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors*

(1) *f est bornée,*

(2) *f a un maximum et un minimum sur $[a, b]$.*

Démonstration. (1) On suppose que f n'est pas bornée. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b] \quad |f(x_n)| \geq n.$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß (théorème 2.3), de la suite bornée $(x_n)_n$, on peut extraire une sous-suite $(x_{p_n})_n$ qui converge vers un réel $x^* \in [a, b]$. Mais la suite $(f(x_{p_n}))_n$, non bornée, ne converge pas. Comme f est continue au point x^*, on aboutit à une contradiction. Donc f est bornée.

(2) On note m la borne inférieure de $f(E)$ et M sa borne supérieure. On suppose que m n'est pas atteint. Alors la fonction

$$x \in [a, b] \to \frac{1}{f(x) - m} \in \mathbb{R}_+^*$$

est définie, donc continue sur $[a, b]$, d'après la proposition 3.24. Elle est majorée d'après le (1). Soit $\mu > 0$ sa borne supérieure ; alors

$$\forall x \in [a, b] \quad \frac{1}{f(x) - m} \leq \mu,$$

donc

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq m + \frac{1}{\mu} > m.$$

Mais alors, m n'est pas la borne inférieure de f sur E : on aboutit à une contradiction. Donc f a un minimum sur $[a, b]$. On montre de même que f a un maximum sur $[a, b]$. □

Exemple 3.22. Si une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ vérifie :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) > 0,$$

alors il existe $m > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq m.$$

Ce n'est plus vérifié si l'intervalle de départ n'est pas fermé borné : considérer les fonctions

$$f_1 : x \in]0, 1] \to x^2 \quad \text{ou} \quad f_2 : x \in [1, +\infty[\to \frac{1}{x}.$$

Théorème 3.2 (Valeurs intermédiaires). *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit*

$$m := \begin{cases} \inf_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée sur } I, \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$M := \begin{cases} \sup_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée sur } I, \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f atteint toute valeur de l'intervalle $]m, M[$.

Démonstration. Si $m = M$, la fonction f est constante et le résultat est évident. On suppose $m < M$: soit γ un réel tel que $m < \gamma < M$. Il existe $a, b \in I$ tels que

$$m \leq f(a) < \gamma < f(b) \leq M.$$

On suppose $a < b$; on a $[a, b] \subset I$. Soit

$$A := \{x \in [a, b] : f(x) \leq \gamma\}.$$

C'est un ensemble non vide (il contient a) majoré par b. Daprès le théorème 2.1, A a une borne supérieure $c \in \mathbb{R}$. D'après la remarque qui suit la proposition 2.17, il existe une suite (croissante) $(x_n)_n \subset A$ qui converge vers c : donc $c \in [a,b]$. Comme f est continue au point c, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(c)$, d'après la proposition 3.23. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq \gamma,$$

on a $f(c) \leq \gamma$. Comme $\gamma < f(b)$, on a $c < b$. Il existe donc une suite (décroissante) $(y_n)_n \subset [a,b]$ qui converge vers c, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(y_n) > \gamma,$$

Comme f est continue au point c, la suite $(f(y_n))_n$ converge vers $f(c)$, d'après la proposition 3.23. Donc $f(c) \geq \gamma$. Par conséquent $f(c) = \gamma$: le point $\gamma \in]m,M[$ est atteint par f.

La démonstration est analogue si $a > b$. □

Corollaire 1. *Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors son image est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (théorème 3.2), et en gardant ses notations, l'image $f(I)$ contient l'intervalle $]m,M[$. Il est contenu dans l'intervalle

- ⋆ $[m,M]$, si f est bornée sur I,
- ⋆ $]-\infty,M]$, si f n'est pas minorée sur I, mais est majorée,
- ⋆ $]m,+\infty[$, si f est minorée sur I, mais n'est pas majorée,
- ⋆ $]-\infty,+\infty[$, si f n'est ni minorée ni majorée sur I.

D'où le résultat. □

On peut préciser l'image de f, quand celle-ci est strictement monotone.

Exemple 3.23. Soit f une fonction continue strictement croissante sur un intervalle I d'extrémités a et b (éventuellement infinies) ;

$$\text{si } I = [a,b], \text{ alors} \quad f(I) = [f(a), f(b)],$$

$$\text{si } I =]a,b], \text{ alors} \quad f(I) = \begin{cases}]\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x), f(b)] & \text{si } f \text{ est minorée} \\ ]-\infty, f(b)] & \text{si } f \text{ n'est pas minorée} \end{cases}$$

$$\text{si } I = [a,b[, \text{ alors} \quad f(I) = \begin{cases} [f(a), \lim\limits_{x\to b, x<b} f(x)[& \text{si } f \text{ est majorée} \\ [f(a), +\infty[& \text{si } f \text{ n'est pas majorée} \end{cases}$$

si $I =]a,b[$, alors

$$f(I) = \begin{cases}]\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x), \lim\limits_{x\to b, x<b} f(x)[& \text{si } f \text{ est minorée et majorée} \\ ]\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x), +\infty[& \text{si } f \text{ est minorée mais non majorée} \\ ]-\infty, \lim\limits_{x\to b, x<b} f(x)[& \text{si } f \text{ est majorée mais non minorée} \\ ]-\infty, +\infty[& \text{si } f \text{ n'est ni minorée, ni majorée} \end{cases}$$

On le montre dans ce qui suit.

- ⋆ Si $I = [a,b]$, alors $f(I)$ est un intervalle qui contient $[f(a), f(b)]$; par ailleurs, si $x \in [a,b]$, alors $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, donc $f(x) \in [f(a), f(b)]$.
- ⋆ Si $I =]a,b]$, alors $f(I)$ est un intervalle qui contient $]\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x), f(b)]$ si f est minorée ou qui contient $]-\infty, f(b)]$, si f n'est pas minorée ; par ailleurs, si $x \in]a,b]$, alors $\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x) < f(x) \leq f(b)$, si f est minorée, donc $f(x) \in]\lim\limits_{x\to a, x>a} f(x), f(b)]$.
- ⋆ Les autres cas sont analogues.

On a de même.

Exemple 3.24. Soit f une fonction strictement décroissante sur un intervalle I d'extrémités a et b (éventuellement infinies) ;

si $I = [a,b]$, alors $\quad f(I) = [f(b), f(a)]$,

si $I =]a,b]$, alors $\quad f(I) = \begin{cases} [f(b), \lim\limits_{x\to a, x>a} f(x)[& \text{si } f \text{ est majorée} \\ [f(b), +\infty[& \text{si } f \text{ n'est pas majorée} \end{cases}$

si $I = [a,b[$, alors $\quad f(I) = \begin{cases}]\lim\limits_{x\to b, x<b} f(x), f(a)[& \text{si } f \text{ est minorée} \\ ]-\infty, f(a)[& \text{si } f \text{ n'est pas minorée} \end{cases}$

si $I =]a,b[$, alors

$$f(I) = \begin{cases}]\lim\limits_{x\to b, x<b} f(x), \lim\limits_{x\to a, x>a} f(x)[& \text{si } f \text{ est minorée et majorée} \\ ]\lim\limits_{x\to b, x<b} f(x), +\infty[& \text{si } f \text{ est minorée mais non majorée} \\ ]-\infty, \lim\limits_{x\to a, x>a} f(x)[& \text{si } f \text{ est majorée mais non minorée} \\ ]-\infty, +\infty[& \text{si } f \text{ n'est ni minorée, ni majorée} \end{cases}$$

On déduit du théorème 3.1 et du théorème des valeurs intermédiaires (théorème 3.2) :

Corollaire 2. *Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, alors son image est un intervalle fermé borné $[c,d]$ de $\mathbb{R}$, où*

$$c := \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \textit{et} \quad d := \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Remarque 3.5. Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, alors

$$\inf_{x\in]a,b[} f(x) = \inf_{x\in[a,b[} f(x) = \inf_{x\in]a,b]} f(x) = \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \tag{3.1}$$

$$\sup_{x\in]a,b[} f(x) = \sup_{x\in[a,b[} f(x) = \sup_{x\in]a,b]} f(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x). \tag{3.2}$$

En effet, on a

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \inf_{x\in[a,b[} f(x) \le \inf_{x\in]a,b[} f(x),$$
$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le \inf_{x\in]a,b]} f(x) \le \inf_{x\in]a,b[} f(x).$$

Notons

$$m := \inf_{x\in[a,b]} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad \mu := \inf_{x\in]a,b[} f(x);$$

on a donc $m \le \mu$. Par ailleurs, il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que

$$m = f(\alpha).$$

– Si $\alpha \in]a,b[$, alors $\mu \le f(\alpha) = m$.
– Si $\alpha = a$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > \frac{1}{b-a} \quad f\Big(a + \frac{1}{n}\Big) \ge \mu$$

donc, comme f est continue en a, on a $m = f(a) \ge \mu$.
– Si $\alpha = b$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > \frac{1}{b-a} \quad f\Big(b - \frac{1}{n}\Big) \ge \mu$$

donc, comme f est continue en b, on a $m = f(a) \ge \mu$.

Par conséquent, dans tous les cas $m \geq \mu$, donc $m = \mu$. Cela donne l'égalité 3.1. L'égalité 3.2 se démontre de la même manière.

Enfin, il résulte du corollaire 1 du théorème des valeurs intermédiaires (théorème 3.2) :

Corollaire 3. *Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $a, b \in I$ sont tels que $f(a)f(b) \leq 0$, alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Exemple 3.25. Soient $n \in \mathbb{N}$ un entier non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels avec $a_n \neq 0$. On définit une fonction (polynomiale)

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que n est impair ; alors

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n > 0 \\ +\infty & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} p(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a_n < 0 \\ +\infty & \text{si } a_n > 0 \end{cases}$$

Il existe donc $A, B > 0$ tels que $p(-A)p(B) < 0$: par conséquent il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $p(x_0) = 0$.

3. Dérivation

On examine l'opération de dérivation et les propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle. On étend cette étude en considérant les dérivations multiples.

Définition 3.10. Soit $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et f une fonction définie sur $]a-\alpha, a+\alpha[$, à valeurs réelles. On dit que f est *dérivable au point a* si l'application

$$x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\} \to \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

a un réel comme limite au point a : on l'appelle la *dérivée de f au point a* et on le note

$$f'(a) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx}(a).$$

On dit que f est *dérivable* sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ si elle l'est en tout point de cet intervalle. La fonction

$$f' : x \in I \to f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx} : x \in I \to \frac{df}{dx}(x)$$

est appelée la *fonction dérivée* ou la *dérivée* de f.

Exemple 3.26. Soit la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Soit la fonction

$$g : x \in \mathbb{R}^* \to \sin\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathbb{R}.$$

Les suites $(x_n)_{n>0}$ et $(y_n)_n$ définies par

$$x_n := \frac{2}{(4n+1)\pi} \quad \text{et} \quad y_n := \frac{2}{(4n+3)\pi}$$

convergent vers 0 ; on a

$$g(x_n) = 1 \quad \text{et} \quad g(y_n) = -1$$

donc la fonction g n'admet pas de limite au point 0 ; donc la fonction f n'est pas dérivable au point 0.

Définition 3.11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

(1) Soit f une fonction définie sur $]a-\alpha, a]$, à valeurs réelles. On dit que f est *dérivable à gauche au point* a si l'application

$$x \in]a-\alpha, a[\to \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$

a un réel comme limite à gauche au point a : on l'appelle la *dérivée à gauche de* f *au point* a et on le note

$$f'_g(a).$$

(2) Soit f une fonction définie sur $[a, a+\alpha[$, à valeurs réelles. On dit que f est *dérivable à droite au point* a si l'application

$$x \in]a, a+\alpha[\to \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$

a un réel comme limite à droite au point a : on l'appelle la *dérivée à droite de* f *au point* a et on le note

$$f'_d(a).$$

On déduit de la proposition 3.3.

Proposition 3.29. *Soit $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et f une fonction définie sur $]a-\alpha, a+\alpha[$, à valeurs réelles. La fonction f est dérivable au point a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite au point a et si sa dérivée à gauche est égale à sa dérivée à droite en ce point ; cette valeur est alors sa dérivée au point a.*

Exemple 3.27. Soit la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour $x < 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^2.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, f est dérivable à gauche au point 0 et l'on a $f'_g(0) = 0$. Pour $x > 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, f est dérivable à droite au point 0 et l'on a $f'_d(0) = 0$. Donc f est dérivable au point 0 et $f'(0) = 0$.

Proposition 3.30. *Si l'application f est dérivable au point a, alors elle est continue au point a.*

Démonstration. On a

$$\lim_{x\to a, x\neq a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a, x\neq a} (x-a) = 0,$$

donc

$$\lim_{x\to a, x\neq a} (f(x)-f(a)) = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to a} (f(x)-f(a)) = 0.$$

ce qui montre que f est continue au point a. □

On démontre de même.

Proposition 3.31. *Si l'application f est dérivable à gauche (à droite) au point a, alors elle est continue à gauche (à droite) au point a.*

Définition 3.12. Soit f une fonction définie sur un intervalle I d'extrémités a, b.
- Si $a \in I$, $b \notin I$, on dit que f est *dérivable* sur I si elle est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et dérivable à droite au point a. Elle est alors continue sur l'intervalle $[a, b[$. On note $f'(a)$ sa dérivée à droite au point a.
- Si $a \notin I$, $b \in I$, on dit que f est *dérivable* sur l'intervalle $]a, b]$ si elle est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et dérivable à gauche au point b. Elle est alors continue sur l'intervalle $]a, b]$. On note $f'(b)$ sa dérivée à gauche au point b.
- Si $a, b \in I$, on dit que f est *dérivable* sur l'intervalle $[a, b]$ si elle est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, dérivable à droite au point a et dérivable à gauche au point b. Elle est alors continue sur l'intervalle $[a, b]$. On note $f'(a)$ sa dérivée à droite au point a et $f'(b)$ sa dérivée à gauche au point b.

La fonction
$$f' : x \in I \to f'(x) \quad \text{ou} \quad \frac{df}{dx} : x \in I \to \frac{df}{dx}(x)$$
est appelée la *fonction dérivée* ou la *dérivée* de f.

Proposition 3.32. *Soit $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$; soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $]a - \alpha, a + \alpha[$, à valeurs réelles et soit k un réel. On suppose que f et g sont dérivables au point a.*

(1) *Les fonctions $f + g$ et kf sont dérivables au point a ; on a*
$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad \textit{et} \quad (kf)'(a) = kf'(a).$$

(2) *La fonction fg est dérivable au point a et*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(3) *Si $g(a) \neq 0$, alors f/g est définie dans un intervalle ouvert contenant a, est dérivable au point a et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$
En particulier
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration. (1) est déduit facilement de la proposition 3.6.

(2) On écrit
$$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
et on utilise la proposition 3.6.

(3) La fonction f/g est définie et continue dans un intervalle $]a - \eta, a + \eta[$, d'après la proposition 3.6. On écrit
$$\begin{aligned}\frac{f(x)/g(x) - f(a)/g(a)}{x - a} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(a) - \frac{f(a)}{g(x)g(a)} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\end{aligned}$$
et on utilise la proposition 3.6. □

Remarque 3.6. On peut remplacer l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ par $]a-\alpha, a]$ ou par $[a, a+\alpha[$: cela permet d'examiner la dérivabilité en un point qui est une extrémité de l'intervalle de définition.

Exemple 3.28. (1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On démontre par récurrence

$$\forall x \in I \quad \frac{d}{dx}\big(f^n(x)\big) = nf^{n-1}(x)f'(x). \tag{3.3}$$

C'est vrai pour $n = 1$. Supposons (3.3) établi. Alors, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\big(f^{n+1}(x)\big) &= \frac{d}{dx}\big(f(x)f^n(x)\big) = f'(x)f^n(x) + f(x)nf^{n-1}(x)f'(x)\\ &= (n+1)f^n(x)f'(x).\end{aligned}$$

Donc le résultat est établi au rang $n+1$.

(2) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur I et soit $n < 0$ un entier. Comme

$$\forall x \in I \quad f^n(x) = \frac{1}{f^{-n}(x)},$$

on écrit, pour tout $x \in I$,

$$\frac{d}{dx}\big(f^n(x)\big) = -\frac{d}{dx}\big(f^{-n}(x)\big)\frac{1}{f^{-2n}(x)} = nf^{-n-1}(x)f'(x)\frac{1}{f^{-2n}(x)} = nf^{n-1}(x)f'(x),$$

ce qui donne (3.3).

Proposition 3.33. *Soit $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et f une fonction définie sur $]a-\alpha, a+\alpha[$. Soit $b := f(a)$ et $\beta > 0$, tel que $f\big(]a-\alpha, a+\alpha[\big) \subset]b-\beta, b+\beta[$. Soit g une fonction définie sur $]b-\beta, b+\beta[$. Si f est dérivable au point a et si g est dérivable au point b, alors $g \circ f$ est dérivable au point a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(b)f'(a).$$

Si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable.

Démonstration. On définit une fonction φ sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ par

$$\varphi(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a,\\ f'(a) & \text{si } x = a.\end{cases}$$

Alors φ est continue au point a et

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\quad f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a).$$

De même, on définit une fonction ψ sur $]b-\beta, b+\beta[$ par

$$\psi(y) := \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b} & \text{si } y \neq b,\\ g'(b) & \text{si } y = b.\end{cases}$$

Alors ψ est continue au point b et

$$\forall y \in]b-\beta, b+\beta[\quad g(y) - g(b) = \psi(y)(y-b).$$

On a, pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$:

$$g(f(x)) - g(b) = \psi(f(x))(f(x)-b) = \psi(f(x))\varphi(x)(x-a),$$

donc, si $x \neq a$,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \psi(f(x))\varphi(x).$$

D'après la proposition 3.30, f est continue au point a. Donc, d'après la proposition 3.26, $\psi \circ f$ est continue au point a. On en déduit, grâce à la proposition 3.32, que $\psi(f(x))\varphi(x)$ est continue au point a, c'est-à-dire

$$\lim_{x \to a} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \psi(f(a))\varphi(a) = g'(b)f'(a).$$

qui prouve le résultat □

Remarque 3.7. On peut remplacer l'intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ par $]a-\alpha, a]$ ou par $[a, a+\alpha[$ et l'intervalle $]b-\beta, b+\beta[$ par l'intervalle $]b-\beta, b]$ ou par l'intervalle $[b, b+\beta[$: cela permet d'examiner la dérivabilité en un point qui est une extrémité de l'intervalle de définition.

Proposition 3.34. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable au point $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors l'application réciproque*[5] *f^{-1} est dérivable au point $b := f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Démonstration. Comme f est dérivable au point a,

$$\lim_{x \to a, x \in I \setminus \{a\}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Comme $f'(a) \neq 0$

$$\lim_{x \to a, x \in I \setminus \{a\}} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Soit $J := f(I)$. Alors $x \in I \setminus \{a\} \Leftrightarrow f(x) \in J \setminus \{b\}$. Comme f^{-1} est continue au point b,

$$\lim_{y \to b, y \in J \setminus \{b\}} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a.$$

Par conséquent

$$\lim_{y \to b, y \in J \setminus \{b\}} \frac{f^{-1}(y) - a}{f\big(f^{-1}(y)\big) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Donc, comme $f^{-1}(b) = a$,

$$\lim_{y \to b, y \in J \setminus \{b\}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

qui est le résultat. □

Exemple 3.29. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; l'application

$$x \in \mathbb{R}_+^* \to x^n \in \mathbb{R}_+^*$$

est continue, strictement croissante, dérivable, de dérivée

$$x \in \mathbb{R}_+^* \to nx^{n-1} \in \mathbb{R}_+^*.$$

Donc l'application

$$x \in \mathbb{R}_+^* \to \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+^*$$

est dérivable, de dérivée

$$x \in \mathbb{R}_+^* \to \frac{1}{n\big(\sqrt[n]{x}\big)^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

5. qui existe et est continue d'après le théorème **??**

Exemple 3.30. La fonction

$$x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\to \operatorname{tg} x \in \mathbb{R}$$

est continue, strictement croissante, dérivable, de dérivée

$$x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\to 1 + \operatorname{tg}^2 x \in \mathbb{R}.$$

Donc la fonction

$$x \in \mathbb{R} \to \operatorname{arctg} x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

est dérivable, de dérivée

$$x \in \mathbb{R} \to \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

Proposition 3.35. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Si f a un extremum local en un point x_0 intérieur à I et si f est dérivable au point x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. On suppose que f a un minimum local en x_0 : il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset I$ et

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\quad f(x) \geq f(x_0).$$

Alors

$$\forall x \in]x_0 - \eta, x_0[\quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \eta[\quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

On déduit alors de la proposition 3.12 :

$$f'(x_0) \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) \geq 0,$$

d'où le résultat. La démonstration est analogue si f a un minimum local. □

Exemple 3.31. La fonction $x \in [0,1] \to x^2$ a un maximum local au point $x = 1$, où sa dérivée ne s'annule pas.

Théorème 3.3 (Rolle)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue sur un intervalle $[a,b]$ dérivable sur l'intervalle $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in]a,b[$, tel que*

$$f'(c) = 0.$$

Démonstration. D'après le théorème 3.1, f a un minimum m et un maximum M sur $[a,b]$. S'ils sont égaux, f est constante et donc f' est nulle sur $]a,b[$. Sinon, l'un d'entre eux est différent de $f(a) = f(b)$. Alors f a un extremum en un point $c \in]a,b[$. D'après la proposition 3.35, $f'(c) = 0$. □

Théorème 3.4 (Accroissements finis)**.** *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$. Il existe alors $c \in]a,b[$, tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Démonstration. On utilise le théorème de Rolle (théorème 3.3) avec la fonction

$$g : x \in [a,b] \to f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \right) \in \mathbb{R}.$$

qui vérifie

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Il existe donc $c \in]a,b[$, tel que $g'(c) = 0$, soit

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

qui est le résultat. □

Remarque 3.8. Sous les hypothèses du théorème précédent, on a aussi

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a-b).$$

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle I privé de ses extrémités.

Corollaire 1. *Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur un intervalle I, dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Soit $x \in I$, alors pour tout réel h tel que $x+h \in I$, il exite $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h).$$

Démonstration. Si $h = 0$, tout $\theta \in \mathbb{R}$ convient. Si $h > 0$, on utilise le théorème des accroissements finis (théorème 3.4) sur l'intervalle $[x, x+h] \subset I$. Si $h < 0$, on utilise le même théorème sur l'intervalle $[x+h, x] \subset I$. □

Exemple 3.32. On a, pour $x \geq 0$:

$$\sin x = \sin 0 + x\cos(\theta x) = x\cos(\theta x),$$

où $\theta \in]0,1[$. Comme $\cos(\theta x) \leq 1$, on a

$$\forall x \geq 0 \quad \sin x \leq x.$$

Supposons

$$\exists x_0 > 0 \quad \sin x_0 - x_0 = 0$$

Nécessairement $x_0 \leq 1$. Comme $\sin 0 - 0 = 0$, on a, en utilisant le théorème de Rolle (théorème 3.3) avec la fonction $x \in [0,1] \to \sin x - x$:

$$\exists \xi \in]0, x_0[\subset]0,1[\quad \cos\xi - 1 = 0,$$

ce qui est impossible. Donc

$$\forall x > 0 \quad \sin x < x.$$

Corollaire 2. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$. S'il existe des réels m et M tels que*

$$\forall x \in]a,b[\quad m \leq f'(x) \leq M$$

alors

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Démonstration. D'après le théorème des accroissements finis (théorème 3.4) il existe $c \in]a,b[$, tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Comme $m \leq f'(x) \leq M$, on obtient le résultat. □

Corollaire 3. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle $]a,b[$. Si f' est bornée sur $]a,b[$, alors*

$$\forall x', x'' \in [a,b] \quad |f(x') - f(x'')| \leq \Big(\sup_{x \in]a,b[} |f'(x)|\Big)|x' - x''|.$$

DÉMONSTRATION. Le résultat est trivial si $x' = x''$. On supposera $x' < x''$. La fonction f est continue sur l'intervalle $[x', x'']$, dérivable sur l'intervalle $]x', x''[$. D'après le théorème des accroissements finis (théorème 3.4), il existe $\xi \in]x', x''[$, tel que

$$f(x') - f(x'') = f'(\xi)(x' - x'').$$

Par conséquent

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f'(\xi)| \cdot |x' - x''|.$$

qui donne le résultat. □

Remarque 3.9. Sous les hypothèses du corollaire 3, la fonction f est lipschitzienne.

Corollaire 4. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie, continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et dont la dérivée peut se prolonger par continuité sur l'intervalle $[a, b]$. Alors f est lipschitzienne.*

DÉMONSTRATION. Soit $\widetilde{f'}$ le prolongement par continuité de f'. Il est borné d'après le théorème 3.1, donc f' est bornée sur $]a, b[$; on utilise alors le corollaire 3. □

Exemple 3.33. Soit la fonction

$$f : x \in [0, 1] \to \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est une fonction continue, dérivable sur $]0, 1[$:

$$\forall x \in]0, 1[\quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

et la dérivée est continue sur $]0, 1[$. Mais on ne peut la prolonger par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

La fonction f a une dérivée à droite en 0, qui est nulle.

Théorème 3.5. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$; si f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x)$ est un nombre réel, alors f est dérivable au point a et*

$$f'(a) = \lim_{x \to a, x \neq a} f'(x),$$

donc f' est continue au point a.

DÉMONSTRATION. Notons $\ell := \lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x)$. Soit $x \in I$ avec $x < a$. La fonction f est continue sur $[x, a] \subset I$ et dérivable sur $]x, a[\subset I \setminus \{a\}$. D'après le théorème des accroissements finis (théorème 3.4), il existe $y(x) \in]x, a[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(y(x)).$$

Comme $\lim\limits_{x \to a, x < a} y(x) = a$, on a $\lim\limits_{x \to a, x < a} f'(y(x)) = \ell$. On démontre de même $\lim\limits_{x \to a, x > a} f'(y(x)) = \ell$; d'où le résultat. □

On démontre de la même manière le résultat suivant.

Proposition 3.36. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$: on suppose que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$.*

(1) *Si* $\lim_{x\to a, x<a} f'(x) = -\infty$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x<a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty.$$

(2) *Si* $\lim_{x\to a, x>a} f'(x) = -\infty$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x>a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty.$$

(3) *Si* $\lim_{x\to a, x<a} f'(x) = +\infty$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x<a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty.$$

(4) *Si* $\lim_{x\to a, x>a} f'(x) = +\infty$, *alors*

$$\lim_{x\to a, x>a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty.$$

Dans les quatre cas, la fonction f n'est pas dérivable au point a.

Exemple 3.34. On examine les propriétés de dérivation de trois fonctions aux bords de l'intervalle de définition.

(1) La fonction sin est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, strictement croissante, à valeurs dans $[-1, 1]$. Elle est dérivable, sa dérivée est la fonction cos qui ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc la fonction

$$\arcsin : [-1, +1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

est continue. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée vaut

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Comme

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

la fonction arcsin n'est pas dérivable aux points -1 et 1.

(2) Soit la fonction

$$f : x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \to \arcsin(1-x^2).$$

Elle est continue ; elle est dérivable sur $D := \left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$. Pour $x \in D$,

$$f'(x) = -\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$$

Comme

$$\lim_{x\to-\sqrt{2},x>-\sqrt{2}}\Big(-\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}\Big)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0,x<0}\Big(-\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}\Big)=\sqrt{2}$$
$$\lim_{x\to 0,x>0}\Big(-\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}\Big)=-\sqrt{2}$$
$$\lim_{x\to\sqrt{2},x<\sqrt{2}}\Big(-\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}\Big)=-\infty$$

la fonction f n'est pas dérivable à droite au point $-\sqrt{2}$; elle est dérivable à gauche au point 0 et $f'_g(0)=\sqrt{2}$; elle est dérivable à droite au point 0 et $f'_d(0)=-\sqrt{2}$ (donc elle n'est pas dérivable au point 0) ; elle n'est pas dérivable à gauche au point $\sqrt{2}$.

(3) Soit la fonction

$$g : x\in\big[-\sqrt[4]{2},\sqrt[4]{2}\big]\to \arcsin(1-x^4).$$

Elle est continue ; elle est dérivable sur $D:=\big]-\sqrt[4]{2},0\big[\cup\big]0,\sqrt[4]{2}\big[$. Pour $x\in D$,

$$g'(x)=-\frac{4x}{\sqrt{2-x^4}}$$

Comme

$$\lim_{x\to-\sqrt[4]{2},x>-\sqrt[4]{2}}\Big(-\frac{4x}{\sqrt{2-x^4}}\Big)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 0,x<0}\Big(-\frac{4x}{\sqrt{2-x^4}}\Big)=0$$
$$\lim_{x\to 0,x>0}\Big(-\frac{4x}{\sqrt{2-x^4}}\Big)=0$$
$$\lim_{x\to\sqrt[4]{2},x<\sqrt[4]{2}}\Big(-\frac{4x}{\sqrt{2-x^4}}\Big)=-\infty$$

la fonction g n'est pas dérivable à droite au point $-\sqrt[4]{2}$; elle est dérivable au point 0 et $g'(0)=0$; elle n'est pas dérivable à gauche au point $\sqrt[4]{2}$.

Proposition 3.37 (Règle de l'Hôpital)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $a\in I$. Soient f et g deux fonctions définies, continues sur I. On suppose qu'elles sont dérivables sur $I\setminus\{a\}$ et vérifient*

$$\begin{cases}\forall x\in I\setminus\{a\}\quad g(x)\neq 0\ \textit{et}\ g'(x)\neq 0\\ f(a)=g(a)=0.\end{cases}$$

Si

$$\lim_{x\to a,x\in I\setminus\{a\}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$$

alors

$$\lim_{x\to a,x\in I\setminus\{a\}}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell.$$

Démonstration. Soit $x\in I, x<a$. On définit une fonction $\underline{h}_x$ sur l'intervalle $[x,a]\subset I$ par

$$\underline{h}_x(y):=f(y)-\frac{g(y)}{g(x)}f(x),\quad x\le y\le a.$$

Elle est continue sur $[x, a]$, dérivable sur $]x, a[$, avec

$$\forall y \in]x, a[\quad \underline{h}'_x(y) := f'(y) - \frac{g'(y)}{g(x)} f(x).$$

Comme $\underline{h}_x(x) = \underline{h}_x(a) = 0$, on déduit du théorème des accroissements finis (théorème 3.4), qu'il existe $\underline{y}(x) \in]x, a[$ tel que $\underline{h}'_x(\underline{y}(x)) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{f'(\underline{y}(x))}{g'(\underline{y}(x))} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

On démontre de même que pour tout $x \in I, x > a$, il existe $\overline{y}(x) \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f'(\overline{y}(x))}{g'(\overline{y}(x))} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Par conséquent pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, il existe $y(x) \in I \setminus \{a\}$ tel que

$$|y(x) - a| < |x - a| \quad \text{et} \quad \frac{f'(y(x))}{g'(y(x))} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Soit $\varepsilon > 0$: il existe $\eta > 0$ tel que

$$y \in I \setminus \{a\} \text{ et } |y - a| < \eta \ \Rightarrow \ \left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - \ell\right| < \varepsilon.$$

Comme

$$x \in I \setminus \{a\} \text{ et } |x - a| < \eta \ \Rightarrow \ y(x) \in I \setminus \{a\} \text{ et } |y(x) - a| < \eta$$

on a

$$x \in I \setminus \{a\} \text{ et } |x - a| < \eta \ \Rightarrow \ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| = \left|\frac{f'(y(x))}{g'(y(x))} - \ell\right| < \varepsilon.$$

D'où le résultat. □

Proposition 3.38. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.*
La fonction f est croissante sur I si et seulement si

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) \geq 0.$$

Elle est décroissante sur I si et seulement si

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) \leq 0.$$

Démonstration. (1) Supposons f croissante sur I. Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$:

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \ \ x > x_0 \ \Rightarrow \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

donc $f'(x_0) \geq 0$.

Réciproquement, supposons

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) \geq 0.$$

Soient $x, y \in I$, avec $x < y$. D'après le théorème des accroissements finis (théorème 3.4), comme f est continue sur l'intervalle $[x, y]$ et dérivable sur l'intervalle $]x, y[$, il existe $\xi \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x).$$

Donc $f(y) \geq f(x)$. Cela montre que f est croissante sur I.

La deuxième équivalence est démontrée en remplaçant f par $-f$ dans la démonstration précédente. □

Corollaire. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Elle est constante si et seulement si*

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) = 0.$$

Démonstration. Une fonction est constante si et seulement si elle est croissante et décroissante. Donc

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; f \text{ est constante sur } \overset{\circ}{I}.$$

Comme f est dérivable sur I, elle est continue sur I, donc

$$f \text{ est constante sur } \overset{\circ}{I} \;\Leftrightarrow\; f \text{ est constante sur } I.$$

D'où le résultat. □

Proposition 3.39. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.*
Si

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) > 0$$

alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Si

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) < 0$$

alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Démonstration. On reprend une partie de la démonstration de la proposition 3.38. □

Remarque 3.10. La fonction $x \in \mathbb{R} \to x^3$ est strictement croissante et pourtant $f'(0) = 0$.

Proposition 3.40. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.*
La fonction f est strictement croissante sur I si et seulement si

(1) $\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) \geq 0$,
(2) *il n'existe pas de sous intervalle $J \subset I$, non réduit à un point tel que*

$$\forall x \in J \quad f'(x) = 0.$$

Elle est strictement décroissante sur I si et seulement si

(1) $\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) \leq 0$,
(2) *il n'existe pas de sous intervalle $J \subset I$, non réduit à un point tel que*

$$\forall x \in J \quad f'(x) = 0.$$

Démonstration. • Supposons f strictement croissante : elle est alors croissante, donc

$$\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) \geq 0.$$

S'il existait un sous intervalle $J \subset I$, non réduit à un point tel que

$$\forall x \in J \quad f'(x) = 0$$

alors f serait constante sur J, ce qui est impossible.
• Réciproquement, on suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

(1) $\forall x \in \overset{\circ}{I} \quad f'(x) \geq 0$,
(2) il n'existe pas de sous intervalle $J \subset I$, non réduit à un point tel que

$$\forall x \in J \quad f'(x) = 0.$$

Alors f est croissante sur I. Si f n'était pas strictement croissante sur I, il existerait $x, y \in I$ tels que
$$x < y \quad \text{et} \quad f(x) = f(y).$$
Pour tout $z \in]x, y[$, on a $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$, donc
$$\forall z \in]x, y[\quad f(x) = f(z) = f(y)$$
donc f serait constante sur $]x, y[$, donc à dérivée nulle sur cet intervalle, ce qui est impossible.

La deuxième équivalence est démontrée en remplaçant f par $-f$ dans la démonstration précédente. □

Proposition 3.41. *On considère deux fonctions à valeurs réelles f et g, définies, continues, dérivables sur un intervalle $[a, b]$, vérifiant*
$$\forall x \in [a, b] \quad |f'(x)| \leq g'(x).$$
Alors
$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a).$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 3.38, g est croissante. Soit $\varepsilon > 0$. On note I_ε l'ensemble des points $x \in [a, b]$ tels que
$$\forall \xi \in [a, x] \quad |f(\xi) - f(a)| \leq g(\xi) - g(a) + \varepsilon(\xi - a).$$
On a évidemment $a \in I_\varepsilon$; de plus si $a \leq x \leq y$ et $y \in I_\varepsilon$, alors $x \in I_\varepsilon$. Donc I_ε est un intervalle d'origine a ; il est majoré par b : soit c sa borne supérieure. Alors, pour tout $y \in [a, c[$, il existe $x \in I_\varepsilon$ tel que $y \leq x \leq c$, donc
$$|f(y) - f(a)| \leq g(y) - g(a) + \varepsilon(y - a).$$
Par conséquent
$$\forall y \in [a, c[\quad |f(y) - f(a)| \leq g(y) - g(a) + \varepsilon(y - a).$$
Comme f et g sont continues au point c, on a aussi
$$|f(c) - f(a)| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a). \tag{3.4}$$
Donc
$$\forall y \in [a, c] \quad |f(y) - f(a)| \leq g(y) - g(a) + \varepsilon(y - a), \tag{3.5}$$
ce qui montre que $c \in I_\varepsilon$.

Supposonc $c < b$. Comme f et g sont dérivables au point c, il existe $0 < \eta \leq b - c$ tel que pour tout $x \in]c, c + \eta[$
$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Tenant compte de l'hypothèse, on a donc, pour tout $x \in]c, c + \eta[$:
$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| < |f'(c)| + \frac{\varepsilon}{2} \leq g'(c) + \frac{\varepsilon}{2} < \left| \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right| + \varepsilon = \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \varepsilon$$
et par conséquent
$$\forall x \in]c, c + \eta[\quad |f(x) - f(c)| < g(x) - g(c) + \varepsilon(x - c).$$
En le combinant avec (3.4), on en déduit
$$\forall x \in]c, c + \eta[\quad |f(x) - f(a)| < g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a),$$
qui, combiné avec (3.5), donne
$$\forall x \in [a, c + \eta[\quad |f(x) - f(a)| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a).$$

Cela montre que $[a, c+\eta[\subset I_\varepsilon$, ce qui contredit la définition de c. On en déduit $c = b$, et par conséquent

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b-a).$$

Comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a aussi

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a),$$

qui est le résultat annoncé. □

Définition 3.13. Soit $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$; soit $n \geq 1$ un entier et f une fonction $n-1$ fois dérivable sur $]a-\alpha, a+\alpha[$, à valeurs réelles[6]. On dit que f est *n fois dérivable au point a* si l'application

$$x \in]a-\alpha, a+\alpha[\setminus\{a\} \to \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$

a un réel comme limite au point a : on l'appelle la *dérivée d'ordre n de f au point a* et on le note

$$f^{(n)}(a) \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n}(a).$$

On dit que f est *n fois dérivable* sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ si elle l'est en tout point de cet intervalle. La fonction

$$f^{(n)} : x \in I \to f^{(n)}(x) \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{dx^n} : x \in I \to \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

est appelée la *fonction dérivée d'ordre n* ou la *dérivée d'ordre n* de f.

On dit que la fonction f *est de classe $\mathcal{C}^n$* sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ si elle est n fois dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée d'ordre n de f est continue sur I. On dit que la fonction f *est de classe $\mathcal{C}^\infty$* sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, pour tout $n \geq 0$.

Définition 3.14. Soit $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et soit $n \geq 1$ un entier.

(1) Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable sur $]a-\alpha, a]$, à valeurs réelles. On dit que f a *une dérivée à gauche d'ordre n au point a* si l'application

$$x \in]a-\alpha, a[\to \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$

a un réel comme limite à gauche au point a : on l'appelle la *dérivée à gauche d'ordre n de f au point a* et on le note $f^{(n)}(a)$.

(2) Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable sur $[a, a+\alpha[$, à valeurs réelles. On dit que f a *une dérivée à droite d'ordre n au point a* si l'application

$$x \in]a, a+\alpha[\to \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \in \mathbb{R}$$

a un réel comme limite à droite au point a : on l'appelle la *dérivée à droite d'ordre n de f au point a* et on le note $f^{(n)}(a)$.

On dit que la fonction f *est n fois dérivable* sur l'intervalle $[a, b[$ si elle est n fois dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et si elle a une dérivée à droite d'ordre n au point a ; on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ si la dérivée $f^{(n)}$ est continue sur $[a, b[$. On dit que la fonction f *est de classe $\mathcal{C}^\infty$* sur $[a, b[$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, pour tout $n \geq 0$.

On dit que la fonction f *est n fois dérivable* sur l'intervalle $]a, b]$ si elle est n fois dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, si elle a une dérivée à gauche d'ordre n au point b ; on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ si la dérivée $f^{(n)}$ est continue sur $]a, b]$. On dit que la fonction f *est de classe $\mathcal{C}^\infty$* sur $]a, b]$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b]$, pour tout $n \geq 0$.

6. toute fonction est 0 *fois dérivable* et sa *dérivée d'ordre* 0 est elle-même

On dit que la fonction f *est n fois dérivable* sur l'intervalle $[a,b]$ si elle est n fois dérivable sur l'intervalle $]a,b[$, si elle a une dérivée à droite d'ordre n au point a, si elle a une dérivée à gauche d'ordre n au point b ; on dit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ si la dérivée $f^{(n)}$ est continue sur $[a,b]$. On dit que la fonction f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$ si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, pour tout $n \geq 0$.

On démontre par récurrence sur n les trois résultats suivants.

Proposition 3.42. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; soient f et g deux fonctions définies sur I, à valeurs réelles et soit k un réel. On suppose que f et g sont n fois dérivables sur I.*

(1) *Les fonctions $f+g$ et kf sont n fois dérivables sur I ; on a*

$$\forall x \in I \quad (f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \quad \textit{et} \quad (kf)^{(n)}(x) = kf^{(n)}(x).$$

(2) *La fonction fg est n fois dérivable sur I et on a la* formule de Leibniz *:*

$$\forall x \in I \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

(3) *Si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est n fois dérivable sur I.*

Démonstration. (1) Le résultat est vrai pour $n=1$, d'après la proposition 3.32. Supposons la propriété établie au rang n. Soient f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I : elles sont n fois dérivables, donc $f+g$ et kf sont n fois dérivables sur I et

$$\forall x \in I \quad (f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \quad \text{et} \quad (kf)^{(n)}(x) = kf^{(n)}(x).$$

Comme $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$ sont dérivables, d'après la proposition 3.32, $f^{(n)} + g^{(n)}$ et $kf^{(n)}$ sont dérivables et leurs dérivées sont $f^{(n+1)} + g^{(n+1)}$ et $kf^{(n+1)}$; donc $f+g$ et kf sont $n+1$ fois dérivables sur I et

$$\forall x \in I \quad (f+g)^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) + g^{(n+1)}(x) \quad \text{et} \quad (kf)^{(n+1)}(x) = kf^{(n+1)}(x),$$

d'où le résultat au rang $n+1$.

(2) Le résultat est vrai pour $n=1$, d'après la proposition 3.32. Supposons la propriété établie au rang n. Soient f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I : elles sont n fois dérivables, donc fg est n fois dérivable sur I et

$$\forall x \in I \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Pour $0 \leq k \leq n$, $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables, donc d'après la proposition 3.32, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ est dérivable et sa dérivée est

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \big(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)} \big).$$

Donc fg est $n+1$ fois dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x).
\end{aligned}$$

D'où le résultat au rang $n+1$.

(3) Le résultat est vrai pour $n = 1$, d'après la proposition 3.32. Supposons la propriété établie au rang n. Soient f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I, la fonction g ne s'annulant pas sur I : elles sont dérivables, donc f/g est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Comme f, f', g, g' sont n fois dérivables, d'après les propriétés (1) et (2) précédentes et l'hypothèse de récurrence, $(f'g - fg')/g^2$ est n fois dérivable ; donc f/g est $n+1$ fois dérivable sur I, ce qui est le résultat au rang $n+1$. □

Proposition 3.43. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit g une fonction définie sur J. On suppose $f(I) \subset J$. Si f est n fois dérivable sur I et si g est n fois dérivable sur J, alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I.*

Démonstration. Le résultat est vrai pour $n = 1$, d'après la proposition 3.33. Supposons la propriété établie au rang n. Soient f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables : elles sont dérivables, donc $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I \quad \big(g \circ f\big)'(x) = (g' \circ f)(x) f'(x).$$

Comme f, f', g' sont n fois dérivables, d'après l'hypothèse de récurrence et la proposition 3.42, $(g' \circ f)f'$ est n fois dérivable ; donc $g \circ f$ est $n+1$ fois dérivable sur I, et la propriété est établie au rang $n+1$. □

Proposition 3.44. *Soit f une fonction n fois dérivable et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f' ne s'annule pas sur I, alors l'application réciproque f^{-1} est n fois dérivable sur l'intervalle $J := f(I)$.*

Démonstration. Comme f est continue et strictement monotone, elle est bijective, son image est un intervalle J et la fonction réciproque f^{-1} est continue sur J. Le résultat annoncé est vrai pour $n = 1$, d'après la proposition 3.34. Supposons la propriété établie au rang n. Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable : elle est dérivable et

$$\forall y \in J \quad \big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{\big(f' \circ f^{-1}\big)(y)}.$$

Comme f, f' sont n fois dérivables, d'après l'hypothèse de récurrence et les propositions 3.42 et 3.43, $1/(f' \circ f^{-1})$ est n fois dérivable ; donc f^{-1} est $n+1$ fois dérivable sur J, ce qui établit la propriété au rang $n+1$. □

Les trois propositions précédentes ont leurs variantes, en remplaçant la propriété d'être n fois dérivable par celle d'être de classe $\mathcal{C}^n$. Le dernier résultat permet d'obtenir l'extension suivante.

Corollaire. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, avec $n \geq 1$. Si la dérivée de f ne s'annule pas, alors f est une bijection de I sur l'intervalle $J := f(I)$ et la fonction réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.*

Démonstration. La dérivée de f est continue et ne s'annule pas sur I, donc elle est strictement positive ou strictement négative ; donc f est strictement monotone, donc bijective. Comme f est continue, l'image J est un intervalle ; par conséquent, l'application réciproque f^{-1} est continue. Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$ et comme f' ne s'annule pas, f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$. □

Proposition 3.45. *Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$; si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} f'(x)$ est un nombre réel, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.*

Démonstration. Cela résulte du théorème 3.5. □

Exemple 3.35 (Interpolation de Lagrange)**.** On note $\mathbb{P}_1$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 : c'est un espace vectoriel de dimension 2.

Soit $x_0 \neq x_1$ des réels distincts. On appelle *polynômes de base dans l'interpolation de Lagrange de degré* 1 associés à ces points les polynômes

$$L_0(x) := \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) := \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}.$$

Ils appartiennent à $\mathbb{P}_1$. Ils vérifient

$$L_i(x_k) = \delta_{i,k}, \quad 0 \leq i, k \leq 1,$$

donc ils forment une famille libre de $\mathbb{P}_1$: en effet, si

$$a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) = 0,$$

alors

$$a_0 L_0(x_0) + a_1 L_1(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad a_0 L_0(x_1) + a_1 L_1(x_1) = 0,$$

donc

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 = 0.$$

Comme $\mathbb{P}_1$ est un espace vectoriel de dimension 2, la famille $\{L_0, L_1\}$ forme une base de $\mathbb{P}_1$.

Si f est une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ et si les points x_0, x_1 sont distincts et appartiennent à $[a, b]$, il existe un seul polynôme $p \in \mathbb{P}_1$ tel que

$$p(x_0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad p(x_1) = f(x_1).$$

On l'appelle le *polynôme d'interpolation de Lagrange de degré* 1 de f aux points x_0, x_1. On a :

$$p(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x).$$

On suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, qui est 2 fois dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. On montre dans la suite que, pour tout $x \in [a, b]$, il existe ξ_x appartenant à l'intérieur du plus petit intervalle fermé contenant les points x, x_0, x_1 tel que

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - x_0)(x - x_1). \tag{3.6}$$

• Si $x \in \{x_0, x_1\}$, les deux membres de l'égalité (3.6) sont nuls : elle est donc vérifiée.
• Si $x \notin \{x_0, x_1\}$, soit $[\alpha, \beta]$ le plus petit intervalle fermé contenant les points x, x_0, x_1. On note

$$\begin{aligned} c &:= \frac{f(x) - p(x)}{\pi(x)}, \\ \pi(y) &:= (y - x_0)(y - x_1), \quad y \in \mathbb{R}, \\ g(y) &:= f(y) - p(y) - c\pi(y), \quad y \in [a, b]. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) - p(x_0) - c\pi(x_0) = 0, \\ g(x_1) &= f(x_1) - p(x_1) - c\pi(x_1) = 0, \\ g(x) &= f(x) - p(x) - c\pi(x) = 0. \end{aligned}$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle (théorème 3.3), il existe 2 points distincts x_0^1, x_1^1 appartenant à l'intervalle $]\alpha, \beta[$ tels que

$$g'(x_0^1) = 0 \quad \text{et} \quad g'(x_1^1) = 0.$$

La fonction g' est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. En utilisant de nouveau le théorème de Rolle, on établit l'existence d'un point ξ_x appartenant à $]\alpha, \beta[$ tel que

$$g''(\xi_x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f''(\xi_x) - p''(\xi_x) - c\pi''(\xi_x) = 0,$$

et comme

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad p''(y) = 0, \quad \pi''(y) = 2,$$

on a

$$f''(\xi_x) = 2\frac{f(x) - p(x)}{\pi(x)},$$

d'où le résultat. On en déduit :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \sup_{x\in[a,b]} |(x - x_0)(x - x_1)|.$$

En particulier, si $x_0 = a$ et $x_1 = b$, on a :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Théorème 3.6 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Pour $n \geq 0$, soit f une fonction à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Il existe alors $c \in]a, b[$, tel que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. On définit une fonction φ sur $[a, b]$ par

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) := f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x)\frac{(b-x)^k}{k!} - \gamma\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où γ est déterminé par $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. D'après le théorème de Rolle (théorème 3.3), il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\varphi'(c) = 0.$$

Comme

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi'(x) = -f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!} + \gamma\frac{(b-x)^n}{n!},$$

on obtient

$$\gamma = f^{(n+1)}(c),$$

et donc

$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} - f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \varphi(a) = 0,$$

qui est le résultat. □

Remarque 3.11. En faisant les hypothèses du théorème 3.6, on démontre de manière analogue :

$$f(a) = f(b) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(b)\frac{(a-b)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(a-b)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Théorème 3.7 (Formule de Taylor-Young)**.** *Pour $n \geq 1$, soit f une fonction à valeurs réelles, $n-1$ fois dérivable sur un intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ et n fois dérivable au point a. Il existe alors une fonction $\rho_n\ :]a-\alpha, a+\alpha[\to \mathbb{R}$, qui a 0 comme limite au point a, telle que*

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\quad f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + (x-a)^n \rho_n(x).$$

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, soit f une fonction définie sur un intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ et dérivable au point a. On définit sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ une fonction ρ_1 par :

$$\rho_1(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Elle a pour limite 0 au point a et

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\rho_1(x).$$

Cela montre le résultat au rang 1.

On suppose le résultat établi pour $n-1 \geq 1$. On montre le résultat au rang n : soit f une fonction $n-1$ fois dérivable sur un intervalle $]a-\alpha, a+\alpha[$ et n fois dérivable au point a. La fonction dérivée f' est $n-2$ fois dérivable sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ et $n-1$ fois dérivable au point a : d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une fonction $\rho_{n-1}\ :]a-\alpha, a+\alpha[\to \mathbb{R}$, qui a 0 comme limite au point a, telle que

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\quad f'(x) = f'(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + (x-a)^{n-1}\rho_{n-1}(x).$$

On définit une fonction φ dérivable sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ par :

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\quad \varphi(x) := f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$$

et on définit une fonction ρ_n sur $]a-\alpha, a+\alpha[$ par :

$$\rho_n(x) := \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{(x-a)^n} & \text{si } x \neq a, \\ 0 & \text{si } x = a. \end{cases}$$

On a

$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\quad \varphi'(x) := f'(x) - f'(a) - \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}.$$

Soit $\varepsilon > 0$: il existe $0 < \eta < \alpha$ tel que

$$|x-a| < \eta \ \Rightarrow \ \left| f'(x) - f'(a) - \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k+1)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} \right| < |x-a|^{n-1}\varepsilon.$$

Par conséquent

$$|x-a| < \eta \ \Rightarrow \ |\varphi'(x)| \leq |x-a|^{n-1}\varepsilon.$$

La fonction φ est continue sur $[a-\eta, a+\eta]$, dérivable sur $[a-\eta, a+\eta]$; elle vérifie $\varphi(a) = 0$. De

$$\forall x \in [a-\eta, a] \quad |\varphi'(x)| \leq (a-x)^{n-1}\varepsilon.$$

et de la proposition 3.41, on déduit

$$\forall x \in [a-\eta, a] \quad |\varphi(x)| \leq \frac{(a-x)^n}{n}\varepsilon.$$

De
$$\forall x \in [a, a+\eta] \quad |\varphi'(x)| \leq (x-a)^{n-1}\varepsilon.$$
et de la proposition 3.41, on déduit
$$\forall x \in [a, a+\eta] \quad |\varphi(x)| \leq \frac{(x-a)^n}{n}\varepsilon.$$
Par conséquent
$$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \quad |\varphi(x)| \leq \frac{|x-a|^n}{n}\varepsilon \leq |x-a|^n\varepsilon.$$
La fonction ρ_n a donc pour limite 0 au point a et l'on a :
$$\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\quad f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + (x-a)^n\rho_n(x),$$
ce qui montre le résultat au rang n. D'où la conclusion. □

Exemple 3.36 (Extrema)**.** Soit $a < b$ deux réels et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f est deux fois dérivable en un point $c \in]a, b[$ et que
$$f'(c) = 0 \quad \text{et} \quad f''(c) > 0.$$
On écrit la formule de Taylor-Young (théorème 3.7) au point c :
$$\forall x \in]a, b[\quad f(x) = f(c) + f''(c)\frac{(x-c)^2}{2} + (x-c)^2\rho_2(x),$$
où $\lim\limits_{x\to c} \rho_2(x) = 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que
$$|x-c| < \eta \;\Rightarrow\; |\rho_2(x)| < \frac{f''(c)}{4}.$$
Alors, pour tout $x \in]c-\eta, c+\eta[\setminus\{c\}$
$$f(x) - f(c) = \Big(\frac{f''(c)}{2} + \rho_2(c)\Big)(x-c)^2 > \Big(\frac{f''(c)}{2} - \frac{f''(c)}{4}\Big)(x-c)^2 > 0.$$
Cela montre que la fonction f a un minimum local strict au point c. Si l'on a
$$f'(c) = 0 \quad \text{et} \quad f''(c) < 0,$$
on établit de manière analogue que la fonction f a un maximum local strict au point c. On ne peut pas conclure simplement si $f''(c) = 0$ (prendre par exemple la fonction $x \in]-1, +1[\to x^3$).

Table des matières