Université de Savoie **Licence 1ère année**
2013-2014

MATH221 – CC1-type

Exercice 1 ***(4pts)***

1. À chacune des propositions en langage courant (A),(B),(C) et (D), associer la proposition quantifiée $(1), (2), (3)$ ou (4) équivalente.

   (A) : Les termes de la suite (u_n) sont tous strictement positifs.
   (B) : Au moins un terme de la suite (u_n) est strictement positif.
   (C) : Une infinité de termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
   (D) : Les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

   (1) : $\exists n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p \geq n$ et $u_p > 0$
   (2) : $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \geq n \Rightarrow u_p > 0$
   (3) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p \geq n$ et $u_p > 0$
   (4) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ p \geq n \Rightarrow u_p > 0$

2. Donner, parmi les propositions $1, 2, 3$ et 4, celles qui sont compatibles avec la proposition suivante, en justifiant à chaque fois par un exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N},\ p \geq n \text{ et } u_p < 0$$

Exercice 2 ***(4pts)***
Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de réels. On suppose que $(u_n)_n$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, et que $(u_{2n} - v_n)_n$ tend vers 0. Montrer, en maniant uniquement la définition de convergence, que $(v_n)_n$ tend vers l.

Exercice 3 ***(5pts)***
Donner des équivalents simples aux suites de terme général suivant, et le cas échéant donner leur limite :

1. $n\sqrt{n} + n\sin(n)$
2. $\frac{n^6+2n^4-1}{3n^6-n}$
3. $\ln(n^2) + \ln(n) - n^{-2}$
4. $e^{-n} + \frac{1}{n}$
5. $e^n + (-1)^n e^{2n}$
6. $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

Exercice 4 ***(7pts)***
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie récursivement par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{u_n^2}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{7}{8}$.
2. Montrer que pour tout n, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{7}{8}|u_{n+1} - u_n|$.
3. En déduire que, pour tout n, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n |u_1 - u_0|$.
4. Montrer que (u_n) est une suite de Cauchy.
5. La suite (u_n) converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?