Titres, diplômes et travaux

Titres Universitaires français : Doctorat de mathématiques de l'Université de Savoie, mention très honorable.

Titre de la thèse : Sur les courbes intégrales du champ de gradient
Date et lieu de soutenance : le 19 Décembre 2001 à Chambéry
Directeur de thèse : K. Kurdyka
Jury : D. Trotman, R. Moussu, A. Parusiński, K. Kurdyka, P. Orro, F. Cano

Diplômes, qualifications, titres :

- Baccalauréat série E, juin 1992, mention assez bien, Toulon (83)
- CPGE série M', 1992-1995, lycée Dumont d'Urville à Toulon (92-93) et lycée Louis le Grand à Paris (93-95)
- DEUG SSM juin 1994, mention assez bien, Université de Toulon (83)
- Licence de Mathématiques juin 1995, mention passable, Université de Paris VI
- Maîtrise de Mathématiques Juin 1996, mention assez bien, Université de Provence
  Mémoire de maitrise : *Le théorème Egregium de Gauss*
- D.E.A. de Mathématiques juin 1997, mention bien, Université de Provence
  Stage de quatre mois effectué au Centre de Mathématique et d'Informatique (CMI) au sein du laboratoire de Topologie sous la direction de D. Trotman :
  Stratifications (w) de Verdier
- Doctorat de l'Université de Savoie, mention mathématique, décembre 2001, mention très honorable : *Sur les courbes intégrales du champ de gradient.*

Travaux - Ouvrages - Articles - Réalisations :

(a)– Articles publiés :

1. D. D'Acunto –*Valeurs Critiques Asymptotiques d'une Fonction Définissable dans une Structure o-minimale,*publié dans Annales Polonici Mathematici, 75 (2000), 35--45.
2. D. D'Acunto –*Sur la topologie des fibres d'une fonction définissable dans une structure o-minimale,* publié dans C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337 (2003), no. 5, 327--330.
3. D. D'Acunto, V. Grandjean – *A gradient inequality at infinity for tame functions,* publié dans Revista Mat. Complutense 18 (2005), no. 2493--501.
4. D. Dacunto, K. Kurdyka – *Bounds for gradient trajectories and geodesic diameter of real algebraic sets,* à paraître dans Bull. London Math. Soc.
5. D. D'Acunto, K. Kurdyka –*Explicit bounds for the Lojasiewicz exponent in the gradient inequality for polynomials,* publié dans Annales Polonici Mathematici, 87 (2005).
6. D. D'Acunto, V. Grandjean –*On gradient at infinity of semialgebraic functions,* publi dans Annales Polonici Mathematici, 87 (2005).

(b)– Articles soumis :

7. D. D'Acunto, K. Kurdyka –*Bounds for gradient trajectories of polynomial and definable functions with applications,* preprint de l'université de Savoie soumis à J. Differential Geom.

(c)– Thèse :

D. D'Acunto –*Sur les courbes intégrales du champ de gradient,* Thèse de l'université de Savoie, téléchargeable sur : http://www.lama.univ-savoie.fr/~d_acunto ou sur These-on-line : http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/27/10/

Fonctions assurées

* **Vacataire** en 25e-26e section à l'Université de Savoie, de septembre 1998 à août 2000.
* **Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche** en 25e-26e section à l'Université de Savoie, de septembre 2000 à août 2002.

Activités d'enseignement

Tous les enseignements ont été effectués au sein de l'université de Savoie et de l'université de Genève .

Travaux dirigés et travaux pratiques

Voici une liste exhaustive avec une description concise des contenus enseignés.

Enseignement dispensé à l'Université de Savoie :

* 1ère année de DEUG STPI (1998/1999) en analyse : fonctions usuelles et réciproques, intégrales, intégrales généralisées et équations différentielles.
* 2ème année de DEUG MIAS (1999/2000 et 2000/2001) en algèbre et analyse : algèbre linéaire (espaces vectoriels, calcul matriciel, formes linéaires et formes quadratiques), polynômes, fonctions d'une variable réelle, suites, séries, intégrales simples, fonctions de plusieurs variables et intégrales multiples.
* 1ème année de DEUG SVT (2000/2001) en analyse : fonctions d'une variable réelle, développements limités, intégrales simples, suites.
* 1ère année de DEUG MIAS (2001/2002) en algèbre : théorie des groupes, arithmétique des entiers et des polynômes, algébre linéaire.
* 2é année de DEUG MASS (2001/2002) en algèbre et analyse : polynômes et algèbre linéaire, suites, séries numériques et séries de fonctions, séries entières, fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples.
* 1ère année de DEUG ST (2001/2002) en algèbre : résolution de systèmes linéaires, calculs matriciels.

Enseignement dispensé à l'Université de Genève :

* 2ème année de mathématiques en analyse (2005/2006) : espaces métriques, fractales, fonctions de plusieurs variables & calcul diffrentiel, équations différentielles ordinaires, formes diférentielles, intégration sur les variétés.
* 1ère année de biologie, chimie, sciences de la vie et de la terre, pharmacie,.. : TP d'analyse et systèmes dynamiques avec le logiciel *Maple*. TP de statistiques et probabilités avec le logiciel *Minitab*.

Projets Math-Info

Toujours au sein de l'Université de Savoie (2001/2002), j'ai dirigé deux projets de mathématiques-informatique en 2 ème année de DEUG MASS. Les étudiants étaient confrontés à des problèmes mathématiques qu'ils devaient résoudre théoriquement en s'initiant à l'analyse numérique et pratiquement au moyen d'un langage informatique (Turbo Pascal). Les sujets étaient : Aires de domaines simples du plan et recherche des racines de fonctions continues.

Implication

Lors de mes expériences passées je me suis toujours impliqué dans mes activités d'enseignement. J'ai enseigné avec la même passion aussi bien l'analyse que la géométrie ou encore l'algèbre. J'ai pris plaisir à essayer de transmettre du mieux possibles mes connaissances en mathématiques. En contrepartie, je crois avoir beaucoup reçu du contact avec les étudiants. C'est une expérience, un travail qui nous incite à nous remettre en question en permanence. Je crois que le contact avec les étudiants est important, dans le sens où ce n'est pas seulement un savoir que nous pouvons leur transmettre. Ainsi je conçois très bien que nous puissions leur apporter notre contribution dans l'apprentissage de la vie active en matière d'autonomie, d'initiative et d'esprit critique. Je ne conçois pas le métier d'enseignant-chercheur sans enseignement.

Outre les travaux dirigés, j'ai participé à la confection de feuilles d'examens ainsi qu'aux corrections de copies et jurys d'examens. J'ai donc perçu plusieurs aspects du métier d'enseignant tout en mesurant l'importance de la tâche qui lui est assigné.

Les projets de Math-Info que j'ai dirigés m'ont aussi beaucoup appris. J'ai pris beaucoup de plaisir à participer aux "premiers pas" en recherche des étudiants. C'est un travail pour lequel je me suis impliqué scientifiquement et humainement. Je suis prêt à recommencer que ce soit pour un projet de ce type ou un TER de Master 1.

Projet d'enseignement

À l'avenir, j'aimerais en particulier m'investir dans deux directions : d'une part la préparation aux concours d'enseignement et d'autre part l'enseignement des mathématiques à des étudiants venant d'autres filières.

La préparation aux concours est un moment important dans une vie d'étudiant. N'ayant pas encore expérimenté ce type d'enseignement, je ne peux que me fonder sur les propos de mes collègues. Il en ressort qu'on a affaire dans ce cas à des étudiants très motivés. Je crois que dans ces conditions le travail peut être très agréable et instructif à la fois.

J'ai pu par le passé expérimenter l'enseignement à des étudiants ne provenant pas de filières scientifiques, ou faisant très peu de mathématiques. C'est le cas par exemple d'étudiants de la filière MASS ayant obtenu un Baccalauréat mention économie. Pour une partie non négligeable de ces étudiants les mathématiques représentent leur bête noire. Ceci est souvent dû à une expérience scolaire traumatisante ou à un désintéressement progressif. Il est clair que dans certaines filières nous ne pouvons pas aborder un TD ou un cours de la même façon que nous le ferions en licence de mathématiques. Toutefois, un dessin illustrant un concept ou quelques exemples d'applications permettent souvent d'éveiller la curiosité de l'étudiant. C'est un travail difficile que de faire passer des notions abstraites à ces étudiants mais en même temps très intéressant. L'enseignement en DEUG MASS m'a confronté à des étudiants ayant conscience de leur lacunes en math. Ces mêmes étudiants ont montré une grande détermination pour rattraper ce retard.

En conclusion, je dirais que mon expérience en enseignement a constitué un complément agréable et intéressant à mon travail de recherche. Je serais très heureux de pouvoir poursuivre cette expérience en tant qu'enseignant-chercheur à l'université.

Activités de recherche

De septembre 1997 à decembre 2001, j'ai effectué ma thèse sous la direction de Krzysztof Kurdyka, professeur à l'Université de Savoie.

Fonctions assurées

* **Allocataire de recherche** de septembre 1997 à août 2000.
* De septembre 2000 à aout 2002, j'ai été **Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche** au Laboratoire de Mathématiques (LAMA) de l'université de Savoie.
* D'octobre 2002 à juin 2004 j'ai effectué un **post-doc** à l'Universidad Complutense de Madrid (Espagne).
* De septembre 2004 à août 2005 j'ai effectué un **post-doc** à l'Università di Pisa (Italie)
* Depuis le 1er octobre 2005, je suis **assistant post-doctorant** à l'Université de Genève (Suisse).

Présentation du sujet de thèse et nature des travaux

Sur les courbes intégrales du champ de gradient.

Travaux de recherche

Au cours de ma thèse je me suis intéressé à des problèmes liés au champ de gradient de fonctions réelles appartenant à des catégories géométriques dites à topologie modérée (structures o-minimales). J'ai donc étudié les courbes intégrales de ces champs de gradient au voisinage des points singuliers, mais aussi au voisinage de fibres de f dites singulières à l'infini. De cette étude se déduisent des propriétés sur les courbes intégrales ainsi que sur les niveaux de la fonction de départ.

Les chapitres **2**, **3** et **4** reprennent certains résultats de ma thèse. Les chapitres suivants (**5**, **6** et **7**) concernent des résultats plus récents. Dans le chapitre **8** je cite quelques résultats d'autres auteurs qui s'inspirent de mes travaux (ou les généralisent).

Notations

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire induit par la métrique euclidienne standard. On notera $|\cdot|$ la norme associée. On note respectivement $\mathbb{B}^n$ et $\mathbb{S}^{n-1}$ la boule unité et la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$ relativement à la métrique euclidienne standard.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Le champ de vecteur ∇f désigne le *champ de gradient de f* par rapport à la métrique euclidienne standard (i.e. vérifiant $\mathrm{d}f(x) = \langle \nabla f(x), \cdot \rangle$).
On note $K_0(f)$ l'ensemble de ses valeurs critiques.

Quand on parlera d'un niveau t d'une fonction f, on entendra l'ensemble $f^{-1}(t)$.

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, une *trajectoire de ∇f* est une courbe différentiable $x : I \to \mathbb{R}$, où I est une réunion finie d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, telle que

$$x'(t) = \nabla f(x(t)) \text{ et } f \circ x \text{ est injective.}$$

Les champs de gradient que l'on considèrera seront ceux de fonctions vivant dans une *structure o-minimale* fixée $\mathcal{A}$.

1 Introduction

1.1 Structures o-minimales

La notion de structure o-minimale est une généralisation de la catégorie géométrique des ensembles semi-algébriques. Soit $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$; où $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.1 On dit que $\mathcal{A}$ est une *structure o-minimale* si et seulement si $\mathcal{A}$ satisfait les axiomes suivants :

(i) Chaque famille $\mathcal{A}_n$ est une sous-algèbre booléenne de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) Si $A \in \mathcal{A}_{n+m}$ et $\pi_n : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ désigne la projection naturelle sur les n premières coordonnées, alors $\pi_n(A) \in \mathcal{A}_n$;

(iii) Si $A \in \mathcal{A}_n$ alors $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{A}_{n+1}$;

(iv) $\mathcal{A}$ contient la famille des ensembles semi-algébriques ;

(v) Tout sous-ensemble de $\mathcal{A}_1$ est une réunion finie d'intervalles et de points.

L'axiome (v) est l'axiome d'*o-minimalité*. Soit $\mathcal{A}$ une structure o-minimale donnée. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est définissable (sous-entendu dans $\mathcal{A}$) s'il appartient à $\mathcal{A}_n$. On dira qu'une application est définissable si son graphe est un ensemble définissable. Comme exemples classiques de structures o-minimales, citons $\mathbb{R}_{\exp}$ engendrée par les ensembles semi-algébriques et la fonction exponentielle (on entend par là, la structure définie par des sous ensembles des $\mathbb{R}^n$ décrits par un nombre fini d'égalités et d'inégalités de fonctions appartenant à la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par les polynômes et la fonction exponentielle), où encore $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ engendrées par les fonctions $x \mapsto x^r$, pour $r \in \mathbb{R}$. La structure $\mathbb{R}_{\exp}$ conserve des propriétés analogues à celles des ensembles semi-algébriques, en particulier des propriétés toplogiques de finitude. Cette structure est d'autant plus importante qu'on peut distinguer deux sortes de structures o-minimales, dont les objets et les fonctions ont des propriétés géométriques et analytiques quantitativement différentes. Afin de préciser cette dichotomie, introduisons la

Définition 1.1.2 Une structure o-minimale $\mathcal{A}$ est dite *polynomialement bornée* si, pour toute fonction d'une variable réelle $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \to \infty$ quand $x \to \infty$, il existe un entier N tel que pour tout x suffisamment grand $|f(x)| \leq |x|^N$.

La structure o-minimale des ensembles semi-algébriques est polynomialement bornée, de même que la structure $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Ce n'est pas le cas pour la structure $\mathbb{R}_{\exp}$. Considérons une structure o-minimale arbitraire $\mathcal{A}$, alors on a le théorème suivant (cf. [25])

Théorème 1.1.3 (Miller). *La structure o-minimale $\mathcal{A}$ est soit polynomialement bornée, soit elle contient la fonction exponentielle.*

Ce résultat illustre la dichotomie de la théorie o-minimale ; d'une part une structure o-minimale partage des résultats de nature qualitative semblables à ceux de la théorie des ensembles semi-algébriques, d'autre part les structures contenant la fonction exponentielle ont une nature analytique/géométrique constituant un obstacle pour l'application de certaines méthodes provenant de la géométrie semi-algébrique ou semi-analytique.

1.2 Théorèmes de fibration et condition de Malgrange

Considérons une fonction f de classe C^2 définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $K_0(f)$ l'ensemble de ses valeurs critiques.

Théorème 1.2.1 (Ehresmann). *Si la fonction f est propre et l'ensemble $K_0(f)$ est fini, alors $f : U \setminus f^{-1}(K_0(f)) \to \mathbb{R} \setminus K_0(f)$ est une fibration localement triviale au dessus de chaque composante connexe de $\mathbb{R} \setminus K_0(f)$.*

Bien évidemment toutes les fonctions ne sont pas propres. Sans l'hypothèse de propreté quelles conditions supplémentaires sur f sont alors nécessaires pour obtenir la fibration en dehors d'un ensemble fini de valeurs ? Sortons du cadre réel et considérons un polynôme complexe $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Thom a démontré le résultat suivant

Théorème 1.2.2 (Thom). *Il existe un ensemble fini $\Delta \subset \mathbb{C}$ tel que $f : \mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(\Delta) \to \mathbb{C} \setminus \Delta$ est une fibration C^∞ localement triviale.*

L'ensemble Δ contient nécessairement les valeurs critiques (en nombre fini) du polynôme f, mais il peut aussi contenir des valeurs régulières. Ces autres valeurs proviennent des singularités que f peut avoir au bord de son domaine de définition (pour donner une analogie avec le théorème d'Ehresmann quand le domaine de définition n'est pas compact).
Notons B_f l'ensembles des valeurs au-dessus desquelles f n'est pas une fibration localement triviale. L'ensemble B_f est appelé l'ensemble des *valeurs de bifurcations* de f. Le théorème 1.2.2 assure donc la finitude de ces valeurs de bifurcation, mais il ne décrit aucunement ces valeurs, en particulier celles qui ne sont pas valeurs critiques de f. La difficulté est donc de localiser l'ensemble B_f. Dans le cas complexe Parusiński a étudié certaines conditions suffisant à assurer la trivialité locale de f quand celle-ci n'admet que des singularités isolées à l'infini. Ces conditions portent sur le comportement à l'infini du gradient de f. En particulier il a travaillé avec la condition suivante :

Définition 1.2.3 On dit que f vérifie la condition **(M)** de Malgrange en $t \in \mathbb{C}$ si et seulement s'il existe $C > 0$ et un voisinage ouvert V_t de t tel que pour tout $|x|$ suffisamment grand et $f(x) \in V_t$ on a

$$\textbf{(M)} \qquad\qquad |x| \cdot |\nabla f(x)| \geq C.$$

L'ensemble des valeurs ne vérifiant pas la condition **(M)** peut ainsi se caractériser au moyen d'une suite de points : c'est l'ensemble des points $c \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe une suite $\{x_\nu\} \in \mathbb{C}^n$ telle que $|x_\nu| \to +\infty$, $f(x_\nu) \to c$ et $|x| \cdot |\nabla f(x)| \to 0$.
En dimension 2, la condition $|x| \cdot |\nabla f(x)| \to 0$ est équivalente à $|\nabla f(x)| \to 0$. Il se dégage ici une notion de singularité à l'infini, c'est-à-dire on essaie de localiser les germes à l'infini de régions de l'espace où le gradient va s'annuler sur le bord.

Définition 1.2.4 On appelle *valeur critique asymptotique* toute valeur qui ne vérifie pas la condition **(M)** de Malgrange. On note $K_\infty(f)$ l'ensemble de ces valeurs.

En compactifiant projectivement $\mathbb{C}^n$ et en utilisant un théorème d'isotopie à la Thom-Mather, on montre que $K_\infty(f)$ est fini (voir par exemple [15]).

Théorème 1.2.5 (Parusiński) *Soit f un polynôme complexe dont les singularité à l'infini sont isolées, alors f est une fibration localement triviale au dessus de $\mathbb{C} \setminus (K_0(f) \cup K_\infty(f))$.*

Sous l'hypothèse de n'avoir que des singularités à l'infini, la condition de Malgrange donne donc, dans le cas complexe, une condition suffisante de trivialisation, et décrit exactement l'ensemble Δ du théorème 1.2.2. Dans le cas semi-algébrique, un résultat beaucoup plus général (pour une application de classe C^2) a été récemment démontré par Kurdyka, Orro et Simon (voir [22]), utilisant encore cette notion de valeur critique asymptotique.

1.3 Valeurs critiques généralisées et o-minimalité

Supposons maintenant fixée une structure o-minimale $\mathcal{A}$, et considérons une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 définissable dans $\mathcal{A}$. Soit U un ouvert *borné* de $\mathbb{R}^n$. Pour étudier des problèmes similiaires à ceux de la partie précédente, ou encore pour déterminer le comportement des trajectoires du champ de gradient au voisinage d'un point arbitraire de U, il faut localiser les singularités de f, mais aussi étudier le comportement de ∇f sur le bord de U. Considérons les valeurs c de f pour lesquelles il existe une suite $\{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \in U$ telle que $f(x_\nu) \to c$ et $\nabla f(x_\nu) \to 0$. Notons $K_a(f)$ cet ensemble de valeurs. N'ayant fait aucune hypothèse sur la nature de la suite $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, l'ensemble $K_a(f)$ contient les valeurs critiques de f et éventuellement d'autres valeurs. Cette définition permet de considérer des fonctions ne pouvant pas se prolonger au voisinage de certains points du bord de U. On obtient le résultat suivant :

Théorème 1.3.1 (KURDYKA). *L'ensemble $K_a(f)$ est fini et f est une fibration localement triviale au-dessus de chaque composante connexe de $\mathbb{R} \setminus K_a(f)$.*

La démonstration de la finitude de $K_a(f)$ passe par des méthodes issues de la géométrie semi-algébrique (lemme du petit chemin et lemme de monotonicité, ayant leurs analogues dans les catégories o-minimales). Dans la définition de valeur critique asymptotique de la partie 1.2, il est généralement impossible de s'affranchir de la quantité $|x|$ dans la condition **(M)**. En effet, considérons la fonction rationnelle $f(x,y) = \frac{y}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$. Les lignes de niveaux de f sont les droites vectorielles privées de l'origine et, sur une droite d'équation $y = tx$ on a $|\nabla f(x,y)| = \frac{1}{|x|}(t^2+1) \to 0$ quand $|x| \to +\infty$. Mais f est une fibration triviale sur $\mathbb{R}$. On modifie alors la définition de $K_a(f)$ comme suit :

Définition 1.3.2 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définissable de classe C^1. L'ensemble $K_a(f)$ des *valeurs critiques généralisées* est l'ensemble des nombres réels c pour lesquels il existe une suite $\{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \in U$ telle que $f(x_\nu) \to c$ et $(1+|x|) \cdot |\nabla f(x_\nu)| \to 0$.

Si U est borné on retrouve la définition de $K_a(f)$. Quand $U = \mathbb{R}^n$, toutes les valeurs critiques sont detectées à l'aide de suites contenues dans une même boule B (i.e. des suites convergentes). Si on restreint f au complémentaire de B, on retrouve la définition de $K_\infty(f)$. Remarquons que si la fonction n'a pas que des singularités isolées, alors le lieu singulier n'est pas forcément compact. C'est le cas par exemple de la fonction $f(x,y,z) = xyz$. Dans ce cas la valeur 0 est à la fois valeur critique et valeur critique asymptotique (considérer la suite $(x_n, y_n, z_n) = (n, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^3}))$. Les résultats de la partie 1.2 dans les cas polynomial ou semi-algébrique, et ceux dans le cas o-minimal pour un ouvert borné motivent l'étude des valeurs critiques généralisées de la définition 1.3.2.

1.4 Courbes intégrales du champ de gradient

Jusqu'à présent on a utilisé le gradient d'une fonction à la seule fin de détecter les niveaux au-dessus desquels on ne peut pas fibrer. Considérons une fonction f de classe C^2, définie sur un ouvert U. Alors le flot du champ $\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$ respecte les hypersurfaces de niveaux. Dans ce sens on rejoint l'idée de Thom qui est d'étudier le champ de gradient au moyen d'outils provenant de géométrie semi-algébrique ou semi-analytique. Les résultats obtenus permettent d'obtenir des informations supplémentaires sur la fonction : théorème de fibration, rétraction sur un niveau atypique (bifurcation), conjecture de Thom. Toutes ces questions sont en fait liées à la finitude (ou non) de la longueur des courbes intégrales du champ de gradient entre deux niveaux. Quand f est analytique, Łojasiewicz donne la réponse suivante

Théorème 1.4.1 (ŁOJASIEWICZ). *Si une trajectoire $x(t)$ du champ de ∇f admet un point limite $x_0 \in U$ (i.e. $x(t_\nu) \to x_0$ quand $t_\nu \to \infty$), alors $x(t)$ est de longueur finie et $x(t) \to x_0$ quand $t \to \infty$.*

Ce résultat est une conséquence de l'inégalité de Łojasiewicz : il existe $\rho < 1$ et $C > 0$ tel que $|\nabla f(x)| \geq C|f(x) - c|^\rho$ pour tout $x \in U$ tel que $f(x)$ est proche d'une valeur critique c. Ici f est analytique dans un voisinage de $\overline{U}$. Dans le contexte o-minimal, selon la structure considérée, il n'est pas toujours possible d'obtenir l'exposant ρ (cf. théorème 1.1.3). Kurdyka (cf. [20]) obtient toutefois une inégalité similaire pour une fonction f définissable C^2, en montrant qu'il existe une fonction définissable ψ et une constante $C > 0$ telles que $|\nabla(\psi_c \circ f)(x)| \geq C$ dès que $f(x)$ est proche de $c \in K_a(f)$. Cette minoration lui permet de montrer le

Théorème 1.4.2 *Il existe une constante A qui majore la longueur des courbes intégrales de ∇f.*

L'existence de cette borne uniforme est une étape importante dans la résolution de la "conjecture du gradient de R. Thom", récemment démontrée par Kurdyka, Mostowski et Parusiński (cf. [21]) pour une fonction analytique :

Conjecture du Gradient : Si une trajectoire $x(t)$ de ∇f admet un point limite $x_0 \in U$, alors la limite des sécantes $\lim_{t\to\infty} \dfrac{x(t)-x_0}{|x(t)-x_0|}$ existe.

La réponse à la conjecture de Thom est encore positive si f est définissable dans une structure o-minimale *polynomialement bornée* (cf. [23]).

Toutefois le théorème 1.4.2, comme le théorème de Thom (cf. théorème 1.2.2), assurent seulement l'existence d'une borne. La constante A est difficile à calculer en utilisant l'inégalité de Łojasiewicz. Cette dernière suggère que A dépend de C et ψ, et donc fortement du choix de f. Si f est un polynôme, rien ne garantit qu'en perturbant ses coefficients, on conserve un bon contrôle de la borne (notament si $C \to 0$).
Pourtant le calcul explicite de A et sa dépendance vis à vis de f ont des conséquences importantes en géométrie ainsi que dans un domaine comme la robotique par exemple.

Les structures o-minimales présentant de bonnes propriétés de finitude (le nombre de composantes connexes des éléments d'une famille définissable d'ensembles définissables est uniformément borné), on peut espérer, dans le cas polynomial, une borne effective indépendante des coefficients du polynôme.

2 Borne uniforme pour la longueur des trajectoires de gradient

Les résultats énoncés dans cette partie proviennent du chapitre 2 de ma thèse (voir aussi [11]).

On reprend, ici, les hypothèses du paragraphe 1.4. Soit $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ la restriction à la boule unité d'un polynôme de degré $d \geq 2$, où $n \geq 2$. Si on perturbe les coefficients de f, en restant en degré inférieur ou égal à d, on obtient une famille semi-algébrique de fonctions polynomiales. L'espace des paramètres $\mathcal{P}$ de telles perturbations est l'espace des coefficients du polynôme, de dimension $D(n,d)$. Pour majorer la longueur des trajectoires de ∇f, la constante C apparaissant dans l'inégalité de Łojasiewicz pose problème, car elle est difficile à contrôler. D'autre part, l'intégration d'un champ polynomial produit en général des courbes intégrales qui ne sont plus semi-algébriques. Par contre le champ ∇f est semi-algébrique ainsi que la fonction $\varphi(t) = \min\{|\nabla f(x)|^2 : \ x \in \overline{\mathbb{B}^n}, \ f(x) = t\}$. L'ensemble des points réalisant ces minima est semi-algébrique. Il contrôle la majoration de la longueur des courbes intégrales. On montre en fait que la longueur des courbes intégrales est majorée par une constante $A(n,d)$ ne dépendant que de la dimension de l'espace ambiant, et du degré du polynôme f.

2.1 Trajectoires de gradients de fonctions définissables

Soit $\mathcal{A}$ une structure o-minimale. Considérons une famille définissable (dans $\mathcal{A}$) de fonctions C^2, $\mathcal{F} = \{f_p\}_{p\in\mathbb{R}^k}$. La famille $\mathcal{F}$ est définissable dans le sens où la réunion des graphes des fonctions f_p est un ensemble définissable. Pour simplifier les hypothèses, disons que le domaine de définition des fonctions f_p est la boule ouverte $\mathbb{B}^n$. Sous ces hypothèses on obtient un résultat plus fort que le théorème 1.4.2.

Théorème 2.1.1 *Il existe une constante $M_{\mathcal{F}} > 0$ telle que pour tout $p \in \mathbb{R}^k$ et pour toute trajectoire x_p du champ ∇f_p, $\operatorname{long}(x_p) \leq M_{\mathcal{F}}$.*

Schéma de la Preuve.

(A) Pour chaque fonction f_p, on enlève à $\mathbb{B}^n$ les niveaux correspondant aux valeurs de $K_a(f_p)$. Dans $\mathbb{R} \setminus K_a(f_p)$, la fonction $\varphi_p(t) = \inf\{|\nabla f_p(x)| : \ x \in \mathbb{B}^n, f_p(x) = t\}$ est strictement positive.

(B) Pour tout $p \in \mathbb{R}^k$, on construit $\Delta_p = \{x \in \mathbb{B}^n \setminus f_p^{-1}(K_a(f_p)) : |\nabla f_p(x)| \leq 2\varphi(f_p(x))\}$.

(C) Par le théorème du choix définissable (une généralisation du lemme du petit chemin), on déduit l'existence dans Δ_p d'une courbe définissable Γ_p rencontrant chaque niveau de f_p (excepté les niveaux de $K_a(f_p)$) en exactement un point.

(D) La famille de courbes $\{\Gamma_p\}_{p\in\mathbb{R}^k}$ est définissable, et chaque courbe est de longueur finie. Par un résultat de finitude uniforme dans les structures o-minimales et une estimation de la longueur des courbes Γ_p au moyen de la formule de Cauchy-Crofton, on obtient une constante m, indépendante du paramètre p, qui majore la longueur des courbes Γ_p.

(E) Chaque courbe Γ_p vit dans une région de $\mathbb{B}^n$ où le gradient n'est pas "trop fort". Si on compare une trajectoire x_p de ∇f_p avec Γ_p, un calcul simple donne $\mathrm{long}(x_p) \le 2\mathrm{long}(\Gamma_p)$.

(F) Il suffit de prendre $M = 2m$ et on obtient la borne recherchée.

Supposons maintenant que $\mathcal{F} = \{f_p\}_{p\in\mathbb{R}^k}$ est une famille définissable de fonction C^2 telle que, pour tout $p \in \mathbb{R}^k$, f_p est définie sur un ouvert borné U_p. Notons d_p le diamètre de U_p. Par un changement affine de coordonnées (si $x_0 \in U_p$ on pose $x = x_0 + d_pX$), on se ramène à la situation du théorème 2.1.1, et on obtient

Théorème 2.1.2 *Il existe une constante $M_{\mathcal{F}} > 0$ telle que pour tout $p \in \mathbb{R}^k$ et pour toute trajectoire $x_p \subset U_p$ du champ ∇f_p, $\mathrm{long}(x_p) \le d_p M_{\mathcal{F}}$.*

2.2 Trajectoires de gradients de polynômes

Soient n et d des entiers $(n, d \ge 2)$. Considérons la famille semi-algébrique $\mathbb{R}_d[X]$ des polynômes à n variables et de degré plus petit ou égal à d. Une application directe du théorème 2.1.1 donne le corollaire suivant

Corollaire 2.2.1 *Il existe une constante $A(n, d)$ telle que pour tout polynôme $f \in \mathbb{R}_d[X]$, et toute trajectoire $x(t) \subset \mathbb{B}^n$ de ∇f, on a*

$$\mathrm{long}(x) \le A(n, d).$$

À ce stade, il est intéressant d'essayer de calculer cette borne $A(n, d)$. Dans la preuve du théorème 2.1.1, on a comparé la longueur des courbes intégrales à la longueur d'une courbe définissable Γ sur laquelle la norme du gradient, en chaque point x_Γ, est proche du minimum de la fonction $|\nabla f|$ restreinte au niveau $f(x_\Gamma)$. Contrairement à une famille définissable arbitraire, la restriction d'un polynôme f à la boule ouverte $\mathbb{B}^n$ se prolonge naturellement sur la boule fermée $\overline{\mathbb{B}^n}$. On peut alors définir le lieu des points où la fonction $|\nabla f|^2$ est minimale sur l'intersection d'un niveau arbitraire $f^{-1}(t)$ avec $\overline{\mathbb{B}^n}$. Notons encore Γ cet ensemble. L'ensemble semi-algébrique Γ va permettre d'évaluer $A(n, d)$, si il est de dimension 1. Si on décompose Γ en deux ensembles semi-algébriques $\Gamma_1 \subset \mathbb{B}^n$ et $\Gamma_2 \subset \mathbb{S}^{n-1}$, alors on observe les faits suivants :

(1) $\Gamma_1 \subset \Theta_1(f) = \{x \in \mathbb{B}^n : \mathrm{d}(|\nabla f|^2) \wedge \mathrm{d}f = 0\}$;

(2) $\Gamma_2 \subset \Theta_2(f) = \{x \in \mathbb{S}^{n-1} : \mathrm{d}(|\nabla f|^2) \wedge \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}(|x|^2) = 0\}$.

Notons que $\Theta_1(f)$ et $\Theta_2(f)$ correspondent respectivement aux lieux des points critiques de la fonction $|\nabla f|^2$ sur les niveaux de f dans $\mathbb{B}^n$ et dans $\mathbb{S}^{n-1}$.
En utilisant un théorème de transversalité avec paramètres on obtient un lemme de généricité

Lemme 2.2.2 *Il existe un ensemble semi-algébrique $E_d \subset \mathbb{R}_d[X]$, de codimension au moins égale à un, tel que pour tout polynôme $f \in \mathbb{R}_d[X] \setminus E_d$ les ensembles $\Theta_1(f)$ et $\Theta_2(f)$ sont des réunions finies de courbes algébriques et de points.*

Si $f \in \mathbb{R}_d[X] \setminus E_d$, alors $\Theta_1(f)$ et $\Theta_2(f)$ sont déterminés par l'ensemble des zéros communs de $n-1$ équations polynomiales. En utilisant le théorème de Bezout, le nombre maximal de points d'intersection de $\Theta_1(f)$ et $\Theta_2(f)$ avec un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ est donc majoré par le produit des degrés des polynômes qui déterminent ces deux courbes. La formule de Cauchy-Crofton appliquée aux courbes $\Theta_1(f)$ et $\Theta_2(f)$ implique le

Théorème 2.2.3 *Pour tout polynôme $f \in \mathbb{R}_d[X] \setminus E_d$ la longueur des courbes intégrales de ∇f est majorée par*

$$A(n,d) = \nu(n)((3d-4)^{n-1} + 2(3d-3)^{n-2}).$$

Dans la formule explicite de $A(n,d)$, le premier facteur est une constante dépendant uniquement de la dimension de l'espace ambiant. Dans le cas général, les ensembles $\Theta_1(f)$ et $\Theta_2(f)$ ne sont pas forcément des courbes. Prenons un polynôme non générique $g \in E_d$. La technique pour majorer la longueur des courbes intégrales de ∇g est d'approximer g par un polynôme générique f tel qu'en chaque point l'angle entre les vecteurs ∇g et ∇f est aussi petit qu'on le souhaite. On obtient alors un résultat valable pour tout polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$, soit :

Théorème 2.2.4 *Pour tout polynôme $f \in \mathbb{R}_d[X]$ la longueur des courbes intégrales (restreintes à la boule $\mathbb{B}^n$) de ∇f est majorée par*

$$A(n,d) = \nu(n)((3d-4)^{n-1} + 2(3d-3)^{n-2}).$$

Comme dans le paragraphe 2.1, si $f \in \mathbb{R}_d[X]$ et si $x(t)$ est une courbe intégrale de ∇f contenue dans une boule de rayon r quelconque, alors

$$\text{long}(x_p) \leq rA(n,d).$$

Récemment on a étendu les résultats du théorème 2.2.4 au cadre des polynômes exponentiels et trigonométriques (cf. [11]). En utilisant la théorie des Fewnomials de Khovanskiĭ, on a une estimation du nombre de points d'intersection entre une courbe définie par des polynômes exponentiels (ou trigonométriques) et un hyperplan. Le lemme de généricité 2.2.2 est également vrai dans le contexte des polynômes exponentiels ou trigonométriques et on obtient une borne dépendant de la dimension n, du degré d, du nombre d'exponentielles k et/ou de fonctions trigonométriques élémentaires (sin et cos).

Il serait intéressant de donner des bornes similaires dans le cas d'autres structures o-minimales, par exemple pour $x^\lambda-$fonctions.

3 Valeurs critiques asymptotiques et théorème de fibration

On reprend dans cette partie le contenu du chapitre 3 de ma thèse (voir aussi [6]).

Dans cette partie on considère une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définissable dans une structure o-minimale $\mathcal{A}$. On fait l'hypothèse suivante : U est un ouvert non borné de $\mathbb{R}^n$. Comme on l'a vu dans le paragraphe 1.2, si f est différentiable on peut définir l'ensemble $K_\infty(f)$. En fait, grâce à l'existence de fonctions tapissantes dans les structures o-minimales, on se ramène facilement au cas où f est définie sur $\mathbb{R}^n$. Dans cette situation on écrit

$$K_\infty(f) = \{c \in \mathbb{R} : \exists \{x_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n,\ |x_\nu| \to \infty,\ f(x_\nu) \to c,\ |x_\nu| \cdot |\nabla f(x_\nu)| \to 0\}.$$

L'ensemble $K_\infty(f) \subset \mathbb{R}$ est définissable dans $\mathcal{A}$, et donc un élément de $\mathcal{A}_1$. Les éléments de $K_\infty(f)$ sont les valeurs de f au-dessus desquelles la condition **(M)** de Malgrange n'est pas vérifiée. On montre que dans le cas o-minimal, si f est suffisament régulière, la condition **(M)** est une condition générique. C'est à dire

Théorème 3.0.5 *Si f est de classe C^1, alors l'ensemble $K_\infty(f)$ est un fini.*

Remarquons qu'il suffit de montrer que $K_\infty(f)$ ne contient pas d'intervalle. Si la structure o-minimale est polynomialement bornée, la démonstration repose sur des arguments classiques de géométrie semi-algébrique. À savoir le lemme du chemin à l'infini (établi en effectuant une compactification de $\mathbb{R}^n$ puis en appliquant le lemme du chemin classique) et le lemme de Gronwall. Quand la structure o-minimale contient la fonction exponentielle, le lemme de Gronwall ne permet pas de conclure.
On montre d'abord que l'ensemble $K_\infty(f)$ coïncide avec un certain ensemble

$$K_\infty^\varrho(f) = \{c \in \mathbb{R} : \exists \{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n,\ |x_\nu| \to \infty,\ f(x_\nu) \to c,\ \varrho(|x_\nu|)\cdot|\nabla f(x_\nu)| \to 0\},$$

où ϱ est une fonction définissable telle que $\frac{\varrho(r)}{r} \to +\infty$ quand $r \to +\infty$. L'idée est d'utiliser une *décomposition L-régulière* (cf. [23]) de l'ensemble $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(|x|)\cdot|\nabla f(x)| < 1\}$. On décompose Θ en une réunion finie d'ensembles Θ_i deux à deux disjoints, de sorte que la distance géodésique entre deux points x et y de $\Theta_i(r) = \Theta_i \cap S(r)$ est inférieure à $M(n)|x-y|$. La constante $M(n)$ dépend uniquement de la dimension de l'espace ambiant et $S(r)$ est la sphère de rayon r centrée à l'origine. Le calcul de $f(\Theta_i(r))$ et la croissance à l'infini de la fonction ϱ permettent de conclure : à chaque Θ_i correspond au plus une valeur critique asymptotique.

Remarque 3.0.6 *Lorsque f est un polynôme de deux variables complexes, Jelonek et Kurdyka (cf. [19]) donnent un algorithme pour calculer les valeurs critiques asymptotiques.*

Une conséquence importante au théorème 3.0.5 est la suivante

Théorème 3.0.7 *Si f est de classe C^2, alors f est une fibration localement triviale au-dessus de chaque composante connexe de $\mathbb{R} \setminus (K_0 \cup K_\infty(f)$.*

La finitude de $K_\infty(f)$ (rappelons que $K_0(f)$ est aussi fini) entraîne que la condition **(M)** de Malgrange est vérifiée dans un voisinage V_{t_0} pour tout $t_0 \in \mathbb{R} \setminus (K_0 \cup K_\infty(f))$; c'est-à-dire quand $f(x) \in V_{t_0}$ et x en dehors d'une boule $B_R = \{|x| \le R\}$. La condition **(M)** étant une condition suffisante de fibration à l'extérieur de B_R, on obtient la trivialisation sur $f^{-1}(V_{t_0})$ en intégrant le champ $\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$ à l'intérieur de B_R.

Remarque 3.0.8 *La trivialisation s'effectue ici en intégrant un champ de vecteur. Ce qui signifie qu'on a peu de chance d'obtenir une trivialisation définissable de cette façon. Cependant, l'existence d'une trivialisation définissable a été prouvée récemment par Escribano (cf. [18]).*

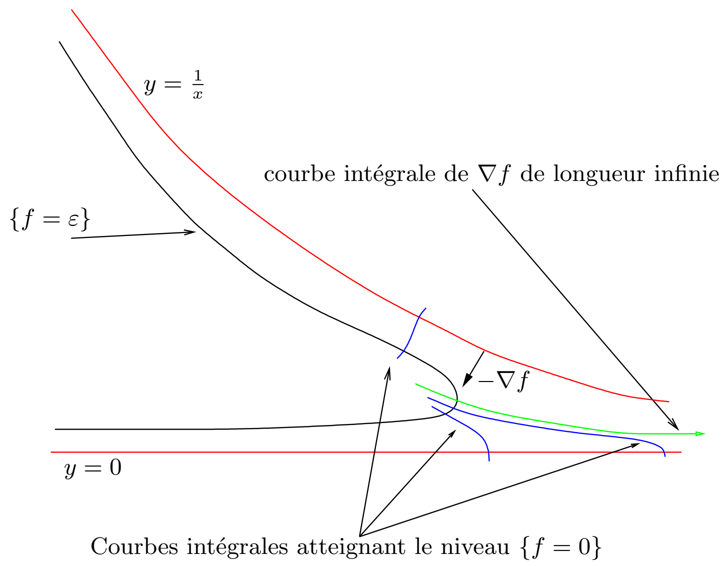
4 Théorème de plongement

Les résultats de cette parties sont détaillés dans le chapitre 4 de ma thèse (voir aussi [7]).

Dans la partie précédente on a vu que l'ensemble $K_0(f) \cup K_\infty(f)$ détecte toutes les valeurs de bifurcations d'une fonction définissable C^1. Supposons que pour une fonction donnée f, de classe C^1, l'ensemble $K_\infty(f)$ est non vide et qu'il contienne une valeur $c \notin K_0(f)$. Comme c et t ne sont pas des valeurs critiques, les niveaux $f^{-1}(c)$ et $f^{-1}(t)$ sont des hypersurfaces non singulières de $\mathbb{R}^n$. Puisque $c \in K_0(f) \setminus \cup K_\infty(f)$ comment $f^{-1}(c)$ diffère-t-il du niveau typique $f^{-1}(t)$, s'il diffère ?

4.1 Un exemple élémentaire fondamental

Soit le polynôme $f(x,y) = y(xy-1)$ défini sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\nabla f(x,y) = (y^2, 2xy-1)$ ne s'annule jamais, f est sans point critique. De plus on montre que $K_\infty(f) = \{0\}$. Une étude plus précise de ∇f montre que par chaque point du niveau $f^{-1}(0)$ passe une courbe intégrale qui dans son passé provient d'un niveau négatif arbitraire, et dans son futur atteint un niveau positif arbitraire. D'autre part, comme un niveau $t \neq 0$ arbitraire possède seulement deux composantes connexes, 0 est une valeur de bifurcation de f. Cela signifie qu'il existe au moins un point $x_0(t)$ sur chaque niveau $t < 0$ (le raisonnement est le même pour $t > 0$), tel que la courbe intégrale passant par $x_0(t)$ n'intersecte pas le niveau $f^{-1}(0)$. Le dessin suivant donne une idée de la situation dans le premier quadrant :



4.2 Théorème de plongement

Retournons au cas o-minimal, et considérons une fonction définissable f de classe C^2. On suppose toujours que $c \in K_\infty(f) \setminus K_0(f)$. Soit $t > c$ tel que l'intervalle $]c, t]$ ne contient ni valeur critique ni valeur critique asymptotique. En étudiant les courbes intégrales de ∇f issues d'un point du niveau $f^{-1}(c)$, on montre le résultat suivant

Théorème 4.2.1 (Plongement) *Il existe un plongement $\Phi_{c,t} : f^{-1}(c) \to f^{-1}(t)$. En particulier le flot du champ $\nabla f / |\nabla f|^2$ plonge chaque composante connexe du niveau $f^{-1}(c)$ dans une composante connexe du niveau $f^{-1}(t)$.*

L'idée est de montrer que la courbe intégrale passant par un point arbitraire du niveau $f^{-1}(c)$ atteint bien le niveau $f^{-1}(t)$ et en un temps fini. En quelque sorte, cela revient à montrer qu'au voisinage d'une valeur critique asymptotique, la courbe intégrale ne s'échappe pas à l'infini. Pour cela on établit une inégalité de Łojasiewicz à l'infini. C'est la proposition suivante

Proposition 4.2.2 *Il existe des réels $M, \eta, R > 0$ et une fonction définissable $\psi :]c, +\infty[\to \mathbb{R}$ tels que pour tout $|x| \geq R$ et $f(x) \in]c, c+\eta[$ on a*

$$|x| \cdot |\nabla(\psi \circ f)(x)| \geq M.$$

Cette inégalité permet de contrôler les courbes intégrales de ∇f au voisinage du niveau $f^{-1}(c)$ et donc d'intégrer le champ de direction $\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$. Ensuite, un théorème de prolongement des équations différentielles permet d'intégrer le champ $\frac{\nabla f}{|\nabla f|^2}$ jusqu'au niveau $f^{-1}(t)$. L'immersion est donc réalisée par la composition des flots de deux champs colinéaires, et en conséquence par le flot du champ ∇f. La régularité de f assure l'unicité de la trajectoire en un point donné, puisqu'il n'y a pas de points critiques dans la zone étudiée. Notons que ce théorème est vrai si la fonction f est définie sur une sous-variété fermée, connexe et définissable de $\mathbb{R}^n$.

Le théorème de plongement implique que le complémentaire dans $f^{-1}(t)$ de $\Phi_{c,t}(f^{-1}(c))$ est un ensemble fermé dans $f^{-1}(t)$. En dimension 2, c'est un ensemble définissable. Pour l'exemple du paragraphe 4.1, il est compact. Dans cet exemple on peut montrer que le complémentaire de l'image du plongement est réduit à un unique point.

Le théorème 4.2.1 dans le cas o-minimal a une application directe dans le cas de polynômes complexes, donnant lieu au corollaire suivant :

Corollaire 4.2.3 *Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe et $c \in K_\infty(f)$. Si t est une valeur typique de f, alors il existe un plongement $\phi_{c,t} : f^{-1}(c) \to f^{-1}(t)$ plongeant chaque composante connexe de $f^{-1}(c)$ dans une composante connexe de $f^{-1}(t)$.*

Il suffit de considérer f comme une application de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^2$ et d'appliquer le théorème 4.2.1 à la fonction $f_L : f^{-1}(L) \to L$ où L est une courbe algébrique lisse joignant la valeur critique asymptotique c et la valeur typique t. Notons que $f^{-1}(L)$ une hypersurface algébrique lisse de $\mathbb{R}^{2n}$.

4.3 Raffinements en dimension 2

Toujours dans le chapitre 4 de ma thèse, on s'est intéressé au cas de la dimension 2.

Dans cette partie on suppose f définie sur $\mathbb{R}^2$. Les autres hypothèses sur f donnée dans la partie précédente restent inchangées. Peut-on dans ce cas préciser la topologie de l'ensemble $f^{-1}(t) \setminus \Phi_{c,t}(f^{-1}(c))$?
Notons $I(t)$ l'ensemble $I(t) = f^{-1}(t) \setminus \Phi_{c,t}(f^{-1}(c))$. D'après le théorème 4.2.1, $I(t)$ est fermé. Si la fibre typique $f^{-1}(t)$ n'est pas compacte, $I(t)$ peut ne pas être borné. Il est également possible qu'une composante connexe du niveau $f^{-1}(t)$ soit contenue dans $I(t)$. Dans ce cas on dira que cette composante connexe est évanescente quand $t \to c$. Toutefois on obtient la description suivante

Théorème 4.3.1 *L'ensemble $I(t)$ est homéomorphe à une réunion finie d'intervalles de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et de points. En particulier, $I(t)$ est définissable.*

Par contre, rien ne garantit que la réunion $\displaystyle\bigcup_{t_0 \leq t < c} I(t)$ est définissable. Cette réunion est définissable si et seulement si son bord est définissable. Autrement dit s'il est constitué de courbes intégrales définissables. Bien sûr, en dimension deux, les courbes intégrales de longueur infinies (c'est-à-dire passant par un point de $I(t)$) sont définissables dans une structure o-mimimale plus grande que $\mathcal{A}$: la clôture pfaffienne de $\mathcal{A}$.

Reprenons l'exemple du paragraphe 4.1, soit $f(x, y) = y(xy - 1)$. On peut d'adord montrer que pour tout $t \neq 0$, l'ensemble $I(t)$ est compact. En fait, dans cet exemple, on peut facilement localiser les courbes $x(t)$ intégrales de ∇f qui vont à l'infini quand $f \circ x(t) \to 0$. Puis en étudiant la géométrie des fibres de f, on déduit l'unicité d'une telle courbe intégrale. Notons que dans une structure o-minimale comme $\mathbb{R}_{\exp}$, on peut assez facilement construire des fonctions telles que les composantes compactes de $I(t)$ ne sont pas d'intérieur vide.

Dans tous les cas on distingue trois types de composantes connexes pour $I(t)$.

1. $I_v(t)$ est la réunion des composantes connexes évanescentes de $f^{-1}(t)$;
2. $I_c(t)$ est la réunion des composantes connexes compactes de $I(t)$;
3. $I_\infty(t) = I(t) \setminus (I_c(t) \cup I_v(t))$.

On obtient alors le résultat suivant

Proposition 4.3.2 *Soit f une fonction définissable C^2 et $0 \in K_\infty(f)$. La fonction f est une fibration localement triviale au dessus de 0 si et seulement si $I_c(t)$ et $I_v(t)$ sont vides (i.e. $I(t) = I_\infty(t)$) pour tout $t \neq 0$ suffisament proche de 0.*

Si $I_v(t) \neq \emptyset$ ou $I_c(t) \neq \emptyset$, alors 0 est nécessairement une valeur de bifurcation de f. La réciproque utilise des arguments semblables à ceux de Tibar et Zaharia (cf. [29]) après avoir établi une formule liant la caractéristique d'Euler de $f^{-1}(t)$, celle de $f^{-1}(0)$ et le nombre de composantes connexes de $I_v(t)$ et $I_c(t)$.

5 Trivialisation par le gradient

5.1 Une inégalité de type Łojasiewicz

Les résultats exposés ci-dessous ont fait l'objet de récents travaux avec V. Grandjean (cf. [9] et [10]).

Si f est un polynôme complexe il y a un nombre fini de valeurs critiques généralisées. Lorsque Thom avait énoncé son résultat il n'avait donné aucune “méthode” pour trouver les valeurs de bifurcations qui n'étaient pas valeurs critiques. On sait maintenant qu'elles sont à chercher dans $K_\infty(f)$ puisque la restriction de la fonction f au complémentaire de $f^{-1}(K(f))$ induit une fibration holomorphe localement triviale. Quand, après compactification projective de $\mathcal{C}^n$, les singularités à l'infini des fibres régulières de f sont isolées (i.e. des points isolés de l'hyperplan à l'infini) Parunsiński montre dans [27] que $B(f) = K(f)$ et que $t_0 \notin K_0(f)$ n'est pas une valeur critique asymptotique si et seulement si la caractéristique de d'Euler de $f^{-1}(t)$ est constante dans un voisinage de t_0. Dans le cas général on ne sait toujours pas si $B(f) = K(f)$.

Considérons maintenant un polynôme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. La situation réelle est bien plus compliquée que la situation complexe. Soit $f_\mathbb{C}$ le prolongement naturel de f comme fonction polynomiale sur $\mathbb{C}^n$. Soit c une valeur régulière réelle de f. Alors il est possible que $c \in K(f_\mathbb{C}) \setminus K(f)$ (on n'a pas d'exemple pour le moment, avec c réel et valeur critique asymptotique complexe). Il se peut aussi que $c \in B(f_\mathbb{C}) \setminus B(f)$, c'est la situation de l'exemple de King-Tibăr- Zaharia, dans le plan $f = y(2x^2y^2 - 9xy + 12)$ avec $c = 0$. Supposons que c est une valeur critique asymptotique de f. Dans ce cas l'inégalité de la proposition 4.2.2 s'exprime plus simplement. Il $\varepsilon, C, R, \varrho > 0$ tels que pour tout $x \in f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]) \cap \{|x| \geq R\}$ on a

$$|x||\nabla f(x)| \geq C|f(x) - c|^\varrho$$

On montre alors la

Proposition 5.1.1 *L'exposant ϱ de l'inégalité précédente est inférieur ou égal à* 1.

Contrairement au cas d'une singularité dans l'affine, l'exposant lié à une singularité à l'infini peut être égal à 1. C'est le cas par exemple pour la fonction de Broughton $f(x, y) = y(xy - 1)$ alors que pour la fonction $f(x, y = y^1 1 + (1 + (1 + x^2)y)^3$ proposée par Parusiński l'exposant est égal à 19/22. On montre en fait la

Théorème 5.1.2 *Si l'exposant ϱ associé à une valeur critique asymptotique $c \in \mathbb{R}$ d'un polynôme f est strictement plus petit que* 1*, alors le flot du champ $\nabla f/|\nabla f|^2$ trivialise la fonction f au voisinage de $f^{-1}(c)$.*

Remarque 5.1.3 *En fait ce résultat est encore vrai si f est une fonction C^1 et définissable dans une structure o-minimale sur les réels, polynomialement bornée dont le corps (de Hardy) des exposants est discret dans $\mathbb{R}$.*

Nous dirons qu'une trajectoire γ du champ de gradient ∇f est de longueur infinie en c si $|\gamma(t)| \to \infty$ et $(f \circ \gamma)(t) \to c$ quand $t \to \infty$. Comme conséquence du théorème 5.1.2, on a le

Corollaire 5.1.4 *Soit γ une trajectoire de longueur infinie en c, alors l'exposant ρ_c de Kurdyka-Łojasiewicz à l'infini en c vaut* 1.

On ne sais toujours pas si la réciproque du théorème 5.1.2 est vrai même pour des polynômes à deux variables.

5.2 Polynômes du plan réel

Soit f est un polynôme de degré d défini sur le plan réel et c une valeur critique à l'infini de f. Supposons de plus qu'il existe au plus un nombre fini de niveaux de f qui contiennent une droite affine.

Valeurs régulières et de bifucation :

Ces résutats plus anciens ne figurent pas dans notre prépublication.

Supposons que c est une valeur régulière mais de bifurcation. Soit $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit tel que si $0 < |t-c| \leq \varepsilon_0$ alors t est une valeur régulière de f qui n'est pas valeur critique asymptotique. Alors il existe au moins une composante connexe de $f^{-1}([c-\varepsilon_0, c+\varepsilon_0])$ dont le germe à l'infini n'est pas vide. Appelons-la Λ. On suppose de plus que pour $t \in [c-\varepsilon_0, c[$, $f^{-1}(t) \cap \Lambda =: F_t$ est connexe et compact (dès qu'on a fixé un représentant de Λ, quitte à prendre un ε_0 plus petit). Les configurations données par Coste et de la Puente, dans [5], assurent qu'alors la partie non compacte du bord de Λ est la réunion de deux demi-branches infinies de $f^{-1}(c)$ qui sont asymptotes. Le théorème de plongement 4.2.1 assure que pour chaque $t \in [-t_0, 0[$, il existe un sous-ensemble propre $I_c(t)$ de F_t compact et connexe, formé de tous les points de F_t qui ne seront jamais envoyés sur une des deux demi-branches infinies de $f^{-1}(c)$ par le flot de ∇f. Autrement dit toute trajectoire passant par un point de $I_c(t)$ reste à jamais à l'intérieur de Λ.

On a alors le résultat, très raisonnable, suivant :

Théorème 5.2.1 *Sous l'hypothèse que, pour tout $t \in [c-\varepsilon_0, c[$ le champ de gradient pointe à l'extérieur de l'enveloppe convexe de $I_c(t)$ en chacun des points de $I_c(t)$ (i. e. le germe de trajectoire issue de $q \in I_c(t)$ et le germe de F_t au voisinage de q sont dans les deux demi-plans différents formés par la tangente à F_t en q), alors $I_c(t)$ est réduit à un point. Autrement il existe une unique trajectoire de ∇f qui reste dans Λ.*

Remarque 5.2.2 Sous des hypothèses analogues, le même résultat d'unicité de trajectoire est vrai pour un champ de gradient de fonction analytique réelle du plan (par exemple $y^2 - x^3$) au voisinage d'une singularité isolée.

Ce théorème nous conduit à un problème de variation de la monotonie de la courbure algébrique des fibres F_t. En effet, pour mettre en défaut le théorème 5.2.1, il faut trouver une demi-branche $\mathcal{C}$ de l'ensemble des points d'inflexion des fibres F_t qui reste dans Λ, et telle que la direction limite en l'infini de ∇f restreint à $\mathcal{C}$, soit exactement la direction limite à l'infini de Λ (il est connu et simple de montrer que les deux demi-branches de $f^{-1}(c)$ sont asymptotes, et celà a donc un sens de parler de la direction limite à l'infini de Λ).

6 Diamètre géodésique d'une composante connexe compacte d'un ensemble algébrique réel

Dans un travail récent travail avec K. Kurdyka (cf. [12]) nous avons essayé d'appliquer les méthodes de majorations de longueurs de courbes intégrales du champ de gradient (cf. section 2) pour majorer le diamètre géodésique de certains ensembles algébriques.

6.1 Diamètre géodésique

Considérons un polynôme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de degré $d \geq 2$. Supposons que 0 n'est pas une valeur critique de φ et considérons M une composante connexe de $\varphi^{-1}(0)$. Peut-on majorer le diamètre géodésique de $M \cap B^n(r)$ uniquement en fonction de n, d et r ?

À l'heure actuelle nous avons une réponse partielle à la question ci-dessus. Supposons que M est contenu dans une boule de rayon r. Alors on a le résultat suivant

Théorème 6.1.1 *Pour un polynôme générique φ de degré $d \geq 2$, le diamètre géodésique de M est majoré par*

$$D(n,d) = 2r\nu(n)d(4d-5)^{n-2},$$

où $\nu(n)$ est une constante explicite.

En fait $\nu(n)$ est la constante de normalisation pour la formule de Cauchy-Crofton, il s'agit de la même constante que dans la partie 2.

Schéma de la preuve

(A) Pour presque toute droite vectorielle L de $\mathbb{R}^n$, la restriction à M de la projection orthogonale $f : \mathbb{R}^n \to L$ est une fonction de Morse. Si on note $f_L : M \to L$ cette application, alors f_L a un nombre fini de points critiques et ceux-ci sont non-dégénérés.

(B) La fonction f_L définit naturellement sur M un champ de vecteur $\nabla_M f$, tangent à M qui s'annule uniquement aux points critiques de f_L. En d'autres termes, si L est engendrée par le dernier vecteur e_n de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout $x \in M$, on a

$$\nabla_M f(x) = e_n - \langle e_n, \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}\rangle \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}.$$

(C) On intègre ensuite le champ $\nabla_M f$ et on majore la longueur des courbes intégrales de $\nabla_M f$ en suivant l'idée de la partie 2.2.

(D) On montre que pour un polynôme générique, l'ensemble

$$\theta_M(f) = \{x \in M : \mathrm{d}(|\nabla_M f|^2) \wedge \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\varphi = 0\}$$

des points critiques de la fonction $|\nabla_M f|^2$ sur les niveaux de f est de dimension inférieure ou égale à 1. L'ensemble $\theta_M(f)$ contient le lieu des minima de la fonction $|\nabla_M f|^2$ sur les niveaux de f et est défini par $n-1$ équations polynomiales dont on peut aisément déterminer le degré.

(E) En utilisant le théoreme de Bezout et la formule de Cauchy-Crofton on obtient que la longueur des courbes intégrales de $\nabla_M f$ est majorée par

$$r\nu(n)d(4d-5)^{n-2}.$$

(F) D'après [11] (cf. section 8) Tout couple de points de M peuvent être joints par une réunion finie de trajectoires de $\nabla_M f$ dont la longueur est majorée par le double de la borne ci-dessus. On procède par induction sur le nombres de points critiques de la fonction f restreinte aux composantes connexes de $A_t = f^{-1}(\{s > t\}$. C'est évident lorsque A_t contient un seul point critique qui est alors un maximum global de f. Le point non trivial de la démonstration est lorsqu'on ajoute un point selle. Si une trajectoire échoue en un tel point, on la prolonge par une trajectoire de $-\nabla_M f$ qui arrive aussi en ce même point. Notons que chaque composante connexe de $f^{-1}(s)$ contient un point qui est un minimum local de $|\nabla_M f|^2$ restreint à $f^{-1}(s)$. On obtient alors la borne voulue, soit

$$2r\nu(n)d(4d-5)^{n-2}.$$

Le passage au cas général est plus délicat que pour la partie 2.2, toutefois on obtient le résultat suivant

Théorème 6.1.2 *Pour tout polynôme φ de degré $d \geq 2$, le diamètre géodésique de M est majoré par*

$$D(n,d) = 2r\nu(n)d(4d-5)^{n-2}.$$

Le résultat précédent est encore vrai si $M = \cup_i M_i \subset B(r)$ est une réunion finie de composantes connexes compactes $M_i \subset \varphi^{-1}(0)$. Ceci permet d'aboutir à la conclusion du théorème 6.1.2 lorsque $M \subset \varphi^{-1}(0)$ et 0 est une valeur critique de φ.

6.2 Exemples et optimalité de la borne

Nous avons produit des exemples qui montrent que notre borne est asymptotiquement optimale, et optimale en dimension 2.

Notons $C(n,d)$ le supremum des diamètres géodésiques d'une composante connexe compacte $M \subset \varphi^{-1}(0)$ contenue dans la boule unité de $\mathbb{R}^n$, pour φ variant dans l'espace des polynômes à n variables de degré d. Notre borne étant linéaire par rapport au diamètre (pour la métrique euclidienne), l'hypothèse d'inclusion dans la boule unité n'est pas restrictive. Le résultat suivant fait suite à une discussion avec M. Coste et J-M. Lion.

Théorème 6.2.1 *Pour tout $d \geq 2$, $C(2,d) = \pi[d/2]$ où $[d/2]$ est la partie entière de $d/2$.*

Remarquons que la longueur d'une courbe compacte plane $\{\varphi = 0\}$, où φ est un polynôme de deux variables et de degré d, est majorée par πd (c'est la formule de Cauchy-Croton). Le diamètre géodésique est donc majoré par $\pi d/2$.

Si d est pair, on prend pour φ l'equation d'un produit de $d/2$ cercles de rayon voisin de 1. On choisit les cercles de sorte que la courbe $\varphi^{-1}(0)$ soit connexe et de longueur voisine de πd. Alors, d'après le théorème de Brusotti, on peut déformer φ en un polynôme $\tilde{\varphi}$ tout en préservant le degré d de sorte que $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$ soit une courbe algébrique lisse compacte et connexe. Le diamètre géodésique de $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$ est proche de $\pi d/2$. On peut itérer cette construction et produire des courbes dont le diamètre géodésique est aussi proche de $\pi d/2$ qu'on le souhaite.

On conclut en degré impair en remarquant que dans ce cas $\varphi^{-1}(0)$ a toujours une composante connexe non compacte.

En dimension supérieure on a la minoration suivante :

Théorème 6.2.2 *Pour tout $d, n \geq 2$, $C(n, 2d) \geq 2d^{n-1}$.*

La borne énoncée ici est légèrement meilleure que celle de l'article [12]. Nous avons modifié notre famille d'exemple pour supprimer un facteur $n^{-1/2}$ dans le minorant. Cette amélioration me fut suggérée par J-M. Lion.

On considère le polynôme

$$p_{d,n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - T_d(x_i))^2,$$

où T_d est le d-ème polynôme de Chebyshev de première espèce. L'ensemble des zéros de $p_{d,n}$ est une courbe lisse qui est l'intersection des hypersurfaces $\{(x_{i+1} = T_d(x_i)\}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Choisissons $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et définissons

$$\tilde{P}_{d,n}(x) = p_{d,n}(x) - \varepsilon(n - |x|^2).$$

Le diamètre géodésique de $\tilde{P}_{d,n}^{-1}(0)$ est presque égal à la longueur de la courbe $p_{d,n}^{-1}(0) \cap B(0, \sqrt{n})$ qui est au moins égale à $2d^{n-1}$. Par changement de variable linéaire on ramène l'hypersurface $\tilde{P}_{d,n}^{-1}(0)$ dans la boîte $[-\delta, \delta]^{n-1} \times [-1, 1]$ (pour δ assez petit) sans changer le diamètre géodésique, ce qui permet de conclure.

7 Lignes de crêtes et de Talweg

7.1 Inégalité de Łojasiewicz effective

Dans un travail récent avec K. Kurdyka (cf. [13]) nous étudions les lignes de crêtes et de Talweg d'une fonction polynomiale réelle. Il s'agit du lieu des points où la fonction $|\nabla f|^2$ restreinte aux hypersurfaces de niveau de f admet un extremum local quand f est une fonction analytique dans un voisinage ouvert de l'origine. Cette étude est motivée d'une part par le fait que cet ensemble de points est génériquement de dimension 1 et d'autre part parce qu'il s'avère utile dans l'étude de certains problèmes géométriques. Comme on l'a vu précédemment, il donne une borne pour la longueur des courbes intégrales de ∇f. Rappelons l'expression de $\Theta(f)$, l'ensemble des points critiques de la fonction $|\nabla f|^2$ restreinte aux niveaux de f :

$$\Theta(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{d}\ (|\nabla f|^2) \wedge \mathrm{d}\ f = 0\}.$$

Rappelons que l'ensemble $\Theta(f)$ est génériquement une courbe algébrique décrite par les zéros communs de $n-1$ équations polynomiales de degré inférieur ou égal à $3d-4$. L'un des buts de ce travail est de donner une majoration de l'exposant de Łojasiewicz lié à une singularité. Rappelons tout d'abord l'inégalité de Łojasiewicz classique pour un polynôme f au voisinage d'une singularité ($f(0)=0$ et $\nabla f(0)=0$) qui est valable aussi pour une fonction analytique dans un voisinage de l'origine : Il existe un voisinage U de $0 \in \mathbb{R}^n$ et des constantes strictement positives C, ϱ avec $\varrho < 1$ tels que pour tout $x \in U$ on a

$$|\nabla f(x)| \geq C|f(x)|^{\varrho}.$$

On appelle *exposant de Łojasiewicz* le plus petit exposant satisfaisant une inégalité de ce type en 0 et on le note ρ_f. La dimension n de l'espace ambiant et le degré d de f étant fixés, il est raisonnable de se demander si on peut borner ρ_f par une fonction de n et d. Cette étude est motivée par le fait qu'en dimension 2 l'exposant de Łojasiewicz est majoré par $1-\frac{1}{d^2}$. Si on peut estimer un majorant pour l'exposant sur l'ensemble $\Theta(f)$, alors on a gagné. Remarquons que par un point critique passe une composante connexe de $\Theta(f)$ sur laquelle la fonction $|\nabla f|^2$ restreinte aux niveaux de f a un minimum local. On définit le Talweg de f en 0 comme étant la courbe où le plus petit de ces minima est réalisé et on le note $\mathcal{TW}^{inf}(f)$. On obtient en fait le résultat suivant :

Proposition 7.1.1 *Pour un polynôme générique $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de degré d l'exposant de Łojasiewicz ϱ_f associé à une singularité est majoré par*

$$R(n,d) = 1 - \frac{1}{d(3d-3)^{n-1}}.$$

En dimension 2 on retrouve une majoration du même ordre (en $1/d^2$) que celle énoncée ci-dessus. La preuve utilise le fait que la multiplicité d'intersection de f et $\Theta(f)$ est bornée par le produit des degrés de f et des $n-1$ polynômes qui définissent $\Theta(f)$, soit $d(3d-3)^{n-1}$. Supposons que $f(0)=0$ et $\nabla f(0)=0$. Alors si on paramètre $\mathcal{TW}^{inf}(f)$ par sa longueur d'arc ($s \mapsto \gamma(s)$ et $\mathrm{Im}\,\gamma \subset \Theta(f)$), par définition, la multiplicité d'intersection de f et $\Theta(f)$ est l'ordre de $f \circ \gamma$ en 0. Un simple calcul montre que l'exposant de Łojasiewicz est majoré par $R(n,d) = 1 - \frac{1}{d(3d-3)^{n-1}}$.

Le passage au cas général est un peu délicat. En effet pour un polynôme non générique, l'ensemble $\Theta(f)$ est de dimension plus grande que 1. Nous allons approcher f par une famille de polynômes génériques. Soit $\mathcal{F} = \{f_t\}$ une famille algébrique de polynômes de degré fixé d telle que $\mathcal{F}$ dépend algébriquement du paramètre $t \in]0,1]$ et pout tout t l'ensemble $\Theta(f_t)$ est une courbe algébrique réelle. Soit Θ_0 la limite de Hausdorff des courbes $\Theta(f_t)$ lorsque t tend vers 0. En général cette limite est un ensemble semi-algébrique et on ne peut rien en conclure quant à la multiplicité d'intersection de f et Θ_0. L'idée est donc de complexifier la famille de polynômes $\mathcal{F}$ et les équations $g_{1,t} = \cdots = g_{n-1,t} = 0$ qui définissent les courbes algébriques $\Theta(f_t)$. Soit

$$\Theta(f_t^{\mathbb{C}}) = \{g_{1,t}^{\mathbb{C}} = \cdots = g_{n-1,t}^{\mathbb{C}} = 0\} \subset \mathbb{C}^n$$

L'intérêt de passer en complexe est que cette fois $\Theta_0^{\mathbb{C}} = \overline{\cup_{t>0}\Theta(f_t^{\mathbb{C}})} \setminus \cup_{t>0}\Theta(f_t^{\mathbb{C}})$ est une courbe algébrique et la multiplicité d'intersection entre $\Theta_0^{\mathbb{C}}$ et $f_0^{\mathbb{C}}$ n'est pas plus grande que celle entre $\Theta(f_t^{\mathbb{C}})$ et $f_t^{\mathbb{C}}$. Mais l'ensemble des points réels de $\Theta_0^{\mathbb{C}}$ contient Θ_0 et la multiplicité d'intersection de Θ_0 et f en 0 est majorée par $d(3d-3)^{n-1}$. Comme Θ_0 est contenue dans $\Theta(f)$ on a alors montré le

Théorème 7.1.2 *Pour tout polynôme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de degré d, l'exposant de Łojasiewicz ϱ_f associé à une singularité est majoré par*

$$R(n,d) = 1 - \frac{1}{d(3d-3)^{n-1}}.$$

7.2 Talweg et carte routière

Considérons comme dans la partie 6 un polynôme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de degré $d \geq 2$ et soit $M \subset \varphi^{-1}(0)$ une composante connexe compacte du niveau 0 de φ. Nous aurions pu prendre pour M la réunion des composantes connexes compactes, mais notre hypothèse n'est pas restrictive. Dans la partie loc. cit. nous avons donné un moyen pour joindre deux points arbitraires dans la composante connexe M. Mais la courbe qui joint ces deux points n'est en général pas semi-algébrique. Toutefois, pour estimer la longueur d'une telle courbe, nous nous servons de l'ensemble $\Theta_M(f)$ où f est la restriction à M de la projection orthogonale sur une droite bien choisie de $\mathbb{R}^n$. Cette étude n'est pas très éloignée de l'étude des cartes routières (*roadmaps*). rappelons-en la définition :

Définition 7.2.1 *On dit qu'une courbe semi-algébrique $R(M) \subset M$ est une carte routière pour M si les conditions suivantes sont satisfaites.*

1. *$R(M)$ est connexe.*
2. *Si $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ désigne la projection sur la première coordonnée, et C l'une quelconque des composantes connexes de $\pi^{-1}(x_1) \cap M$ pour $x_1 \in \mathbb{R}$, alors $C \cap R(M)$ est non vide.*

L'ensemble $\Theta_M(f)$ est génériquement de dimension 1 et satisfait de façon évidente la propriété 2 de la définition 7.2.1. Pour montrer que $\Theta_M(f)$ est une carte routière, il suffit de montrer qu'il est connexe. Ceci étant un travail en cours, nous n'avons pour l'instant pas de réponse définitive. Toutefois, nous énonçons la question suivante :

Question : *L'ensemble $\Theta_M(f)$ est génériquement connexe.*

Notons que si la réponse est positive, alors en considérant un polynôme non générique φ_0 comme limite de polynômes génériques φ_t (on fait éventuellement bouger la droite L) la limite de Hausdorff des courbes Θ_t reste connexe et le résultat est vrai pour tout polynôme.

Cette étude est motivée par les travaux de Basu, Pollack et Roy (voir [1]) sur les cartes routières. Leur construction donne une courbe semi-algébrique $R(M)$ dont la longueur est de l'ordre de $d^{O(n^2)}$. Ils montrent en fait qu'ils peuvent joindre deux points de M via $R(M)$. Dans la partie 6 nous joignons nos points par une courbe dont la longueur est de l'ordre de d^{n-1}, mais qui n'est en général pas semi-algébrique. Si nous arrivons à montrer que $\Theta_M(f)$ est connexe, nous obtiendrons une façon de joindre deux points arbitraires de M par une courbe semi-algébrique dont la longueur est de l'ordre de d^{n-1} ; ce qui en soit serait une avancée intéressante et importante.

8 Applications des résultats par d'autres auteurs

Certains des résultats mentionnés précédemment ont donné lieu à des applications par d'autres auteurs. Je vais essayer d'en esquisser quelques unes.

8.1 Géométrie semi-algébrique

Dans notre article [11], K. Kurdyda a appliqué le résultat de la borne uniforme (cf. 2) pour majorer le diamètre géodésique de certains ensembles semi-algébriques. Il obtient alors

Théorème 8.1.1 (Kurdyka) *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ avec $n \geq 2$, un polynôme de degré $d \geq 2$ et $B^n(r)$ une boule de rayon r. Alors la somme des diamètres géodésiques des composantes connexes de $\{f > 0\} \cap B^n(r)$ est bornée par $2rA(n, d+2)$, où $A(n, d+2) = 2\nu(n)((3d+2)^{n-1} + 2(3d+3)^{n-2})$.*

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on considère l'ensemble $\Sigma_\varepsilon = \{x \in B^n(r) : |\nabla f(x)| < \varepsilon\}$. L'ensemble $f(\Sigma\varepsilon)$ est l'ensemble des valeurs "presque critiques" de f. Rappelons le résultat suivant dû à Yomdin.

Théorème 8.1.2 (Yomdin) *L'ensemble $f(\Sigma\varepsilon)$ peut être recouvert par $N(n,d)$ segments de longueur $r\varepsilon$. Le nombre $N(n,d)$ dépend uniquement de la dimension n et du degré d.*

Kurdyka donne une borne explicite et réaliste pour le nombre $N(n,d)$. En considérant cette fois $\Sigma_\varepsilon = \{x \in \overline{B^n(r)} : |\nabla f(x)| < \varepsilon\}$, et en utilisant les résultats de 2.2, il obtient

$$N(n,d) \leq d(2d-1)^{n-1} + A(n,d).$$

Ceci constitue, à ma connaissance, la première borne explicite pour $N(n,d)$. Cette borne est réaliste dans le sens où il existe des polynômes de degré d ayant $(d-1)^n$ valeurs critiques.

8.2 Feuilletages définissables

Les résultats suivants sont dûs à J.M Lion et F. Chazal (cf. [4]). Il généralisent les résultats obtenus dans la partie 2.1 pour des feuilletages définissables de codimension quelconque. Leur démarche consiste à exploiter l'idée de la section définissable qui nous a servi dans la preuve du théorème 2.1.1.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension p sur une sous variété M de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$, soit X un sous ensemble compact de M et soit Ω une p-forme définie sur M annulée par tout champ tangent à $\mathcal{F}$. Supposons que $\mathcal{F}$, M, Ω et X sont définissables dans une structure o-minimale donnée. Alors on a le résultat suivant

Théorème 8.2.1 (Chazal-Lion) *Il existe $\Gamma \subset \overline{X}$ définissable de codimension p vérifiant la propriété suivante : si C est une sous-variété de dimension p contenue dans X telle que*

$$\int_C |\Omega| > \int_\Gamma |\Omega|$$

alors C rencontre une feuille de $\mathcal{F}$ en au moins deux points.

Notons que si $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\lambda$, $M = M_\lambda$, $\Omega = \Omega_\lambda$ et $X = X_\lambda$ dépendent de façon définissable d'un paramètre λ, alors $\Gamma = \Gamma_\lambda$ dépend de façon définissable de λ.

Références

[1] S. Basu, R. Pollack, M-F. Roy, *Algorithms in real algebraic geometry,* Algorithms and Computation in Mathematics, 10. Springer-Verlag, Berlin (2003).

[2] F. Cano, R. Moussu, F. Sanz, *Oscillation, spiralement, tourbillonnement,* Comment. Math. Helv. 75, No.2 (2000), 384-318.

[3] F. Chazal, *Sur les feuilletages de Rolle* Thèse de l'université de Bourgogne (1997).

[4] F. Chazal, J.M Lion, *Volumes transverses aux feuilletages dans des structures o-minimales,* Preprint de l'université de Bourgogne.

[5] M. Coste, M. J. de la Puente, *Atypical values at infinity of a polynomial function on the real plane : an erratum and an algorithmic criterion,* J. Pure Appl. Algebra 162 (2001), pp. 23-35.

[6] D. D'Acunto, *Valeurs Critiques Asymptotiques d'une Fonction Définissable dans une Structure o-minimale,* Ann. Pol. Math 75 (2000), pp. 35-45.

[7] D. D'Acunto, *Sur la topologie des fibres d'une fonction définissable dans une structure o-minimale,* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337 (2003), no. 5, 327–330.

[8] D. D'Acunto, *Sur les courbes intégrales du champ de gradient,* Thèse de l'université de Savoie (2001).

[9] D. D'Acunto & V. Grandjean, *On gradient at infinity of semialgebraic functions,* Ann. Pol Math., 87 (2005)

[10] D. D'Acunto & V. Grandjean, *A gradient inequality at infinity for tame functions,* Revista Mat. Complutense 18 (2005)

[11] D. D'Acunto, K. Kurdyka, *Bounds for gradient trajectories of polynomial and definable functions with applications,* prepublication du LAMA, Université de Savoie (2002), soumis à J. Diff. Geometry.

[12] D. D'Acunto, K. Kurdyka, *Geodesic diameter of compact connected component of an algebraic set algebraic hypersurfaces*, prepublication du LAMA, Université de Savoie (2003), à paraître dans Bull. London Math. Soc. (2006)

[13] D. D'Acunto, *Explicit bound for the Łojasiewicz exponent in the gradient inequality for polynomials*, Ann. Pol. Math. 87 (2005)

[14] S. K. Donaldson, *Symplectic submanifold and almost-complex geometry,* J. Diff. Geometry 44 (1996), pp. 666-705.

[15] A. Dimca, *Singularities and topology of hypersurfaces,* Universitex, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, 1992.

[16] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures,* London Math. Soc Lecture Notes 248, Cambridge University Press.

[17] L. van den Dries, C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures,* Duke Math. Journal, 84 (1996), pp. 497-540.

[18] J. Escribano, *Bifurcation sets of definable functions in o-minimal structures,* Proc. Am. Math. Soc. 130, No.8 (2002), pp. 2419-2424.

[19] Z. Jelonek, K. Kurdyka, *On asymptotic critical values of a complex polynomial, J. Reine Angew. Math. 565 (2003), 1–11.*

[20] K. Kurdyka, *On gradients of functions definable in o-minimal structures,* Ann. Inst. Fourier, 48-3 (1998), pp. 769-783.

[21] K. Kurdyka, T. Mostowski, A. Parusiński, *Proof of the gradient conjecture of R. Thom,* Annals of Math. (to appear).

[22] K. Kurdyka, P. Orro, S. Simon, *Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values,* J. Diff. Geometry (à paraitre).

[23] K. Kurdyka, A. Parusiński, *Quasi-convex decomposition in o-minimal structures. Application to the gradient conjecture,* Preprint de l'Université d'Angers.

[24] S. Łojasiewicz, *Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique,* Semin. Geom., Univ. Studi Bologna 1982/1983 (1984), pp. 115-117.

[25] C. Miller, *Exponentiation is hard to avoid,* Proc. AMS, 122-1 (1994), pp. 257-259.

[26] R. Moussu, *Sur la dynamique des gradients. Existence de variétés invariantes,* Math. Ann. 307, No.3 (1997), pp.445-460.

[27] A. Parusiński, *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity,* Compositio Math. 97 (1995), pp. 131-141.

[28] R. Thom, *Ensembles et morphismes stratifiés,* bul. Amer. Math. Soc., 75 (1969) 240-282.

[29] M. Tibar, A. Zaharia, *Asymptotic behaviour of familes of real curves,* Manuscr. Math. 99, No.3 (1999), pp. 383-393.

[30] Y. Yomdin, *The geometry of critical and near-critical values of differentiable mappings,* Math. Ann. 4 (1983), pp. 495-515.

[31] Y. Yomdin, G. Comte *Tame geometry with applications in smooth analysis,* Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 1834 (2004).

Projet de recherche

Quelques questions en suspens :

1. Étendre la méthode du calcul explicite de la borne uniforme pour majorer le diamètre géodésique d'une hypersurface algébrique compacte à bord.
2. Il est facile d'obtenir en dimension 2 un analogue à l'infini de la conjecture du gradient. Ceci résulte de la définissabilité (dans une structure o-minimale plus grande) des courbes intégrales du champ de gradient. Qu'en est-il en dimension supérieure ?
3. Peut-on comme dans [22] obtenir un théorème de Sard définissable pour les valeurs critiques généralisées dans le cas d'une application définissable ? C'est-à-dire en exploitant la définition de $K_\infty(f)$ pour des application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$, cet ensemble est-il de mesure nulle dans $\mathbb{R}^k$? La réponse est certainement vraie si la structure o-minimale est polynomialement bornée.
4. En dimension 2, l'ensemble $I(t)$ n'est pas trop compliqué. Une étude dans le cas polynomial soulève toutefois plusieurs questions :

   A Les composantes compactes de $I(t)$ sont-elles d'intérieur vide si f est un polynôme ? si f est semi-algébrique ?

   B Dans la terminologie des équations différentielles, une courbe intégrale passant par un point de $I(t)$ est une séparatrice. Les séparatrices sont-elles semi-algébriques ? analytiques à l'infini ?
5. Peut-on donner un critère pour discriminer les valeurs de bifurcation d'un polynôme des valeurs critiques asymptotiques qui n'en sont pas ?

Projet de recherche

Singularités à l'infini

Si $x(t)$ est une courbe intégrale de ∇f telle que $f(x(t)) \to c$ et $x(t) \to \infty$ quand $t \to \infty$ alors $c \in K_\infty(f)$. On se demande dans quels cas la réciproque est vraie. Dans les cas où la réciproque est vraie, on obtient une caractérisation de $K_\infty(f)$ en terme de courbes intégrales, ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante pour trivialer f au dessus de c au moyen du champ de gradient.

Ceci est lié entre autres au travail de Coste et de la Puente (voir [5]). Ils donnent une méthode pour trouver les valeurs critiques à l'infini d'un polynome de deux variables réelles. La démarche est la suivante : Soit f un polynôme à deux variables. Pour chaque direction asymptotique $\mathbf{v}$, on considère la dérivée de f dans la direction $\mathbf{v}$, soit $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$. On appelle courbe polaire de f dans la direction $\mathbf{v}$, l'ensemble des zéros de la fonction $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$. Lorsque $\mathbf{v}$ est générique, Coste et de la Puente établissent des critères très simples et rapidement calculables, en termes du nombre de certaines composantes connexes de la courbe polaire $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$ le long de laquelle f tend vers c, pour décider si cette valeur c est une valeur atypique ou typique. À chaque valeur critique asymptotique c correspond un nombre fini de directions asymptotiques.

Dans un travail en commun avec V. Grandjean (Université de Bath), on essaye de comprendre comment la présence de courbes polaires dans ces directions asymptotiques organise la géométrie des demi-branches infinies des fibres tendant vers la valeur c. L'étude des fonctions $f(x,y) = y(xy-1)$ et $g(x,y) = y(2x^2y^2 - 9xy+12)$ montre en particulier que la condition (**M**) de Malgrange est mise en defaut sur les courbes polaires, et que la présence d'une valeur critique asymptotique (0 dans les deux cas) influence le comportement des trajectoires du champ de gradient. En dimension 2, il est possible que le champ de gradient d'un polynôme f réalise la trivialisation au voisinage du niveau critique à l'infini c si et seulement si il n'existe pas de courbe polaire le long de laquelle f tend vers c. Toutes les techniques éprouvées jusqu'à présent ce sont avérées inefficaces et il est difficile de produire un contre-exemple. Que peut-on dire en dimension quelconque ? ou encore en dimension 2 quand f est définissable dans une structure o-minimale ?

Dynamique du gradient à l'infini

Toujours en collaboration avec V. Grandjean on poursuit, en quelque sorte, le travail précédent en dimension 2 et, à l'aide du théorème de plongement (voir 4.2.1), on est conduit à se poser la question suivante : quelle est la géométrie du bassin d'attraction au voisinage d'une valeur critique asymptotique ? Moussu (voir [26]) a montré que pour les gradients de fonctions analytiques réelles, il existait des ensembles sous-analytiques fermés, contenant des points singuliers, qui sont réunion de courbes analytiques réelles contenant un point singulier du gradient, et qui en dehors de ce point sont des trajectoires du gradient. Peut-on généraliser le théorème de Moussu au voisinage des valeurs critiques asymptotiques ? La question relative à la nature du bassin d'attraction peut aussi se prolonger dans une tentative de compréhension de la variation des conditions initiales de l'équation différentielle fournie par le gradient afin de prédire les comportements asymptotiques qualitatifs des trajectoires au voisinage d'une valeur critique asymptotique.

Diamètre géodésique d'ensembles semialgébriques compacts

Avec K. Kurdyka (Université de Savoie), nous poursuivons notre travail sur la borne uniforme (cf. théorèmes 2.1.1 et 2.2.4. Il s'avère que la méthode de calcul pour la borne $A(n,d)$ est similaire dans le cas des quasipolynômes (polynômes exponentiels) ou encore dans celui des polynômes trigonométriques. Dans ces deux cas, le nombre de points d'intersection entre la courbe des minima de $|\nabla f|^2$ sur les fibres de f avec un hyperplan générique est explicité par Khovanskiĭ. Il n'est dès lors pas très difficile de majorer la longueur des courbes intégrales de ∇f. Revenons au cas polynomial, et considérons l'ensemble semi-algébrique $P = \{f \leq 1\} \cap \mathbb{B}^n$ où f est un polynôme à n variables et de degré d.
Donaldson (voir [14]) montre que le diamètre de chaque composante connexe de P est borné par Cd^ν où C et ν dépendent uniquement de la dimension n. K. Kurdyka explicite les deux constantes C et ν dans [11].
À la fois la méthode et le résultat sont prometteurs. Ils devraient donner lieu à d'autres applications en géométrie semi-algébrique ou encore en robotique.
Dans le même esprit, considérons un polynôme $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de degré d et supposons que 0 n'est pas une valeur critique de φ. Soit $M = \varphi^{-1}(0) \cap B(0,r)$ où $B(0,r)$ désigne la boule de rayon r centrée à l'origine. Si ∂M est vide on obtient une borne ne dépendant que de n, d et r pour le diamètre géodésique. On devrait pouvoir obtenir la borne dans le cas général.

Cartes routières

Pour majorer le diamètre géodésique d'une composante connexe compacte M d'un ensemble algébrique réel, nous avons utilisé une courbe algébrique réelle $\Theta_M(f)$, définie comme les points de tangence des niveaux de la fonction $|\nabla_M f|^2$ avec les niveaux de la fonction f. La fonction f est une fonction hauteur générique de M dans $\mathbb{R}$ et ∇_M est le gradient pour la métrique induite sur M par la métrique Euclidienne. Ces courbes sont un candidat potentiel à être une carte routière de M. Je pense que si c'est le cas, un tel résultat complètera les travaux de S. Basu, R. Pollack et M-F. Roy sur ce sujet (cf [1]). toutefois, montrer la connexité de $\Theta_M(f)$ n'est pas chose aisée. Je pense néanmoins que c'est réalisable.

Applications de la méthode des fonds de vallées

J'ai l'intention d'approfondir les techniques précédentes sur le lieu des minima du gradient restreint aux niveaux d'un potentiel. Ces lignes (génériquement) sont les lignes de crête et de fond de vallée, et sont a priori utiles dans bien des domaines. Je projette de contacter des chercheurs en *traitement numérique de l'image*, en *imagerie médicale*, en *robotique*, en *optimisation* ou en *cartographie* afin de collaborer et d'utiliser effectivement ces méthodes. Ces techniques me semblent pouvoir être performantes.

ε-entropie des valeurs presque critiques

Dans un joli article (cf. [30]) ainsi que dans le livre [31] Y. Yomdin démontre un résultat de transversalité quantitative (ou ε-entropie pour les valeurs presque critiques d'un polynôme). Il montre que l'image par un polynôme f de l'ensemble des points (contenus dans une boule de rayon r) où $|\nabla f|^2 < \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ fixé peut être couvert par $N(n, d)$ intervalles de rayon $r\varepsilon$. Ce résultat, que j'ai mentionné précédemment, a été renforcé par K. Kurdyka qui donne la meilleure borne connue actuellement pour $N(n, d)$. On se demande alors si on peut obtenir un résultat similaire en remplaçant la fonction f par une application polynomiale de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

Exposant de Łojasiewicz

Avec K. Kurdyka nous avons montré que l'exposant de Łojasiewicz (d'un polynôme à n variables de degré d) pour l'inégalité du gradient est majoré par $1 - \frac{1}{d(3d-3)^{n-1}}$. Peut-on trouver un polynôme f (à n variables de degré d) dont l'exposant de Łojasiewicz est de cet ordre là ? c'est-à-dire, asymptotiquement en d, $\varrho_f = 1 - \frac{1}{c(n)d^n}$ avec $c(n)$ une constante dépendant uniquement de n.

Séminaires et conférences

Participation aux séminaires

- ⋆ `Mars 1997 à Septembre 1998`
  Séminaire hebdomadaire de Topologie du CMI de l'université de Provence.
- ⋆ `Septembre 1998 à Septembre 2002`
  Séminaire de Géométrie du LAMA de l'université de Savoie.
- ⋆ `Octobre 2002 à Juin 2004`
  Séminaire hebdomadaire de Géométrie Algébrique de l'Universidad Complutense de Madrid
- ⋆ `De Septembre 2004 à Août 2005`
  Différents séminaires hebdomadaires au département de Mathématiques de l'Università di Pisa
- ⋆ `Depuis le 1er Octobre 2005`
  "Séminaire de la tortue" de la section de mathématiques de l'Université de Genève.

Conférencier invité

Conférence annuelle du RAAG, *Some quantitative results in semialgebraic geometry*, Passau, Allemagne, Septembre 2005.

Géométrie et analyse sur des espaces singuliers, *Inégalité du gradient de Łojasiewicz effective*, Lille, France, Mai 2005.

5 weeks on singularities, CIRM Marseille, France, *Singularités de fonctions modérées : trajectoires de gradient et fonds de vallées*, Février 2005 ;

Interventions

Conférence annuelle du RAAG, *Some quantitative results in semialgebraic geometry*, Passau, Allemagne, Septembre 2005.

Géométrie et analyse sur des espaces singuliers, *Inégalité du gradient de Łojasiewicz effective*, Lille, France, Mai 2005.

École dété et conférence Tame geometry : a tribute to R. Thom & S. Łojasiewicz, *Effective Łojasiewicz inequalities*, Chambéry, France, Juin 2005.

Séminaire hebdomadaire de D-modules et singularités, Université de Nice Sophia-Antipolis, France, *Inegalite de Łojasiewicz effective*, Avril 2005 ;

Séminaire de géométrie réelle, Université de Pise, Italie, *Aspetti metrici della geometria dei semialgebrici*, Mars 2005 ;

Séminaire hebdomadaire de Géométrie et singularités (LATP), Université de Provence, France, *Inégalité du gradient de Łojasiewicz effective pour les polynômes*, Mars 2005 ;

5 weeks on singularities, CIRM Marseille, France, *Singularités de fonctions modérées : trajectoires de gradient et fonds de vallées*, Février 2005 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie algébrique réelle, Université de Rennes, France. *Inégalité du gradient de Łojasiewicz effective*, Janvier 2005 ;

Séminaire hebdomadaire de Géométrie (LAMA), Université de Savoie, France, *Fonds de vallées et inégalité de Łojasiewicz*, Novembre 2004 ;

Séminaire hebdomadaire de Géométrie et Analyse, Université de Nice Sophia-Antipolis, France, *Méthode des fonds de vallées pour les polynômes et les ensembles semi-algébriques : étude géométrique et bornes universelles*, Juillet 2004 ;

Conférence annuelle du RAAG, Salamanca, Espagne, *An effective Łojasiewicz inequality*, Juin 2004 ;

Séminaire hebdomadaire de Géométrie (LAMA), Université de Savoie, France, *Ingalité de Łojasiewicz effective*, Juin 2004 ;

Ensembles et morphismes stratifiés, CIRM Marseille, France, *Quantitative Morse-Sard Theorem and Łojasiewicz inequality*, juin 2004 ;

Séminaire hebdomadaire de topologie, Université de Bourgogne, France, *Joindre deux points d'un ensemble semi-algébrique réel connexe en passant par les fonds de vallée*, Avril 2004 ;

Off-conférence "Singularity theory in honnor of Stanisław Łojasiewicz", Cracovie, Pologne. *Length of gradient trajectories and talweg lines*, Mars 2004 ;

Séminaire hebdomadaire d'Analyse Complexe et Diffrentielle, Université de Lille, France. *Trajectoires de gradient et bornes géométriques d'ensembles semi-algébriques et définissables*, Janvier 2004 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie algébrique réelle, Université de Rennes, France. *Diamètre géo- désique d'une composante connexe compacte d'un ensemble algébrique réel*, Janvier 2004 ;

Conférence "Summer School and Conference on Real Algebraic Geometry and its Applications", ICTP Trieste, Italie. *Joining two points in a compact connected component of an algebraic set via gradient trajectories*, Août 2003 ;

Workshop "Singularités réelles en Savoie", Université de Savoie, France, *Diamètre géodésique d'une hypersurface algébrique compacte*, Juin 2003 ;

Séminaire bimensuel de géométrie, université d'Angers, France. *Courbes integrales du champ de gradient de fonctions définissables*, Février 2003 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie algébrique réelle, Université de Rennes, France. *Une borne pour la longueur des trajectoires de gradient de fonctions définissables*, Janvier 2003 ;

Séminaire hebdomadaire de Géométrie (LAMA), Université de Savoie, France, *Trajectoires du gradient de fonctions analytiques (d'aprs A. Nowel et Z. Szafraniec)*, Décembre 2002 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie algébrique, Universidad Complutense, Madrid, Espagne. *Length of the trajectories of the gradient field*, Novembre 2002 ;

Conférence annuelle du RAAG, Kazimierz, Pologne. *Gradient of a definable family of functions. Uniform bound*, Septembre 2002 ;

Groupe de travail bi-mensuel de géométrie G67 (LAMA), Université de Savoie, France, *Courbes intégrales et valeurs critiques asymptotiques (II)*, Mars 2002 ;

Groupe de travail bi-mensuel de géométrie G67 (LAMA), Université de Savoie, France, *Courbes intégrales et valeurs critiques asymptotiques (I)*, Mars 2002 ;

Séminaire hebdomadaire de topologie du LATP, Université de Provence, France, *Champ de gradient d'une famille de fonctions définissables : borne uniforme sur la longueur des trajectoires*, Mars ;

Groupe de travail bi-mensuel de géométrie G67 (LAMA), Université de Savoie, France, *Un théorème de plongement dans le cadre o-minimal*, Décembre 2001 ;

Séminaire hebdomadaire de topologie, Université de Bourgogne, France, *Gradients d'une famille dé- finissable de fonctions : Borne uniforme pour la longueur des courbes intégrales*, Novembre 2001 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie (LAMA), Université de Savoie, France, *Borne uniforme sur la longueur des trajectoires du gradient*, Octobre 2001 ;

Workshop "Géométrie modérée et intégrales abéliennes" au CIRM Luminy, France, *Uniform bound for length for trajectories of gradient of a family of definable functions*, Juin 2001 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie (LAMA), Université de Savoie, France, *Équations différentielles sur une structure o-minimale polynomialement bornée (II)*, Décembre 2000 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie (LAMA), Université de Savoie, France, *Équations différentielles sur une structure o-minimale polynomialement bornée (I)*, Décembre 2000 ;

Conference "Analytic geometry and singularities", Banach Center, Varsovie, Pologne, *Asymptotic critical values of definable functions*, Septembre 2000 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie (LAMA), Université de Savoie, France, *Corps de Hardy d'une structure o-minimale (II)*, Janvier 2000 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie (LAMA), Université de Savoie, France, *Corps de Hardy d'une structure o-minimale (I)*, Janvier 2000 ;

Colloque " Rencontres Marseille-Nice sur les singularités". CMI, Marseille, *Valeurs critiques généralisées des fonctions définissables*, Juin 1999 ;

Séminaire hebdomadaire de géométrie (LAMA), Université de Savoie, France, *Valeurs critiques à l'infini de fonctions définissables : Théorème de finitude*, Mars 1999.

Colloques-Conférences-Worshops

⋆ Conférence annuelle du RAAG, Passau, Allemagne, 5-9 Septembre 2005 (conférencier invité).

⋆ École dété et conférence Tame geometry : a tribute to R. Thom & S. Łojasiewicz, Chambéry, France, 6-18 Juin 2005.

⋆ Workshop Géométrie et analyse sur des espaces singuliers, Lille, France, 26-28 Mai 2005 (conférencier invité).

⋆ Rencontre *Five weeks on singularities*, CIRM Marseille, France, 14-25 Février 2005.

⋆ Conférence annuelle du RAAG, Salamanca, Espagne, 22-26 Juin 2004.

⋆ Rencontre *Ensembles et morphismes stratifiés*, CIRM Marseille, France, 31 Mai - 4 Juin 2004.

⋆ Conférence *Singularity theory in honour of Stanisław Łojasiewicz.* Cracovie, Pologne (21-27 Mars 2004)

⋆ Conférence *Summer school and Conference : Real Algebraic Geometry and its Applications.* Miramare, Trieste (4-24 Aout 2003)

⋆ École d'été *Network school on o-minimal structures.* Lisbonne, Portugal (25-28 Juin, 2003)
⋆ Conference on *Joint meeting of the AMS and the Spanish Mathematical Society, Special session on Real Algebraic and Analytic Geometry.* Séville, Espagne (18-21 Juin, 2003)

⋆ Workshop on *Singularités réelles en Savoie.* Université de Savoie, France, 12-13 June 2003.

⋆ Winter School *RAAG and Motivic Integration.* Aussois, France, 6-12 Janvier 2003.

⋆ Conférence annuelle du RAAG, Kazimierz, Pologne, 21-27 Septembre 2002.

⋆ Workshop on *Le 16-ième problèmes de Hilbert, et sujets reliés en théorie de formes normales, bifurcations, feuilletages et intégrales Abéliennes.* ENS Lyon, France, 24-25 Mai 2002.

⋆ Rencontre mathématique *Géométrie modérée et intégrales abéliennes.* CIRM Marseille, France, 25-29 Juin 2001.

⋆ Conférence *Analytic Geometry and Singularities.* Banach Center, Varsovie, Pologne, 18-30 Septembre 2000.

⋆ Conférence *Asymptotic series, differential algebra and finiteness problems in non linear dynamical systems.* CRM Montreal, Canada, 19 Juin - 7 Juillet, 2000.

⋆ Workshop on *Géométrie et topologie des espaces stratifiés.* Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie, Avignon, France, 23-25 Mars 2000.

⋆ Conférence *Metric properties of subanalytic sets.* Mathematisches Institut Münster, Allemagne, 19-24 Septembre 1999.

⋆ Workshop *Rencontres Marseille-Nice sur les singularités.* CMI, Marseille, France, Juin 1999.

⋆ Conférence *Applications polynomiales* Université de Bordeaux, France, Mai 1999.

⋆ Workshop *Géométrie algébrique réelle effective.* ENS Lyon, France, 27-28 Fevrier 1998.

⋆ Conférence on *Equations différentielles polynomiales.* CIRM, Marseille, France, Octobre 1997.

TRAVAUX, OUVRAGES, ARTICLES, RÉALISATIONS

Thèse de doctorat

* D. D'ACUNTO – *Sur les courbes intégrales du champ de gradient.* Université de Savoie, 62 pages, 19 décembre 2001.
  téléchargeable sur `http://www.lama.univ-savoie.fr/~d_acunto`

Revue d'audience internationale avec comité de rédaction

[1] D. D'ACUNTO –*Valeurs Critiques Asymptotiques d'une Fonction Définissable dans une Structure o-minimale,* publié dans `Annales Polonici Mathematici, 75 (2000), pp. 35-45.`

[2] D. D'ACUNTO, *Sur la topologie des fibres d'une fonction définissable dans une structure o-minimale,* Publié dans `C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337 (2003), no. 5, 327--330.`

[3] D. D'ACUNTO & V. GRANDJEAN – *A gradient inequality at infinity for tame functions,* publié dans `Revista Mat. Complutense 18 (2005), no. 2, pp. 493--501`

[4] D. DACUNTO & K. KURDYKA – *Bounds for gradient trajectories and geodesic diameter of real algebraic sets,* à paraître dans `Bull. London Math. Soc. (2006)`

[5] D. D'ACUNTO & K. KURDYKA – *Explicit bound for the Łojasiewicz exponent in the gradient inequality for polynomials,* publié dans `Annales Polonici Mathematici, 87 (2005)`

[6] D. D'ACUNTO & V. GRANDJEAN – *On gradient at infinity of semialgebraic functions,* publié dans `Annales Polonici Mathematici, 87 (2005)`

Prépublications

[7] D. D'ACUNTO & K. KURDYKA –*Bounds for gradient trajectories of polynomial and definable definable functions with applications,* preprint de l'université de Savoie soumis à `J. Diff. Geometry`.

Travaux en cours

* D. D'ACUNTO & S. SIMON (Chambéry) – *Almost critical values of polynomial mappings.*
* D. D'ACUNTO & K. KURDYKA (CHAMBÉRY), *Fonds de vallées et cartes routières.*
* D. D'ACUNTO, *ε-entropy of critical values at infinity.*
* D. D'ACUNTO & V. GRANDJEAN, *Generalised Sard's theorem in o-minimal structures.*

Les documents [3]-[7] sont disponibles sur : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~d_acunto`

Administration et autres activités collectives

Organisation de conférences

* Co-organisateur de l'atelier *"Singularités réelles en Savoie"*, 13-14 Juin 2003.

* Co-organisateur de la *"Off-conference Singularity Theory - in Honour of Stanislaw Lojasiewicz"*, 22-26 Mars 2004.

* Organisateur du Workshop-école d'été dédié aux jeunes chercheurs. *"Tame geometry : A tribute to R. Thom and S. Lojasiewicz"*, 6-18 Juin 2005. Co-organisé avec A. Stasica, S. Randriambololona et G. Valette au sein de l'université de Savoie. Site web de la manifestation : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~tameg`

Autres activités scientifiques

Referee pour la revue d'audience internationale avec comité de rédaction `Annales Polonici Mathematici` depuis Septembre 2004.

Compétences en informatique

Langages : Pascal, lisp, HTML, php, C, C++, perl, bash.

Systèmes d'exploitation et environnements : UNIX, Linux, Mac OS, MS-DOS, Windows

Logiciels mathématiques : Maple, Singular, Surf, Minitab

Expérience
∗ Savoir-faire en matière de logiciels mathématiques. En particulier, les logiciels de géométrie : tracé de courbes et surfaces. Utilisation et expérimentation de logiciels de tracés de surfaces comme source d'exemples dans mes travaux de recherches. Possibilités de développement de logiciels de géométrie.
∗ Création et gestion de l'application web `http://www.ihp-raag.org` du réseau européen de géométrie algébrique et analytique réelle (Network RAAG). Le travail consistait en la mise en place du site internet du réseau avec les contraintes suivantes :

1. Création d'un annuaire contenant les coordonnées des membres du réseau. Pour ceci, nous avons décidé d'exploiter le systéme d'annuaire LDAP et le langage de programmation PHP (inspiré du langage C).

2. création et maintien d'un forum avec gestion de base de données postgreSQL.

∗ Encadrement d'étudiants pour la réalisation de projets mathématiques-informatique. Le travail des étudiants consistait à approcher un probléme d'analyse par des méthodes numériques. Le langage utilisé était le Turbo-Pascal.
∗ Compétences en gestion de systèmes et serveurs Linux.

Divers

Langues : *Anglais* (courant), *Espagnol* (lu et parlé), *Italien* (lu)

Loisirs : lecture, marche, football, musique(s), cinéma, informatique.

Page web personnelle : `http://www.lama.univ-savoie.fr/~d_acunto`

Fait à `Genève`, le `28-03-2006`

Signature