

Habilitation à Diriger des Recherches

Université de Savoie

Spécialité : Mathématiques

Topologie des variétés creuses

par

Frédéric BIHAN

Soutenue le 09 décembre 2011

devant le jury :

- Georges Comte, Professeur Univ. de Savoie,
- Michel Coste, Professeur Univ. Rennes 1,
- Krzysztof Kurdyka, Professeur Univ. de Savoie,
- Jean-Jacques Risler, Professeur Univ. Paris 6,
- Jean-Yves Welschinger, Directeur de Recherches CNRS, Univ. Lyon 1,

et après avis des rapporteurs :

- Krzysztof Kurdyka, Professeur Univ. de Savoie,
- Jean-Jacques Risler, Professeur Univ. Paris 6,
- Oleg Viro, Professeur Univ. Stony Brook.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Systèmes polynomiaux	9
2.1	Généralités	9
2.2	Dualité de Gale pour les systèmes	12
2.3	Bornes exactes pour les circuits	15
2.4	Bornes dans le cas général	18
2.4.1	Solutions positives	18
2.4.2	Solutions réelles	22
2.5	Bornes pour des systèmes spéciaux	24
3	Hypersurfaces	29
3.1	Réduction au cas d'un support primitif	29
3.2	Cas du circuit	30
3.3	Support arbitraire	33
4	Synthèse	39
5	Autres travaux	45

Chapitre 1

Introduction

On apprend très tôt que l'équation $x^d - 1 = 0$ a exactement d solutions complexes, et que parmi ces solutions 1 ou 2 seulement sont réelles. On comprend plus tard avec la règle de Descartes qu'un polynôme réel en une variable avec peu de monômes aura peu de racines réelles : il aura au plus $2m$ racines réelles non nulles si $m + 1$ est le nombre de monômes du polynôme. Le "peu" est à comprendre relativement au nombre de racines complexes, qui coïncide génériquement avec le degré du polynôme. Ce phénomène n'est pas uniquement réservé aux polynômes en une variable et fait l'objet de la théorie des *Fewnomials*. En 1980 Askold Khovansky a proposé une borne sur le nombre de solutions à coordonnées strictement positives d'un système de n équations polynomiales en n variables qui dépend uniquement du nombre total de monômes distincts du système (et de n).

Théorème 1 (Khovansky) *Le nombre de solutions non dégénérées à coordonnées strictement positives (solutions positives en abrégé) d'un système polynomial en n variables et n équations n'excède pas*

$$2^{\binom{n+k}{2}} \cdot (n+1)^{n+k},$$

si $n + k + 1$ est le nombre total de monômes du système.

Dans son livre "Fewnomials", A. Khovansky a en fait proposé beaucoup d'autres résultats de ce type pour des fonctions autres que des fonctions polynomiales, et pour des variétés autres que des variétés zéro-dimensionnelles. La notion de nombre de monômes est alors remplacée par une notion de *complexité*, et les bornes portent sur les nombres de composantes connexes, nombres de Betti des variétés, ou autre invariant topologique. Néanmoins, les bornes obtenues sont de toute évidence loin d'être optimales. Par exemple, pour un système de deux polynômes en deux variables avec cinq monômes

au total, le théorème de Khovansky prédit au plus 5184 solutions positives. On verra plus loin que l'on peut borner ce nombre de solutions par 15. On peut aussi s'intéresser à des bornes plus fines, prenant en compte le nombre de monômes de chaque équation par exemple (ce qui revient à considérer un sous-espace linéaire de l'espace des systèmes polynomiaux ayant un nombre total de monômes fixé). Si m_i est le nombre de monômes de la i -ème équation, une première tentative pour construire des systèmes avec beaucoup de solutions positives consiste à prendre pour la i -ème équation un polynôme en une variable x_i et ayant le nombre maximal $m_i - 1$ de racines strictement positives. On obtient de cette manière un système avec $\prod_{i=1}^n (m_i - 1)$ solutions positives. Il s'avère très difficile de faire mieux que la construction précédente, à tel point qu'il a été émis l'hypothèse que la quantité $\prod_{i=1}^n (m_i - 1)$ pouvait être la borne exacte (cette hypothèse est connue sous l'appellation de conjecture de Kouchnirenko). Li, Rojas et Wang ont étudié en détail les systèmes constitués d'un trinôme et d'un polynôme avec un nombre arbitraire m de monômes ($m_1 = 3, m_2 = m$). Ils ont montré que dans ce cas le nombre de solutions positives est majoré par $2^m - 2$. Pour $m = 3$ (deux trinômes), une analyse plus fine les amène à la borne 5, et leur permet de construire explicitement un système de deux trinômes ayant 5 solutions positives, contredisant ainsi l'hypothèse émise plus haut. Cette dernière construction montre aussi que le nombre maximal de solutions positives d'un système de deux équations en deux variables ayant au total 5 monômes est compris entre 5 et 15. On cherche alors à améliorer la borne supérieure, et parallèlement à construire des systèmes avec beaucoup de solutions positives. Pour ce qui est des méthodes de construction, le patchwork combinatoire ou la méthode de Viro plus générale sont particulièrement bien adaptés car ces deux méthodes permettent de garder un contrôle sur les nombres de monômes. Néanmoins, déjà dans le cas de deux trinômes, il semble que des systèmes avec 5 solutions positives ne puissent pas être obtenus de cette manière. D'autres techniques sont possibles. On verra plus tard qu'une version adaptée des dessins d'enfants de Grothendieck se révèle très efficace lorsque le support du système polynomial est de cardinal $n + 2$, où n est le nombre d'équations (variables) du système. On peut imaginer que la géométrie tropicale pourrait être utile comme outil de construction dans ce type de problème. Le passage des systèmes polynomiaux aux variétés de dimensions arbitraires (en tout cas aux hypersurfaces) peut se faire grâce à l'observation suivante : si H est une hypersurface algébrique du premier orthant d'équation algébrique $f = 0$ et si x^w est l'un des monômes de f , alors les points critiques de $x \mapsto x^w$ sur H sont les solutions positives d'un système dont le support coïncide avec celui de f . En particulier, il suffit de diviser par deux une borne sur le nombre de solutions positives de systèmes de support donné pour obtenir une borne sur

le nombre de composantes connexes d'une hypersurface algébrique de même support. On peut alors tenter d'utiliser la théorie de Morse pour obtenir des estimations sur la somme des nombres de Betti ou la caractéristique d'Euler d'une telle hypersurface.

Pour finir, notons que l'on peut aussi imposer d'autres contraintes qu'un cardinal fixé sur les supports des équations. On peut par exemple imposer les enveloppes convexes de ces supports, autrement dit, les polytopes de Newton des équations. D'après un théorème de Kouchnirenko, le nombre de solutions complexes non nulles (c. à. d. contenues dans le tore complexe) d'un système polynomial est majoré par le volume mixte des polytopes de Newton. Un problème non trivial est de caractériser les collections de polytopes pour lesquelles le volume mixte est une borne exacte sur le nombre de solutions réelles (dans le tore réel) des systèmes polynomiaux correspondants. Un autre problème intéressant réside en la recherche de bornes inférieures (non nulles) sur le nombre de solutions de systèmes polynomiaux (sous certaines contraintes) : pouvoir montrer l'existence d'une solution a des applications pratiques évidentes. La plupart de ces questions et d'autres font l'objet du livre "Real solutions to equations from geometry" que vient d'achever Franck Sottile.

Les chapitres 2 et 3 forment le coeur de ce mémoire. Je tente d'y présenter de manière élémentaire la plupart des résultats contenus dans les articles [1], [2], [3], [4], [5], [6], [8], [10], [16], [18] tout en m'autorisant parfois à apporter quelques petits compléments. Le chapitre 4 est une synthèse des résultats précédents tandis le chapitre 5 en est une des résultats contenus dans [7], [9], [12], [17] qui sont également des résultats obtenus après la thèse mais qui ne concernent pas directement les variétés creuses.

Chapitre 2

Systemes polynomiaux

2.1 Généralités

Un monôme en n variables $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ s'écrit $x_1^{w_1} \cdot x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n}$, ou sous forme abrégée x^w après avoir posé $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$. Le vecteur w est appelé exposant du monôme. Il sera suivant le contexte à coordonnées entières (éventuellement négatives) ou réelles. Le support d'un polynôme $f(x) = \sum c_w x^w$ est l'ensemble des exposants w apparaissant avec un coefficient c_w non nul. Le polytope de Newton d'un polynôme est l'enveloppe convexe dans \mathbf{R}^n de son support. Le support d'un système d'équations polynomiales est la réunion des supports de chacune de ses équations.

Considérons un système de n équations polynomiales en n variables, à coefficients dans \mathbf{C} et dont le support \mathcal{W} est un sous-ensemble de \mathbf{Z}^n (polynômes de Laurent). Un théorème de Kouchnirenko affirme que le nombre de solutions isolées d'un tel système dans le tore complexe $(\mathbf{C}^*)^n$ est majoré par le volume normalisé de l'enveloppe convexe de \mathcal{W} . Ici le volume est le volume euclidien usuel dans \mathbf{R}^n normalisé de telle sorte que le simplexe primitif standard (engendré par les vecteurs de la base canonique) soit de volume 1. De plus, cette borne est atteinte génériquement par des systèmes dont toutes les solutions dans le tore complexe sont non dégénérées (en chaque solution, les différentielles des fonctions définissant le système sont linéairement indépendantes). Le terme générique est à comprendre au sens habituel : il existe un ouvert de Zarisky dans l'espace des coefficients de systèmes polynomiaux de support \mathcal{W} qui contient ces systèmes. On peut aussi s'intéresser à des systèmes dont les équations n'ont pas toutes le même support. Pour de tels systèmes, le théorème de Bernstein affirme que le nombre de solutions isolées dans $(\mathbf{C}^*)^n$ est majoré par le volume mixte des polytopes de Newton des équations. De plus cette borne est atteinte génériquement (on fixe cette

fois-ci les supports individuels) par des systèmes dont toutes les solutions dans le tore complexe sont non dégénérées. Ce volume mixte est plus petit que le volume normalisé de l'enveloppe convexe de \mathcal{W} , et il lui est égal si les équations ont toutes \mathcal{W} comme support. On peut voir le théorème de Bernstein comme un raffinement de celui de Kouchnirenko pour les systèmes contenus dans un sous-espace linéaire de l'espace des systèmes polynomiaux de support donné.

Par la suite, nous considérerons uniquement des systèmes à coefficients réels et nous intéresserons à leurs solutions non dégénérées dans le tore réel $(\mathbf{R}^*)^n$, ou dans l'orthant positif $]0, +\infty]^n$. Les solutions dans le tore réel seront appelées solutions réelles, tandis que celles contenues dans l'orthant positif seront appelées solutions positives. Bien sur les théorèmes plus haut donnent des bornes sur le nombre de solutions réelles ou positives de systèmes polynomiaux. Notons une conséquence immédiate : si le polytope Q enveloppe convexe du support \mathcal{W} n'est pas de dimension n , alors aucun système de support \mathcal{W} n'aura de solutions isolées dans le tore complexe. On peut montrer cela directement de la manière suivante. Supposons que Q soit contenu dans un hyperplan H . Le sous-groupe $H \cap \mathbf{Z}^n$ est un sous-groupe saturé de \mathbf{Z}^n . Le théorème des facteurs invariants fournit une base $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n)$ de \mathbf{Z}^n telle que $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$ soit une base du sous-groupe $H \cap \mathbf{Z}^n$. L'application $x \mapsto (x^{u_1}, x^{u_2}, \dots, x^{u_n})$ est alors un automorphisme de $(\mathbf{C}^*)^n$. C'est un fait général : si $A \in \text{GL}_n(\mathbf{Z})$ a pour vecteur colonnes $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{Z}^n$, alors l'application $\Phi_A : (\mathbf{C}^*)^n \rightarrow (\mathbf{C}^*)^n, x \mapsto (x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n})$ est un isomorphisme d'inverse l'application monomiale $\Phi_{A^{-1}}$ donnée par les colonnes de A^{-1} . On obtient donc un nouveau système de coordonnées $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $y_i = x^{u_i}$, pour $(\mathbf{C}^*)^n$ dans lequel le système ne dépend pas de la variable y_n . Un tel système n'a clairement pas de solutions isolées dans le tore complexe. Notons que ce raisonnement s'adapte sans problème pour les solutions positives et lorsque le support est plus généralement un sous-ensemble fini de \mathbf{R}^n : si $A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$, alors l'application $\Phi_A : x \mapsto (x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n})$ définit un automorphisme analytique de l'orthant positif $]0, +\infty]^n$ d'inverse $\Phi_{A^{-1}}$. On pourra donc toujours supposer que le support \mathcal{W} possède au moins $n + 1$ vecteurs non contenus dans un hyperplan. On supposera de plus que l'un des vecteurs de \mathcal{W} est le vecteur nul quitte à multiplier chacune des équations par un même monôme, ce qui n'affecte pas les solutions à coordonnées non nulles. On posera alors

$$\mathcal{W} = \{0, w_1, w_2, \dots, w_{n+k}\},$$

où k est un entier positif ou nul.

Considérons en détail le cas $k = 0$ qui intervient lorsque \mathcal{W} est l'ensemble des sommets d'un n -simplexe dans \mathbf{R}^n . Notons W la matrice dans $M_n(\mathbf{Z})$ de

vecteurs colonnes w_1, w_2, \dots, w_n . Le volume normalisé de l'enveloppe convexe Q de \mathcal{W} est égal, au signe près, au déterminant de la matrice W . Le théorème de Kouchnirenko affirme donc qu'un système polynomial de support \mathcal{W} a au plus $|\det(W)|$ solutions complexes (dans le tore complexe) isolées. Un tel système s'écrit sous forme matricielle $C^t(x^{w_1}, x^{w_2}, \dots, x^{w_n}) = {}^t(c_1, c_2, \dots, c_n)$, où C est une matrice carrée réelle et $c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}$. Quitte à perturber un peu C , on peut la supposer inversible (cela ne change pas le nombre de solutions non dégénérées du système). En multipliant à gauche les deux membres de l'égalité par C^{-1} , on obtient alors un système équivalent dont les équations sont des binômes :

$$x^{w_i} = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

On dira d'un tel système qu'il est binomial. Si A est une matrice à coefficients entiers, on note \bar{A} la matrice à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ obtenue en réduisant les coefficients de A modulo 2.

Proposition 1 *Soit \mathcal{W} l'ensemble des sommets d'un n -simplexe dans \mathbf{R}^n . Un système polynomial de support \mathcal{W} a :*

1. *au plus une solution positive non dégénérée,*
2. *au plus une solution réelle non dégénérée si le volume normalisé de Q est impair,*
3. *0 ou $2^{n-\text{rang}(\bar{W})}$ solutions réelles non dégénérées si le volume normalisé de Q est pair. De plus, le système aura $2^{n-\text{rang}(\bar{W})}$ solutions réelles non dégénérées lorsque*

$$d_1^{\lambda_1} \dots d_n^{\lambda_n} > 0 \quad (2.2)$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{Z}^n$ tel que $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n \in 2\mathbf{Z}^n$, où les d_i sont les constantes apparaissant dans un système binomial équivalent du type (2.1)

Le premier point est immédiat : dans le système de coordonnées $y_i = x^{w_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, de l'orthant positif, le système devient un système linéaire, et on sait bien qu'un tel système a au plus une solution positive non dégénérée. Pour les points 2) et 3), on part du système binomial (2.1). Le théorème des facteurs invariants fournit deux matrices $L, R \in \text{SL}_n(\mathbf{Z})$ et des entiers a_1, a_2, \dots, a_n (les facteurs invariants de W) tels que $LWR = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Dans les coordonnées (y_1, y_2, \dots, y_n) données par les colonnes de la matrice transposée de L^{-1} , le système est du type (2.1) avec les vecteurs colonne de LW à la place des w_i . En appliquant aux deux membres de ce système l'application monomiale Φ_{tR} associée à la transposée de R , on obtient un nouveau système binomial $(y_1^{a_1}, y_2^{a_2}, \dots, y_n^{a_n}) = \Phi_{tR}(d_1, d_2, \dots, d_n)$

dont les solutions seront en bijection avec les solutions du système précédent. Les points 2) et 3) sont maintenant aisés à démontrer. On remarque que cette preuve fournit un algorithme pour obtenir les solutions complexes d'un système supporté par un simplexe.

2.2 Dualité de Gale pour les systèmes

Considérons un système polynomial de support

$$\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{Z}^n$$

non contenu dans un hyperplan de \mathbf{R}^n et où $k \geq 1$. Le système s'écrit sous forme matricielle

$$C \cdot \begin{pmatrix} x^{w_1} \\ \vdots \\ x^{w_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

où $g_1(x), \dots, g_n(x)$ sont des combinaisons affines de $x^{w_{n+1}}, \dots, x^{w_{n+k}}$ et $C \in M_n(\mathbf{R})$. On est intéressé par le nombre de solutions non dégénérées de ce système. Quitte à perturber un peu la matrice C , on peut donc la supposer inversible puis multiplier les deux membres de l'égalité par C^{-1} pour obtenir un système

$$x^{w_i} = h_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

où les h_i sont comme les g_i des combinaisons affines de $x^{w_{n+1}}, \dots, x^{w_{n+k}}$, et qui aura le même nombre de solutions non dégénérées.

Soit $\varphi : \mathbf{Z}^{n+k} \rightarrow \mathbf{Z}^n$ l'homomorphisme de groupes envoyant le vecteur e_i de la base canonique sur w_i . Son noyau est le sous-groupe des relations entières entre les éléments de $\mathcal{W} : (a_1, a_2, \dots, a_{n+k}) \in \text{Ker } \varphi$ si $a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_{n+k} w_{n+k} = 0$. Ce sous-groupe est de rang k car \mathcal{W} engendre \mathbf{R}^n . Toute relation $(a_1, a_2, \dots, a_{n+k}) \in \text{Ker } \varphi$ induit une identité

$$(x^{w_1})^{a_1} \cdot (x^{w_2})^{a_2} \dots (x^{w_{n+k}})^{a_{n+k}} = 1.$$

Si x est solution de (2.3), alors

$$(h_1(x))^{a_1} \cdot (h_2(x))^{a_2} \dots (h_n(x))^{a_n} \cdot (x^{w_{n+1}})^{a_{n+1}} \dots (x^{w_{n+k}})^{a_{n+k}} = 1. \quad (2.4)$$

Soient

$$y_j = x^{w_{n+j}}, \quad j = 1, \dots, k. \quad (2.5)$$

On a alors $h_i(x) = p_i(y)$ pour $i = 1, \dots, n$ où p_i est un polynôme de degré 1 en $y = (y_1, \dots, y_n)$. En posant $p_{n+1}(y) = y_1, \dots, p_{n+k}(y) = y_k$, on peut écrire l'identité (2.4) sous forme condensée

$$\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y)^{a_i} = 1, \quad (2.6)$$

où chacun des p_i est un polynôme de degré 1. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{n+k,k}(\mathbf{Z})$ une matrice dont les vecteurs colonne forment une base de $\text{Ker } \varphi$. On obtient alors un système de k équations en k inconnues

$$\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y)^{a_{i,j}} = 1, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.7)$$

appelé *système de Gale* associé au système (2.3). Un autre choix de base pour $\text{Ker } \varphi$ donne un système de gale équivalent. Si on autorise des exposants réels pour les monômes du système initial c.à.d. si $\mathcal{W} \subset \mathbf{R}^n$, alors les exposants $a_{i,j}$ apparaissant dans le système de Gale (2.7) sont des nombres réels (non nécessairement entiers).

Soit $\mathcal{P}_{\mathbf{C}}$ (resp., $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$) l'arrangement des hyperplans de \mathbf{C}^n (resp., \mathbf{R}^n) définis par les p_i . Une composante connexe du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans est appelée *chambre* de l'arrangement. On peut remarquer que ces arrangements d'hyperplans ne dépendent pas du choix des n vecteurs w_1, \dots, w_n de \mathcal{W} dans le système (2.3). Précisément, un système équivalent du type $x^{w_i} = \ell_i(x)$ pour $i \in I$ avec $I \subset \{1, \dots, n+k\}$ de cardinal n et où pour tout $i \in I$ l'application ℓ_i est une forme linéaire en les x^{w_j} , $j \notin I$, correspond à l'autre choix de coordonnées $p_i(y)$, $i \notin I$, pour l'espace \mathbf{R}^k contenant l'arrangement d'hyperplans.

Si x est une solution complexe (resp., réelle) de (2.3) (sous-entendu dans les tores correspondants), alors y est une solution complexe (resp., réelle) de (2.7) contenue dans le complémentaire de l'arrangement $\mathcal{P}_{\mathbf{C}}$ (resp., $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$). Si de plus x est une solution positive, alors y appartient à la chambre dite *positive*

$$\Delta_+ = \{y \in \mathbf{R}^k \mid p_i(y) > 0, \quad i = 1, \dots, n+k\}$$

qui est un polytope (ouvert, non forcément borné).

Un sous ensemble de \mathbf{Z}^n est dit *primitif* si le sous-groupe de \mathbf{Z}^n qu'il engendre est \mathbf{Z}^n tout entier.

Théorème 2 *Si \mathcal{W} est primitif, alors l'application $x \mapsto y$ définie par (2.5) se restreint en une bijection entre l'ensemble des solutions complexes (sous-entendu dans le tore complexe) de (2.3) et l'ensemble des solutions de (2.7) contenues dans le complémentaire de l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{P}_{\mathbf{C}}$.*

En général, cette application se restreint en une surjection entre ces deux ensembles et toute fibre a pour cardinal l'indice du sous-groupe \mathbf{ZW} de \mathbf{Z}^n . Les solutions réelles de (2.3) se projettent sur des solutions réelles de (2.7), et la fibre au dessus d'une solution réelle y de (2.7) contient des solutions réelles de (2.3) uniquement lorsque

$$p_1(y)^{\lambda_1} \cdots p_{n+k}(y)^{\lambda_{n+k}} > 0 \quad (2.8)$$

pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+k}) \in \mathbf{Z}^{n+k}$ tel que $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{n+k} w_{n+k} \in 2\mathbf{Z}^n$, auquel cas cette fibre contient exactement $2^{n-\text{rang}(\overline{W})}$ solutions réelles de (2.3). L'application $x \mapsto y$ définie par (2.5) est une bijection entre les solutions positives de (2.3) et les solutions de (2.7) contenues dans la chambre positive Δ_+ .

On peut rajouter que l'image d'une solution non dégénérée de (2.3) est une solution non dégénérée de (2.7). Ce théorème peut se démontrer grace aux observations suivantes. Si \mathcal{W} est primitif alors l'homomorphisme de groupes $\varphi : \mathbf{Z}^{n+k} \rightarrow \mathbf{Z}^n$ vu plus haut est surjectif et donne un isomorphisme de groupes

$$\bar{\varphi} : \mathbf{Z}^{n+k} / \text{Ker } \varphi \longrightarrow \mathbf{Z}^n.$$

Soit $\alpha_j = (\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{n+k,j}) \in \mathbf{Z}^{n+k}$, $j = 1, \dots, n$, un représentant de l'image du j -ème vecteur e_j de la base canonique de \mathbf{Z}^n par $\bar{\varphi}^{-1}$. On a autrement dit $e_j = \sum_{i=1}^{n+k} \alpha_{i,j} w_i$. On peut alors montrer qu'une application réciproque pour la bijection du théorème est donnée par

$$y \mapsto (p(y)^{\alpha_1}, \dots, p(y)^{\alpha_n}) \quad (2.9)$$

où $p(y)^{\alpha_j} := p_1(y)^{\alpha_{1,j}} \cdots p_{n+k}(y)^{\alpha_{n+k,j}}$.

Dans le cas où \mathcal{W} n'est pas primitif, on peut toujours s'y ramener en considérant un système intermédiaire dont le support est un simplexe. Soit (v_1, \dots, v_n) une base du sous-groupe \mathbf{ZW} de \mathbf{Z}^n . Soit $u_j \in \mathbf{Z}^n$ le vecteur des coordonnées de w_j dans cette base. Alors $\mathcal{U} = \{0, u_1, \dots, u_{n+k}\} \subset \mathbf{Z}^n$ est primitif car $v_i = \sum_{j=1}^{n+k} \lambda_j w_j \Rightarrow e_i = \sum_{j=1}^{n+k} \lambda_j u_j$. Si on pose $z_i = x^{v_i}$, on a alors $x^{w_j} = z^{u_j}$ avec $z = (z_1, \dots, z_n)$. Un système en x de support \mathcal{W} s'écrit donc comme un système en z de support \mathcal{U} primitif. On résoud ce système en z , puis pour chaque solution z , on doit résoudre le système $x^{v_i} = z_i$, $i = 1, \dots, n$ dont le support $\{0, v_1, \dots, v_n\}$ est l'ensemble des sommets d'un n -simplexe. Une preuve du théorème 2 se déduit de cette manière du cas primitif et de la proposition 1.

2.3 Bornes exactes pour les circuits

On a traité en détail le cas $k = 0$ d'un support formé des sommets d'un n -simplexe. Lorsque $k = 1$, le support

$$\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+1}\}$$

est appelé *circuit*. À un facteur multiplicatif près, il existe une unique relation entière $a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_{n+1} w_{n+1} = 0$ entre les vecteurs non nuls de \mathcal{W} et le système de Gale (2.7) se réduit à une équation en une variable $\prod_{i=1}^{n+1} p_i(y)^{a_i} = 1$, où les p_i sont des polynômes de degré 1. On va chercher des solutions de cette équation dans le complémentaire de l'arrangement défini par les p_i , c.à.d. ici en dehors des racines des p_i . En posant $P(y) = \prod_{a_i > 0} p_i(y)^{a_i}$ et $Q(y) = \prod_{a_i \leq 0} p_i(y)^{-a_i}$, on obtient deux polynômes et l'équation précédente s'écrit

$$\Phi(y) = 0 \tag{2.10}$$

où Φ est la fonction rationnelle $\frac{P}{Q} - 1$. On peut de manière équivalente considérer les racines du polynôme $P - Q$.

Dans l'article [10], on considère le cas d'un circuit primitif ou plus généralement un circuit engendrant un sous-groupe d'indice impair dans \mathbf{Z}^n (on considère aussi ce qu'on appelle des "circuits proches"). Remarquons que l'indice $[\mathbf{Z}^n : \mathbf{Z}\mathcal{W}]$ est le produit des facteurs invariants de la matrice W de vecteurs colonne les vecteurs non nuls de \mathcal{W} , et donc que cet indice est impair si et seulement si $\text{rang}(\overline{W}) = n$. On est donc dans la situation où, d'après le théorème 2, on a une bijection entre les solutions réelles du système polynomial de support \mathcal{W} et les solutions réelles de l'équation (2.10) situées en dehors des racines des p_i . Les bornes obtenues dépendent de la dimension $m(\mathcal{W})$ de l'espace affine minimal engendré par des éléments affinement dépendants de \mathcal{W} . On a par exemple $m(\mathcal{W}) = 1$ lorsque trois points de \mathcal{W} sont sur une même droite et $m(\mathcal{W}) = n$ lorsque tout-sous ensemble de \mathcal{W} de cardinal $n + 1$ est l'ensemble des sommets d'un n -simplexe. En fait $m(\mathcal{W}) + 2$ est le nombre de coefficients non nuls dans toute relation affine entre les $n + 2$ éléments de \mathcal{W} .

Théorème 3 *Soit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ un circuit engendrant un sous-groupe d'indice impair dans \mathbf{Z}^n . Un système polynomial de support \mathcal{W} a au plus $2m(\mathcal{W}) + 1$ solutions réelles non dégénérées. De plus cette borne est exacte au sens où pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier positif $m \leq n$ il existe un circuit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ tel que $m(\mathcal{W}) = m$ et $[\mathbf{Z}^n : \mathbf{Z}\mathcal{W}]$ est impair, puis un système polynomial de support \mathcal{W} et ayant $2m(\mathcal{W}) + 1$ solutions réelles non dégénérées.*

L'observation essentielle pour la preuve de ce théorème est que $P'Q - PQ'$ se factorise par un produit de puissances des p_i , de telle sorte que le nombre

de points critiques de l'application Φ (vue comme application de \mathbf{R} dans \mathbf{R}) situés en dehors des racines des p_i est borné par une expression dépendant uniquement de $m(\mathcal{W})$ (et pas des a_i).

Dans l'article [8], on généralise le résultat précédent à tous les circuits, sans hypothèse sur l'indice du sous-groupe engendré par \mathcal{W} . On obtient aussi des bornes pour les solutions positives.

Théorème 4 *Un système polynomial de support un circuit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ a au plus $m(\mathcal{W}) + 1$ solutions positives non dégénérées. De plus, pour tout entier $1 \leq m \leq n$, il existe un circuit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ tel que $m(\mathcal{W}) = m$ et un système polynomial de support \mathcal{W} ayant $m + 1$ solutions positives non dégénérées.*

Le théorème suivant généralise le théorème 3.

Théorème 5 *Un système polynomial générique de support un circuit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ a au plus*

$$2^{n-\text{rang}(\overline{W})} \cdot \text{Min}(m(\mathcal{W}) + \text{rang}(\overline{W}) + 1, 2m(\mathcal{W}) + 1) \quad (2.11)$$

solutions réelles non dégénérées. De plus, pour chaque paire (m, r) d'entiers tels que $1 \leq m \leq n$ et $0 \leq r \leq n$, il existe un circuit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ tel que $(m(\mathcal{W}), \text{rang}(\overline{W})) = (m, r)$ et un système polynomial de support \mathcal{W} ayant la quantité (2.11) de solutions réelles non dégénérées.

Toutes ces bornes sont obtenues en étudiant les points critiques de Φ . La preuve du théorème 4 est une application simple du théorème de Rolle classique. Pour la preuve du théorème 5, on doit tenir compte des conditions de signe (2.8). Ces conditions de signe correspondent aux vecteurs du noyau de \overline{W} et un ingrédient supplémentaire utilisé est une forme normale de Hermite pour une base ce noyau.

L'optimalité des bornes des théorèmes 4 et 5 est démontrée en utilisant la théorie des dessins d'enfants. Considérons l'application $\frac{P}{Q} - 1$ comme une application rationnelle de $\mathbf{C}P^1$ dans $\mathbf{C}P^1$. Le dessin d'enfant associé est $\Gamma := \Phi^{-1}(\mathbf{R}P^1) \subset \mathbf{C}P^1$. C'est un graphe sur $\mathbf{C}P^1$, invariant par conjugaison complexe, et qui contient l'axe réel $\mathbf{R}P^1$ (puisque Φ est une application réelle). Les racines de P , Q , et Φ appartiennent à Γ et constituent les fibres (de Φ) au dessus de -1 , ∞ et 0 , respectivement. Les points critiques à valeurs critiques réelles de Φ appartiennent à Γ et la multiplicité d'un tel point critique est la moitié de sa valence comme sommet de Γ . La disposition des racines réelles de P , Q et Φ sur \mathbf{R} ainsi que leurs multiplicités peuvent se lire sur Γ . Les racines de P (resp., Q et Φ) sont toutes notées par la lettre p (resp.,

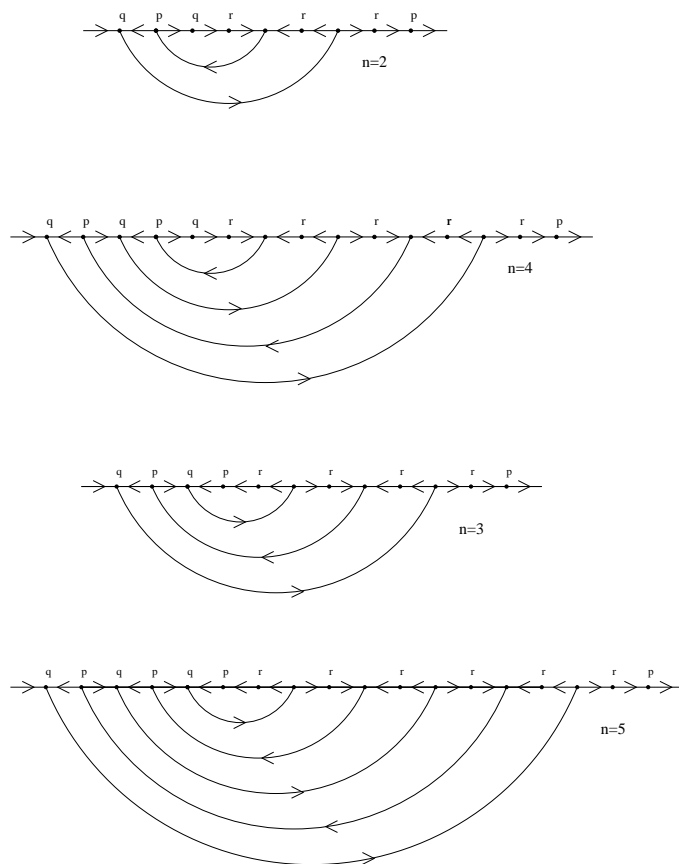


FIGURE 2.1 – Optimalité du théorème 4

q , et r) sur les figures 2.1 et 2.2 qui représentent toutes deux l'intersection d'un dessin d'enfant Γ avec la fermeture d'une des composantes connexes de $\mathbf{C}P^1 \setminus \mathbf{R}P^1$ (la droite horizontale représentant $\mathbf{R}P^1$). Réciproquement, si on se donne un graphe Γ sur $\mathbf{C}P^1$ invariant par conjugaison complexe, dont chacun des sommets a une valence paire, dont toute composante connexe du complémentaire est contractible, ainsi qu'une fonction continue réelle $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}P^1$, alors cette application peut être étendue en une application rationnelle réelle de $\mathbf{C}P^1$ dans $\mathbf{C}P^1$ telle que $\Gamma := \Phi^{-1}(\mathbf{R}P^1) \subset \mathbf{C}P^1$. C'est une conséquence du théorème d'existence de Riemann. L'utilisation des dessins d'enfant en géométrie réelle est due à S. Orevkov (construction de courbes trigonales réelles).

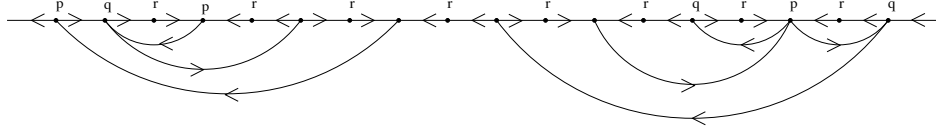


FIGURE 2.2 – Optimalité du théorème 5

2.4 Bornes dans le cas général

2.4.1 Solutions positives

On cherche dans un premier temps des bornes sur le nombre de solutions positives non dégénérées d'un système de support

$$\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{R}^n$$

non contenu dans un hyperplan et tel que $k \geq 1$. D'après le théorème 2, ces solutions sont en bijection avec les solutions non dégénérées d'un système de Gale

$$\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y)^{a_{i,j}} = 1, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.12)$$

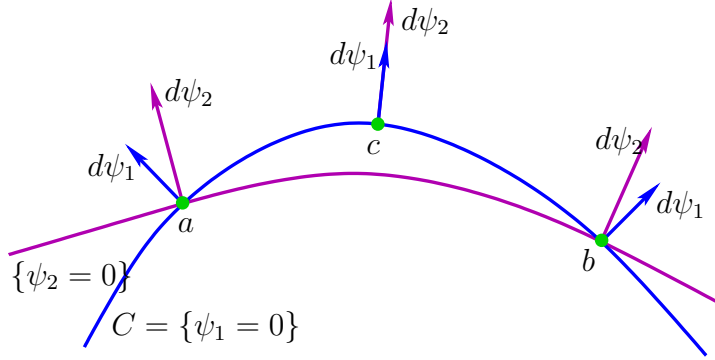
qui sont contenues dans la chambre positive

$$\Delta_+ = \{y \in \mathbf{R}^k \mid p_i(y) > 0, \quad i = 1, \dots, n+k\}.$$

Pour $k = 1$, des bornes sont obtenues grâce au théorème de Rolle classique. Dans le cas général, on utilise la généralisation suivante du théorème de Rolle aux courbes lisses. Soient ψ_1, \dots, ψ_k des fonctions différentiables sur Δ_+ qui ont un nombre fini de zéros communs. On suppose que l'ensemble des zéros communs de $\psi_1, \dots, \psi_{k-1}$ est une courbe lisse C dans Δ_+ . On note $b(C)$ le nombre de composantes connexes non compactes de C et $\Gamma = J(\psi_1, \dots, \psi_k)$ le déterminant jacobien de ψ_1, \dots, ψ_k . On a obtenu alors la borne suivante sur le nombre de zéros communs de ψ_1, \dots, ψ_k

$$\#\{\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_k = 0\} \leq b(C) + \#\{\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{k-1} = \Gamma\}$$

On peut traduire cette inégalité de la manière suivante : un arc de la courbe C connectant deux points d'intersection consécutifs avec l'hypersurface définie par ψ_k doit contenir un point en lequel la courbe C est tangente à une hypersurface de niveau de ψ_k . En un tel point $d\psi_k$ est normal à C , et donc le déterminant jacobien Γ s'annule car l'ensemble des directions normales à C est engendré par $d\psi_1, \dots, d\psi_{k-1}$.

FIGURE 2.3 – Théorème de Khovansky-Rolle pour $k = 2$

Soit $\psi_j : \Delta_+ \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, k$, l'application définie par

$$\psi_j(y) = \ln \left(\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y)^{a_{i,j}} \right).$$

Le système (2.12) est alors équivalent dans Δ_+ à $\psi_1(y) = \dots = \psi_k(y) = 0$ et on est donc ramené à borner $\#\{\psi_1 = \dots = \psi_k = 0\}$. On définit récursivement les déterminants jacobiens $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ sur Δ_+ en posant

$$\Gamma_k = J(\psi_1, \dots, \psi_k), \quad \Gamma_j = J(\psi_1, \dots, \psi_j, \Gamma_{j+1}, \dots, \Gamma_k), \quad j = k-1, k-2, \dots, 1.$$

On va appliquer le théorème de Khovansky-Rolle aux courbes C_1, \dots, C_k de Δ_+ qui sont définies par

$$C_j = \{\psi_1 = \dots = \psi_{j-1} = \Gamma_{j+1} = \dots = \Gamma_k = 0\}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Quitte à perturber le système initial, on peut supposer que les exposants $a_{i,j}$ sont des nombres suffisamment génériques de telle sorte que ces courbes soient lisses. On peut de plus supposer que les $a_{i,j}$ sont des nombres rationnels auquel cas il n'est pas difficile de voir que les courbes C_1, \dots, C_k sont algébriques. En itérant le théorème de Khovansky-Rolle, on obtient

$$\#\{\psi_1 = \dots = \psi_k = 0\} \leq b(C_k) + \#\{\psi_1 = \dots = \psi_{k-1} = \Gamma_k = 0\},$$

puis

$$\#\{\psi_1 = \dots = \psi_{k-1} = \Gamma_k = 0\} \leq b(C_{k-1}) + \#\{\psi_1 = \dots = \psi_{k-2} = \Gamma_{k-1} = \Gamma_k = 0\}$$

etc, pour finalement obtenir

$$\#\{\psi_1 = \dots = \psi_k = 0\} \leq b(C_k) + \dots + b(C_1) + \#\{\Gamma_1 = \dots = \Gamma_k = 0\} \quad (2.13)$$

Il n'est pas difficile de voir que chacun des déterminants jacobiens $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, à commencer par Γ_k , est une fraction rationnelle en y de plus petit dénominateur un produit de puissances des p_i . Par exemple, chaque coefficient de Γ_k peut lui même s'écrire comme une fraction rationnelle avec $\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y)$ au dénominateur, de telle sorte que $\Gamma_k(y) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y) \right)^k$ est un polynôme, dont le degré est égal à $-k + k(n+k)$. Il se trouve que $\left(\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y) \right)^k$ n'est pas le plus petit dénominateur de Γ_k : il suffit de multiplier Γ_k par $\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y)$ pour obtenir un polynôme, dont le degré égal à $-k + (n+k) = n$ est bien plus bas que le précédent. En général, grace à la formule de Cauchy-Binet sur les déterminants, on montre que

$$P_j(y) := \Gamma_j(y) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y) \right)^{2^{k-j}} \quad (2.14)$$

est un polynôme de degré $2^{k-j} n$ pour $j = 1, \dots, k$. Cela donne en particulier la borne

$$\#\{\Gamma_1 = \dots = \Gamma_k = 0\} \leq 2^{\binom{k}{2}} n^k = \prod_{j=0}^{k-1} (2^j n) \quad (2.15)$$

Il reste à majorer le nombre de composantes connexes non compactes de la courbe

$$C_j = \{\psi_1 = \dots = \psi_{j-1} = \Gamma_{j+1} = \dots = \Gamma_k = 0\}.$$

Si Δ_+ est borné, alors les composantes connexes non compactes de C_j sont celles dont la fermeture intersecte le bord de Δ_+ . Si Δ_+ n'est pas borné, il peut arriver qu'une composante connexe non compacte de C_j n'intersecte pas $\partial\Delta_+$, par contre, elle intersectera le bord du polytope de $\mathbf{R}P^k$ obtenu en prenant la fermeture de Δ_+ . Ce polytope est égal à Δ_+ si Δ_+ est borné, et il a une facette supplémentaire "à l'infini" sinon. On travaille alors avec ce polytope de $\mathbf{R}P^k$, que l'on note à nouveau Δ_+ . Quitte à perturber encore un peu les exposants du système de Gale, on peut s'assurer que la fermeture de chaque composante connexe non compacte de C_j intersecte le bord de Δ_+ en exactement deux points, et qu'aucun point de $\partial\Delta_+$ n'appartient à la fermeture de deux composantes connexes distinctes de C_j . Ainsi la quantité $b(C_j)$ est bornée par la moitié du nombre de points d'intersection de la fermeture \bar{C}_j de C_j avec $\partial\Delta_+$. On peut aussi s'assurer que

$$\mu_j = \{\psi_1 = \dots = \psi_{j-1} = 0\}$$

est une sous-variété algébrique lisse de Δ_+ de dimension $k+1-j$ dont la fermeture $\bar{\mu}_j$ intersecte $\partial\Delta_+$ en une union de $(k-j)$ -faces du polytope Δ_+ .

En fait $\bar{\mu}_j \cap \partial\Delta_+$ est plus qu'une union arbitraire de $(k-j)$ -faces du polytope Δ_+ , c'est une variété linéaire par morceaux de dimension $k-j$. Par exemple, si $k-j=1$, alors $\bar{\mu}_j \cap \partial\Delta_+$ est une union d'arêtes de Δ_+ mais ne peut pas contenir plus de deux arêtes de Δ_+ ayant un sommet en commun. Quitte à perturber les coefficients du système initial, on peut s'assurer que le polytope Δ_+ est simple de sorte que toute $(k-j)$ -face est supportée par exactement j hyperplans pris parmi ceux définis par p_1, \dots, p_{n+k} et celui à l'infini. On peut alors borner le nombre de $(k-j)$ -faces de Δ_+ par $\binom{n+k+1}{j}$, puis borner le nombre de points d'intersection de $\bar{\mu}_j$ avec chacune de ces faces par le produit $2^{\binom{k-j}{2}} n^{k-j}$ des degrés des polynômes P_{j+1}, \dots, P_k pour obtenir

$$b(C_j) \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{\binom{k-j}{2}} n^{k-j} \cdot \binom{n+k+1}{j}. \quad (2.16)$$

Si on note a_j le membre de droite de cette inégalité, alors (2.13) combiné avec (2.15) donne

$$\#\{\psi_1 = \dots = \psi_k = 0\} \leq \sum_{j=1}^k a_j + 2^{\binom{k}{2}} n^k \quad (2.17)$$

On montre alors que

$$\sum_{j=1}^k a_j \leq \left(\sum_{j=1}^k \frac{2^{j-2}}{j!} \right) \cdot 2^{\binom{k}{2}} n^k \quad (2.18)$$

puis que $\sum_{j=1}^k \frac{2^{j-2}}{j!} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j-2}}{j!} = \frac{e^2-1}{4}$, pour obtenir à la borne suivante.

Théorème 6 *Un système polynomial de support $\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{R}^n$ a au plus*

$$\frac{e^2 + 3}{4} 2^{\binom{k}{2}} n^k$$

solutions positives non dégénérées.

On démontre en fait une borne plus fine obtenue en remplaçant n par l'entier $m(\mathcal{W})$, compris entre 1 et n , égal au nombre de lignes non nulles diminué de k de la matrice $A = (a_{i,j})$ (si la ligne i est nulle, alors p_i n'apparaît pas dans le système de Gale). Rappelons que pour $k=1$, la borne donnée par le théorème 4 est $m(\mathcal{W}) + 1$, et que cette borne est exacte. La borne du théorème 6 n'est pas exacte du fait de la succession de majorations grossières. Par exemple, on a majoré le nombre de $(k-j)$ -faces de la variété linéaire par morceaux $\bar{\mu}_j \cap \partial\Delta_+$ par le nombre de $(k-j)$ -faces de Δ_+ . On a ensuite majoré le nombre

de $(k - j)$ -faces de Δ_+ par le coefficient binomial $\binom{n+k+1}{j}$ alors qu'une borne optimale (mais d'expression plus compliquée!) est obtenue en appliquant un fameux théorème de MacMullen au polytope qui est dual à Δ_+ . La constante $\frac{e^2+3}{4}$ provient elle aussi d'une majoration grossière. En utilisant quelques uns de ces raffinements, on obtient la borne suivante dans le cas $k = 2$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre entier).

Théorème 7 *Un système polynomial de support $\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+2}\} \subset \mathbf{R}^n$ a au plus $2n^2 + \lfloor \frac{(n+1)(n+3)}{2} \rfloor$ solutions positives non dégénérées.*

Par exemple, lorsque $n = k = 2$, cela donne la borne 15 alors qu'une borne inférieure connue est égale à 5. Malgré tous ces raffinements possibles, le terme n^k du théorème 6 donnant la dépendance de la borne en n (pour k fixé) est optimal. En effet, pour tout n il existe un système de support $\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{R}^n$ avec au moins $(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1)^k$ solutions positives non dégénérées. Lorsque $\frac{n}{k}$ est un nombre entier m , il suffit de considérer la conjonction de k systèmes de m équations en m variables, les k paquets de variables étant disjoints de manière à avoir un total de $km = n$ variables. Si chacun de ces k sous-systèmes est supporté par un circuit dans \mathbf{R}^m et a le nombre maximal $m+1$ de solutions positives non dégénérées, alors le système obtenu aura $(m+1)^k$ solutions positives non dégénérées. Si chaque équation a un terme constant non nul (ce que l'on peut toujours supposer), alors le support du système est constitué de $1 + k(m+1) = n + k + 1$ termes.

2.4.2 Solutions réelles

On cherche des bornes sur le nombre de solutions réelles non dégénérées d'un système polynomial de support

$$\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{Z}^n$$

non contenu dans un hyperplan et tel que $k \geq 1$. On suppose également que \mathcal{W} est primitif, ou plus généralement qu'il engendre un sous-groupe d'indice impair dans \mathbf{Z}^n . D'après le théorème 2, les solutions qui nous intéressent sont en bijection avec les solutions non dégénérées d'un système de Gale

$$\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y)^{a_{i,j}} = 1, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.19)$$

qui sont contenues dans le complémentaire de l'arrangement $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ des hyperplans de \mathbf{R}^k définis par p_1, \dots, p_{n+k} . La figure qui suit donne un exemple de système de Gale pour un arrangement de quatre droites dans \mathbf{R}^2 .

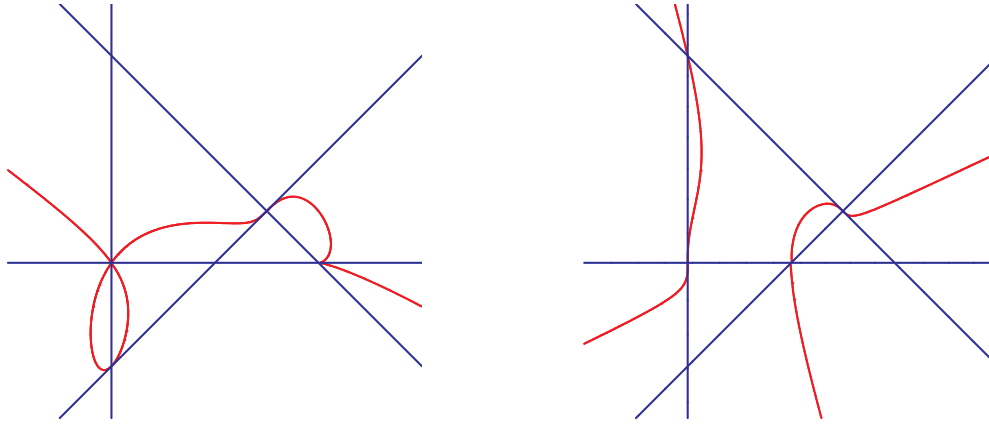


FIGURE 2.4 – La courbe de gauche a pour équation $\frac{y_1^2(y_1+y_2-1)^3}{y_2^2(y_1-y_2-1/2)} = 1$ et celle de droite pour équation $\frac{y_1 \cdot (y_1 - y_2 - \frac{1}{2})^3}{y_2^3 \cdot (y_1 + y_2 - 1)} = 1$

On va obtenir une borne pour le système de Gale plus général

$$\prod_{i=1}^{n+k} |p_i(y)|^{a_{i,j}} = 1, \quad j = 1, \dots, k, \quad (2.20)$$

L'avantage de considérer un tel système est que l'on peut autoriser les exposants $a_{i,j}$ à être des nombres réels, ce qui donne toute latitude à les perturber sans changer le nombre de solutions qui nous intéresse. On modifie légèrement la preuve de la borne sur le nombre de solutions positives de la manière suivante. La fonction ψ_j est définie sur le complémentaire de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ par $\psi_j(y) = \ln \left(\prod_{i=1}^{n+k} |p_i(y)|^{a_{i,j}} \right)$, les déterminants jacobiens Γ_j ainsi que les courbes C_j sont définis dans ce complémentaire de la même manière qu'auparavant à partir de ces fonctions ψ_j , de telle sorte que l'on a une nouvelle fois

$$\#\{\psi_1 = \dots = \psi_k = 0\} \leq b(C_k) + \dots + b(C_1) + \#\{\Gamma_1 = \dots = \Gamma_k = 0\}.$$

La quantité $\#\{\Gamma_1 = \dots = \Gamma_k = 0\}$ reste bornée par le produit $2^{\binom{k}{2}} n^k$ des degrés des polynômes P_1, \dots, P_k définis par $P_{k-j}(y) = \Gamma_{k-j}(y) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y) \right)^{2^j}$. Le nombre $b(C_j)$ de composantes connexes non compactes de $C_j = \{\psi_1 = \dots = \psi_{j-1} = \Gamma_{j+1} = \dots = \Gamma_k = 0\}$ peut être majoré par la moitié du nombre de points d'intersection de \bar{C}_j avec $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$. Ici on doit travailler dans $\mathbf{R}P^k$ et avec l'arrangement d'hyperplans de $\mathbf{R}P^k$ obtenu en ajoutant l'hyperplan à l'infini à $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$. On note à nouveau $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ cet arrangement. La variété

$\mu_j = \{\psi_1 = \dots = \psi_{j-1} = 0\}$ est une sous-variété algébrique lisse du complémentaire de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ dont la fermeture intersecte $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ en une union de sous-espaces affines de dimension $k - j$. Le nombre de points d'intersection de \bar{C}_j avec un tel sous-espace affine est majoré par le produit $2^{\binom{k-j}{2}} n^{k-j}$ des degrés des polynômes P_{j+1}, \dots, P_k . On peut supposer que l'arrangement d'hyperplans $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ est général. On a au plus $\binom{n+k+1}{j}$ sous-espaces affines de dimension $k - j$ de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$. En chaque point d'intersection de \bar{C}_j avec un sous-espace affine de dimension $k - j$ de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$, la courbe \bar{C}_j a exactement une branche incidente en ce point dans chacune des 2^j chambres de l'arrangement ayant ce point sur leurs bords respectifs. Cela donne

$$b(C_j) \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{\binom{k-j}{2}} n^{k-j} \cdot \binom{n+k+1}{j} 2^j. \quad (2.21)$$

Il faut noter le facteur supplémentaire 2^j par rapport à la borne obtenue pour le nombre de composantes connexes non compactes de C_j contenues dans la chambre positive Δ_+ . L'inégalité (2.18) permet alors de majorer $\sum_{j=1}^k b(C_j)$ par $\left(\sum_{j=1}^k \frac{2^{2j-2}}{j!}\right) \cdot 2^{\binom{k}{2}} n^k$. On écrit ensuite $\sum_{j=1}^k \frac{2^{2j-2}}{j!} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^k \frac{4^j}{j!} < \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4^j}{j!} = \frac{e^4 - 1}{4}$, ce qui conduit à la borne suivante.

Théorème 8 *Soit $\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{Z}^n$ un ensemble primitif, ou plus généralement engendrant un sous-groupe d'indice impair dans \mathbf{Z}^n . Un système polynomial de support \mathcal{W} a au plus*

$$\frac{e^4 + 3}{4} 2^{\binom{k}{2}} n^k$$

solutions réelles non dégénérées.

Comme pour le théorème 6, cette borne peut être améliorée via différents raffinements des inégalités utilisées. Néanmoins, en utilisant des systèmes de supports des circuits primitifs et ayant le nombre maximal de solutions réelles, la construction décrite après le théorème 6 donne des systèmes polynomiaux de support $\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{Z}^n$ primitif avec $(2\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + 1)^k$ solutions réelles.

2.5 Bornes pour des systèmes spéciaux

Dans un système polynomial général de support $\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{Z}^n$ toutes les équations ont même support \mathcal{W} . Si on impose des supports

plus petit pour chacune des équations, on s'attend à pouvoir améliorer les bornes des théorèmes 6 et 8. Concernant les solutions complexes, le théorème de Bernstein raffine le théorème de Kouchnirenko en tenant compte des polytopes de Newton individuels des équations. Ici on considère un cas extrême au sens où non seulement les équations n'ont pas toutes \mathcal{W} comme support, mais les supports sont disjoints deux à deux, si l'on excepte le monôme constant que l'on peut toujours supposer commun à chaque équation. Notons $2+k_i$ le nombre de monômes de la i -ème équation et supposons $k_i \geq 1$ pour $i = 1, \dots, n$ (on peut toujours se ramener à ce cas). Le support total \mathcal{W} est de cardinal $n + k + 1 = 1 + \sum_{i=1}^n (1 + k_i)$ de sorte que $k = \sum_{i=1}^n k_i$. Soit

$$\mathcal{W}_i = \{0, w_{i,0}, w_{i,1}, \dots, w_{i,k_i}\} \subset \mathbf{Z}^n$$

le support de la i -ème équation. On peut écrire le système sous la forme

$$x^{w_{i,0}} = p_i(x^{w_{i,1}}, \dots, x^{w_{i,k_i}}), \quad i = 1, \dots, n,$$

où p_1, \dots, p_n sont des polynômes de degrés 1. Toute relation

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_{i,0} w_{i,0} + \alpha_{i,1} w_{i,1} + \dots + \alpha_{i,k_i} w_{i,k_i}) = 0$$

induit l'identité

$$\prod_{i=1}^n \left((x^{w_{i,0}})^{\alpha_{i,0}} \cdot \prod_{j=1}^{k_i} (x^{w_{i,j}})^{\alpha_{i,j}} \right) = 1.$$

En remplaçant $x^{w_{i,0}}$ par $p_i(x^{w_{i,1}}, \dots, x^{w_{i,k_i}})$, puis en introduisant les $k = \sum_{i=1}^n k_i$ nouvelles variables $y = (y_{i,j})$ avec $y_{i,j} = x^{w_{i,j}}$, $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, k_i$, on obtient une équation

$$\prod_{i=1}^n \left(p_i(y_{i,1}, \dots, y_{i,k_i})^{\alpha_{i,0}} \cdot \prod_{j=1}^{k_i} (y_{i,j})^{\alpha_{i,j}} \right) = 1 \quad (2.22)$$

Un système de Gale associé au système départ est constitué de k équations de ce type obtenues en choisissant une base pour l'espace des relations entre les vecteurs non nuls de \mathcal{W} . C'est un système de Gale spécial car chacun des polynômes p_i est creux au sens où il ne dépend que du bloc $y_{(i)}$ de k_i variables $y_{i,j}$, $j = 1, \dots, k_i$. L'arrangement d'hyperplans utilisé dans le cas général était l'arrangement d'hyperplans de $\mathbf{R}P^k$ obtenu en ajoutant l'hyperplan à l'infini aux k hyperplans de coordonnées et à ceux définis par p_1, \dots, p_n . Pour utiliser au mieux la structure particulière des polynômes p_i ,

on utilise plutôt l'arrangement d'hyperplans, de nouveau noté $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$, du produit d'espaces projectifs $\prod_{i=1}^n \mathbf{R}P^{k_i}$ qui est défini par

$$\mathcal{P}_{\mathbf{R}} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{R}P^{k_1} \times \dots \times \mathbf{R}P^{k_{i-1}} \times \mathcal{P}_{i,\mathbf{R}} \times \mathbf{R}P^{k_{i+1}} \times \dots \times \mathbf{R}P^{k_n},$$

où $\mathcal{P}_{i,\mathbf{R}}$ est l'arrangement d'hyperplans de $\mathbf{R}P^{k_i}$ obtenu en ajoutant l'hyperplan à l'infini aux hyperplans de coordonnées et à l'hyperplan défini par p_i . On se concentre sur le nombre de solutions réelles du système de Gale dans le complémentaire de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$, puisque les bornes sur le nombre de solutions dans la chambre positive s'obtiennent de la même manière. Les polynômes p_i étant creux, on obtient que les polynômes de degrés $2^{k-j}n$

$$P_j(y) = \Gamma_j(y) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n+k} p_i(y) \right)^{2^{k-j}}$$

sont également des polynômes creux. Précisément, on montre que $P_j(y)$ est un polynôme de multidegré $(2^{k-j}, \dots, 2^{k-j})$ en $y = (y_{(1)}, \dots, y_{(n)})$. On peut alors tenter d'utiliser plusieurs fois le théorème de Khovansky-Rolle comme dans le cas général :

$$\#\{\psi_1 = \dots = \psi_k = 0\} \leq b(C_k) + \#\{\psi_1 = \dots = \psi_{k-1} = \Gamma_k = 0\},$$

puis

$$\#\{\psi_1 = \dots = \psi_{k-1} = \Gamma_k = 0\} \leq b(C_{k-1}) + \#\{\psi_1 = \dots = \psi_{k-2} = \Gamma_{k-1} = \Gamma_k = 0\}$$

etc, ce qui conduit à

$$\#\{\psi_1 = \dots = \psi_k = 0\} \leq b(C_k) + \dots + b(C_1) + \#\{\Gamma_1 = \dots = \Gamma_k = 0\}.$$

Une grosse difficulté intervient toutefois : il se peut que certains des systèmes utilisés aient un nombre infini de solutions, de sorte que le théorème de Khovansky-Rolle ne s'applique pas. On peut bien sûr perturber le système de départ comme dans le cas général, mais de cette manière on perd la structure spéciale du système de gale et on retrouve les bornes précédemment obtenues. Pour remédier à cela, on montre qu'on peut perturber chacun des jacobians Γ_j en rajoutant à son dénominateur $P_j(y)$ un polynôme de même multidegré de manière à ce que le théorème de Khovansky-Rolle puisse s'appliquer à chacune des étapes. On tire ensuite parti du fait que les polynômes P_j soient creux pour améliorer les bornes obtenues dans le cas général. Sachant que

$P_j(y)$ est un polynôme de multidegré $(2^{k-j}, \dots, 2^{k-j})$ en $y = (y_{(1)}, \dots, y_{(n)})$, le théorème de Bernstein implique que

$$\#\{\Gamma_1 = \dots = \Gamma_k = 0\} \leq 2^{\binom{k}{2}} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n},$$

où $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}$ est le coefficient multinomial. Cette borne est meilleure que la borne $2^{\binom{k}{2}} n^k$ obtenue dans le cas général puisque $n^k = \sum \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}$, la somme étant prise sur l'ensemble des n -uplets d'entiers positifs tels que $k = \sum_{i=1}^n k_i$. Quitte à perturber le système de Gale (tout en gardant sa structure spéciale!) et à perturber encore les dénominateurs des déterminants jacobiens, on peut faire en sorte que, comme dans le cas général, le nombre $b(C_j)$ de composantes connexes non compactes de $C_j = \{\psi_1 = \dots = \psi_{j-1} = \Gamma_{j+1} = \dots = \Gamma_k = 0\}$ soit majoré par la moitié du nombre de points d'intersection de \bar{C}_j avec $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ et que $\mu_j = \{\psi_1 = \dots = \psi_{j-1} = 0\}$ soit une sous-variété algébrique lisse du complémentaire de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ dont la fermeture intersecte $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ en une union de sous-espaces affines de dimension $k-j$. On peut supposer que chaque arrangement $\mathcal{P}_{i, \mathbf{R}}$ est général. Un sous-espace affine de dimension $k-j$ de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ est une intersection de j hyperplans de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$, chaque hyperplan étant la pré-image d'un hyperplan via la projection de $\prod_{i=1}^n \mathbf{R}P^{k_i}$ sur un de ses facteurs. On voit donc qu'un sous-espace affine de dimension $k-j$ de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$ correspond à un choix de j_1 hyperplans de $\mathcal{P}_{1, \mathbf{R}}$, \dots , j_n hyperplans de $\mathcal{P}_{n, \mathbf{R}}$, avec $j_1 + \dots + j_n = j$. Sachant que le nombre d'hyperplans de $\mathcal{P}_{i, \mathbf{R}}$ est $k_i + 2$, on obtient la borne

$$\prod_{i=1}^n \binom{k_i + 2}{j_i} = \prod_{i=1}^n \binom{k_i + 2}{k_i - j_i + 2}$$

pour le nombre de sous-espaces affines de dimension $k-j$ de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$. Le nombre de points d'intersection de \bar{C}_j avec un sous-espace affine de dimension $k-j$ provenant de j_1 hyperplans de $\mathcal{P}_{1, \mathbf{R}}$, \dots , j_n hyperplans de $\mathcal{P}_{n, \mathbf{R}}$ est égal au nombre de solutions du système $P_1(y) = \dots = P_{j-1}(y) = 0$ sur un tel sous-espace affine, lequel est borné grace au théorème de Bernstein par

$$2^{\binom{k-j}{2}} \binom{k-j}{k_1 - j_1, k_2 - j_2, \dots, k_n - j_n}.$$

En chaque point d'intersection de \bar{C}_j avec un sous-espace affine de dimension $k-j$ de $\mathcal{P}_{\mathbf{R}}$, la courbe \bar{C}_j a exactement une branche incidente en ce point dans chacune des 2^j chambres de l'arrangement ayant ce point sur leurs bords respectifs. Cela donne

$$b(C_j) \leq \frac{1}{2} \cdot 2^j \sum 2^{\binom{k-j}{2}} \binom{k-j}{k_1 - j_1, k_2 - j_2, \dots, k_n - j_n} \prod_{i=1}^n \binom{k_i + 2}{k_i - j_i + 2},$$

où la somme est prise sur l'ensemble des n -uplets d'entiers (j_1, \dots, j_n) tels que $0 \leq j_i \leq k_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $j_1 + \dots + j_n = j$.

Théorème 9 *Soit $\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{Z}^n$ un ensemble primitif, ou plus généralement engendrant un sous-groupe d'indice impair dans \mathbf{Z}^n . Un système polynomial de support \mathcal{W} dont la i -ème équation a $k_i + 2$ monômes distincts pour $i = 1, \dots, n$ et tel que le monôme constant soit le seul monôme commun à deux équations arbitraires du système a au plus*

$$\frac{e^4 + 3}{4} 2^{\binom{k}{2}} \cdot \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}$$

solutions réelles non dégénérées. Le nombre de solutions positives non dégénérées d'un tel système, avec $\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{R}^n$ et sans autre hypothèse sur \mathcal{W} , est majoré par

$$\frac{e^2 + 3}{4} 2^{\binom{k}{2}} \cdot \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}.$$

Chapitre 3

Hypersurfaces

On considère un polynôme à coefficients réels $f(x) = \sum_{w \in \mathcal{W}} c_w x^w$ de support $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ et on suppose que f définit une hypersurface lisse du tore réel $(\mathbf{R}^*)^n$. On s'intéresse à la topologie de cette hypersurface. On se ramènera à l'étude de la topologie de l'intersection de cette hypersurface avec l'orthant positif $]0, +\infty]^n$, auquel cas on autorisera des exposants réels $\mathcal{W} \subset \mathbf{R}^n$.

Si \mathcal{W} est contenu dans un hyperplan, alors l'hypersurface $\{f = 0\} \subset (\mathbf{R}^*)^n$ est un produit d'une hypersurface $\{g = 0\} \subset (\mathbf{R}^*)^m$ avec un tore réel où g est un polynôme en $m < n$ variables dont le support n'est pas contenu dans un hyperplan de \mathbf{R}^m . On va donc supposer que le support de f n'est pas contenu dans un hyperplan de \mathbf{R}^n . En particulier, ce support contient au moins $n + 1$ éléments, dont un que l'on peut supposer être le vecteur nul quitte à multiplier f par un monôme.

3.1 Réduction au cas d'un support primitif

Supposons $|\mathcal{W}| = n + 1$. Alors \mathcal{W} est l'ensemble des sommets d'un n -simplexe de \mathbf{R}^n . Si \mathcal{W} est primitif alors l'application monomiale $\varphi_{\mathcal{W}}$ définie par les vecteurs non nuls de \mathcal{W} est un isomorphisme du tore complexe et $\{f = 0\} \subset (\mathbf{R}^*)^n$ est une hypersurface affine dans les coordonnées $z_w = x^w$ du tore définies par $\varphi_{\mathcal{W}}$. Cette hypersurface intersecte l'orthant positif si et seulement si les coefficients c_w ne sont pas tous de même signe, auquel cas la topologie de son intersection avec l'orthant positif est claire. Il s'ensuit que l'intersection avec l'orthant défini par $\epsilon_i x_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$, $\epsilon_i = \pm 1$, est non vide si et seulement si les coefficients de $f(\epsilon_1 x_1, \dots, \epsilon_n x_n)$ ne sont pas tous de même signe.

Supposons maintenant que le support soit de cardinal arbitraire (plus grand que $n + 1$) et non nécessairement primitif. On se ramène au cas d'un

support primitif de la manière suivante. On considère une base (v_1, \dots, v_n) de $\mathbf{ZW} \subset \mathbf{Z}^n$. Si $u_j \in \mathbf{Z}^n$ est le vecteur des coordonnées de w_j dans cette base, alors $\mathcal{U} = \{0, u_1, \dots, u_{n+k}\} \subset \mathbf{Z}^n$ est primitif. Si on note $z_i = x^{v_i}$, $i = 1, \dots, n$, les coordonnées de l'application monomiale φ_V définie par les vecteurs v_1, \dots, v_n , on a alors $x^{w_j} = z^{u_j}$ de sorte que $f(x)$ s'écrit comme un polynôme $g(z)$ de support $\mathcal{U} = \{0, u_1, \dots, u_{n+k}\} \subset \mathbf{Z}^n$ primitif. L'hyper-surface $\{f = 0\} \subset (\mathbf{R}^*)^n$ est la pré-image par φ_V de $\{g = 0\} \subset (\mathbf{R}^*)^n$. Cette application $\varphi_V : (\mathbf{R}^*)^n \rightarrow (\mathbf{R}^*)^n$ envoie orthant sur orthant, est une bijection lorsqu'on la restreint à un orthant, et la pré-image de l'orthant défini par $\epsilon_i z_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$ avec $\epsilon_i = \pm 1$ est soit vide, soit une union de $2^{n-\text{rang}(\overline{W})}$ orthants lorsque $\epsilon_1^{\lambda_1} \dots \epsilon_n^{\lambda_n} > 0$ pour tout $\lambda \in \mathbf{Z}^n$ tel que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in 2\mathbf{Z}^n$. Les $2^{n-\text{rang}(\overline{W})}$ orthants peuvent être déterminés en utilisant une base adaptée pour \mathbf{ZW} via le théorème des facteurs invariants (voir la preuve de la proposition 2.2).

3.2 Cas du circuit

Si $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ est un circuit, c.à.d. $|\mathcal{W}| = n + 2$, alors au signe près il existe une unique relation affine à coefficients entiers premiers entre eux entre les éléments de \mathcal{W} . En regroupant les coefficients de même signe, cette relation s'écrit

$$\sum_{w \in \mathcal{U}} a_w w = \sum_{w \in \mathcal{V}} a_w w, \quad (3.1)$$

où on impose $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ et $a_w > 0$ pour tout $w \in \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$. Les ensembles \mathcal{U} et \mathcal{V} sont déterminés à permutation près, et forment une partition de \mathcal{W} lorsque le circuit est non dégénéré. Notons que $\sum_{w \in \mathcal{U}} a_w = \sum_{w \in \mathcal{V}} a_w$. La paire d'entiers formée des cardinaux de \mathcal{U} et \mathcal{V} est appelée signature du circuit. Par exemple, la paire $(1, n + 1)$, ou $(n + 1, 1)$, correspond à un circuit dans \mathbf{Z}^n donné par l'ensemble des sommets d'un n -simplexe et d'un point contenu à l'intérieur du simplexe. L'enveloppe convexe d'un tel circuit est un n -simplexe. Si $n = 2$, un circuit de signature $(2, 2)$ est l'ensemble des sommets d'un quadrangle. Il existe seulement deux triangulations à sommets dans \mathcal{W} de l'enveloppe convexe Q de \mathcal{W} que l'on va noter $\tau_{\mathcal{U}}$ et $\tau_{\mathcal{V}}$: $\tau_{\mathcal{U}}$ est la triangulation dont les n -simplexes sont les enveloppes convexes de $\mathcal{W} \setminus \{w\}$ pour $w \in \mathcal{U}$, tandis que $\tau_{\mathcal{V}}$ est la triangulation dont les n -simplexes sont les enveloppes convexes de $\mathcal{W} \setminus \{w\}$ pour $w \in \mathcal{V}$. Dans le cas d'un circuit dans \mathbf{Z}^n de signature $(n + 1, 1)$, une des deux triangulations est la triangulation triviale consistant en le n -simplexe Q (et ses faces), tandis que l'autre triangulation s'obtient en prenant les cônes sur les faces de Q à partir du point du circuit situé à l'intérieur de Q . Pour $n = 2$ et une signature égale à $(2, 2)$, les deux

triangulations se distinguent par le choix de la diagonale du quadrangle Q . Il peut être intéressant de noter que le coefficient a_w dans la relation (3.1) est égal au volume normalisé du simplexe de sommets $\mathcal{W} \setminus \{w\}$ divisé par l'indice du sous-groupe $\mathbf{Z}\mathcal{W}$ de \mathbf{Z}^n (en fait cet indice est le pgcd des volumes en question). Soit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ un circuit non dégénéré. Il est connu qu'un polynôme $f(x) = \sum_{w \in \mathcal{W}} c_w x^w$ de support \mathcal{W} a un point singulier dans le tore complexe $(\mathbf{C}^*)^n$ si et seulement si $\Delta_{\mathcal{W}}(f) = 0$, où

$$\Delta_{\mathcal{W}}(f) := \prod_{w \in \mathcal{U}} c_w^{a_w} \cdot \prod_{w \in \mathcal{V}} (-a_w)^{a_w} - \prod_{w \in \mathcal{V}} c_w^{a_w} \cdot \prod_{w \in \mathcal{U}} a_w^{a_w}.$$

Le polynôme $\Delta_{\mathcal{W}} \in \mathbf{Z}[c_w, w \in \mathcal{W}]$ est appelé polynôme discriminant (voir le livre de Gelfand-Kapranov-Zelevinsky sur les discriminants multidimensionnels). Lorsque le circuit est dégénéré, on sait que toutes les hypersurfaces de $(\mathbf{C}^*)^n$ de support \mathcal{W} sont lisses, et on pose alors $\Delta_{\mathcal{W}} := 1$. Une distribution de signes $s : \mathcal{W} \rightarrow \{\pm 1\}$ est dite compatible si elle est constante sur \mathcal{U} ainsi que sur \mathcal{V} , mais pas constante sur $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. On associe au polynôme f la distribution de signes s_f définie par $s_f(w) = \frac{c_w}{|c_w|}$. Si le circuit est non dégénéré c.à.d. si $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, alors s_f est compatible lorsqu'on peut écrire $\pm f(x) = \sum_{w \in \mathcal{U}} d_w x^w - \sum_{w \in \mathcal{V}} d_w x^w$ avec $d_w > 0$ pour tout $w \in \mathcal{W}$.

Proposition 2 *Un polynôme réel f de support un circuit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ a un point singulier dans l'orthant positif $(]0, +\infty[)^n$ si et seulement si $\Delta_{\mathcal{W}}(f) = 0$ et la distribution de signes s_f est compatible, auquel f a un unique point singulier dans $(]0, +\infty[)^n$.*

Bien sur, on obtient le résultat correspondant dans l'orthant de $(\mathbf{R}^*)^n$ défini par $\epsilon_i x_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$, $\epsilon_i = \pm 1$, en appliquant le théorème au polynôme $f(\epsilon_1 x_1, \dots, \epsilon_n x_n)$.

Soit $f(x) = \sum_{w \in \mathcal{W}} c_w x^w$ un polynôme réel de support un circuit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ et qui définit une hypersurface lisse dans $(\mathbf{R}^*)^n$. On veut déterminer la topologie de cette hypersurface et de son plongement dans le tore réel. On se ramène à l'étude de la topologie de l'hypersurface, et de son plongement, dans l'orthant positif. On sait déjà que cette topologie ne dépend pas des coefficients de f si \mathcal{W} est dégénéré. On considère deux polynômes dits de Viro dont les coefficients dépendent d'un paramètre $t > 0$:

$$f_{t,\mathcal{U}}(x) = t \cdot \sum_{w \in \mathcal{U}} c_w x^w + \sum_{w \in \mathcal{V}} c_w x^w$$

et

$$f_{t,\mathcal{V}}(x) = \sum_{w \in \mathcal{U}} c_w x^w + t \cdot \sum_{w \in \mathcal{V}} c_w x^w.$$

Le théorème de Viro, ou plutôt sa version combinatoire, permet de déterminer la topologie de la paire $([0, +\infty]^n, \{f_{t,\mathcal{U}} = 0\})$ pour $t > 0$ suffisamment petit. On construit une hypersurface linéaire par morceaux $Z_{\mathcal{U}}$ contenue à l'intérieur $\text{Int}(Q)$ du polytope Q comme union de morceaux d'hyperplans affines séparant les sommets ayant le signe $+1$ de ceux ayant le signe -1 dans chaque n -simplexe de la triangulation $\tau_{\mathcal{U}}$. Le théorème de Viro permet d'affirmer que la paire $([0, +\infty]^n, \{f_{t,\mathcal{U}} = 0\})$ est homéomorphe à la paire $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{U}})$ pour $t > 0$ suffisamment petit. De même (il suffit de permuter \mathcal{U} et \mathcal{V}), on construit en utilisant la triangulation $\tau_{\mathcal{V}}$ une hypersurface linéaire par morceaux $Z_{\mathcal{V}}$ contenue à l'intérieur du polytope Q telle que $([0, +\infty]^n, \{f_{t,\mathcal{V}} = 0\})$ est homéomorphe à la paire $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{V}})$ pour $t > 0$ suffisamment petit. Notons que le changement de variable $t \mapsto 1/t$ envoie l'hypersurface définie par $f_{t,\mathcal{U}}$ sur l'hypersurface définie par $f_{t,\mathcal{V}}$ de sorte que la topologie de la paire $([0, +\infty]^n, \{f_{t,\mathcal{V}} = 0\})$ pour $t > 0$ suffisamment petit coïncide avec la topologie de la paire $([0, +\infty]^n, \{f_{t,\mathcal{U}} = 0\})$ pour t suffisamment grand.

Théorème 10 *Si le circuit est dégénéré ou si la distribution de signes s_f n'est pas compatible, alors les trois paires $([0, +\infty]^n, \{f = 0\})$, $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{U}})$ et $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{V}})$ sont homéomorphes. Si le circuit est non dégénéré et s_f est compatible, alors $([0, +\infty]^n, \{f = 0\})$ est homéomorphe à la paire $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{U}})$ si $1 < t_0$, ou à $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{V}})$ si $t_0 < 1$, avec*

$$t_0 = \left(\frac{\prod_{w \in \mathcal{V}} c_w^{a_w} \cdot \prod_{w \in \mathcal{U}} a_w^{a_w}}{\prod_{w \in \mathcal{U}} c_w^{a_w} \cdot \prod_{w \in \mathcal{V}} (-a_w)^{a_w}} \right)^{1/\sum_{w \in \mathcal{U}} a_w}.$$

Le résultat est clair si le circuit est dégénéré. Si le circuit est non dégénéré mais s_f n'est pas compatible, alors $s_{f_{t,\mathcal{U}}}$ n'est pas compatible pour tout $t > 0$, et le résultat est clair grâce à la proposition 2. Si le circuit est non dégénéré et s_f est compatible, alors $\Delta_{\mathcal{V}}(f_{t,\mathcal{U}}) \in \mathbf{Z}[t]$ est un binôme en t admettant t_0 comme unique racine positive t_0 . D'après la proposition 2, l'hypersurface $\{f_t = 0\} \subset [0, +\infty]^n$ est singulière si et seulement si $t = t_0$, auquel cas cette hypersurface a un unique point singulier. Il s'ensuit que la paire $([0, +\infty]^n, \{f = 0\})$ est homéomorphe à la paire $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{U}})$ si $1 < t_0$, à la paire $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{V}})$ si $t_0 < 1$. Notons que l'on peut déterminer explicitement les types topologiques des paires $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{U}})$ et $(\text{Int}(Q), Z_{\mathcal{V}})$ en fonction de la signature du circuit (voir le livre de Gelfand-Kapranov-Zelevinsky mentionné plus haut).

Une conséquence importante du théorème 10 est la suivante.

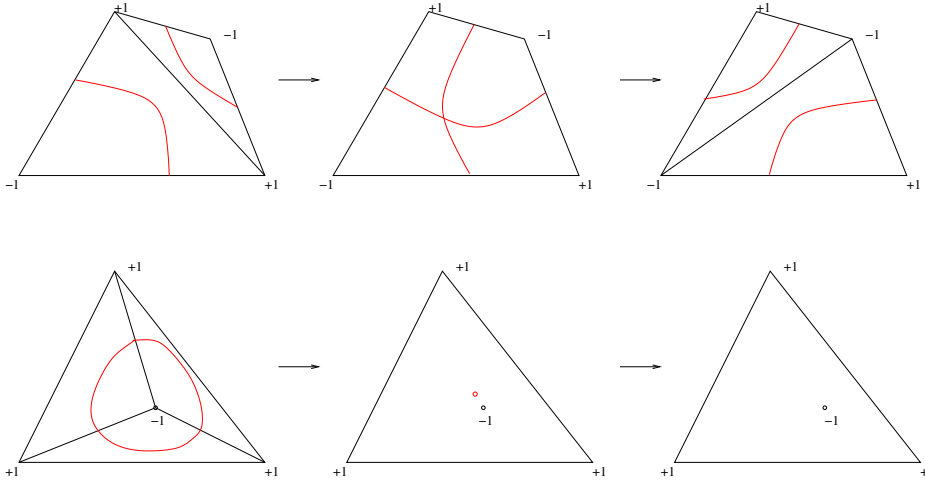


FIGURE 3.1 –

Corollaire 3.2.1 *Une hypersurface de l'orthant positif $(]0, +\infty[)^n$ définie par un polynôme réel f de support un circuit $\mathcal{W} \subset \mathbf{Z}^n$ admet au plus composante connexe compacte, qui est alors homéomorphe à une sphère.*

De plus, une condition nécessaire pour obtenir une composante connexe compacte est que le circuit soit de signature $(n + 1, 1)$.

3.3 Support arbitraire

On considère une hypersurface lisse Z_f de l'orthant positif $(]0, +\infty[)^n$ définie par un polynôme réel f . On suppose que le support $\mathcal{W} = \{0, w_1, \dots, w_{n+k}\} \subset \mathbf{R}^n$ de f est de cardinal $n + k + 1$ avec $k \geq 1$ et n'est pas contenu dans un hyperplan. On s'intéresse dans un premier temps au nombre de composantes connexes de Z_f . Toute fonction différentiable sur $(]0, +\infty[)^n$ admet au moins deux points critiques sur chaque composante connexe compacte de Z_f . Les points critiques d'une fonction monomiale $x \mapsto x^w$ sur Z_f sont les solutions positives d'un système de support \mathcal{W} . Par exemple, les point critiques sur Z_f de $x \mapsto x_1$ sont les solutions positives du système $f = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$. Le théorème 6 conduit donc directement à la borne

$$\kappa(Z_f) \leq \frac{e^2 + 3}{8} 2^{\binom{k}{2}} n^k$$

sur le nombre $\kappa(Z_f)$ de composantes connexes compactes de Z_f . On peut en fait obtenir une meilleure borne car le système considéré est spécial de sorte que les polynômes p_i de degré 1 apparaissant dans un système de Gale

correspondant sont creux. Dans [10], en utilisant une fonction monomiale $x \rightarrow x^w$ avec $w \in \mathcal{W}$, on démontre la borne suivante.

Théorème 11 *Le nombre $\kappa(Z_f)$ de composantes connexes compactes de Z_f vérifie*

$$\kappa(Z_f) \leq \left(\frac{k}{2} 2^{\binom{k}{2}} + \frac{e^2 + 1}{8} \cdot k 2^{\binom{k-1}{2}} \right) n^{k-1} + \left(\frac{e^2}{8} \cdot 2^{\binom{k-2}{2}} \right) n^{k-2}.$$

Il faut retenir de cette borne que pour k fixé le terme dominant est, à une constante multiplicative près, n^{k-1} au lieu de n^k pour la borne plus haut. Il reste à borner les composantes connexes non compactes de Z_f . Plutôt que de travailler avec Z_f , on préfère travailler avec son image Z par l'homéomorphisme $\text{Log} : (]0, +\infty[)^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $x_i \mapsto z_i := \ln(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Soient $M_0, M_1, \dots, M_n > 0$. On définit les hyperplans $H_0 = \{z \in \mathbf{R}^n \mid z_1 + \dots + z_n = M_0\}$ et $H_i = \{z \in \mathbf{R}^n \mid z_i = -M_i\}$ pour $i = 1, \dots, n$. Ces hyperplans correspondent via l'application Log à l'hypersurface $\{x_1 \cdots x_n = e^{M_0}\}$ et aux hyperplans $\{x_i = e^{-M_i}\}$. Ils supportent les facettes du simplexe

$$\Delta = \{z \in \mathbf{R}^n \mid z_1 + \dots + z_n \leq M_0, z_1 \geq -M_1, \dots, z_n \geq -M_n\}.$$

Les faces de Δ sont de la forme $\Delta \cap H_S$, où pour tout sous-ensemble strict S de $\{0, 1, \dots, n\}$ on a posé $H_S = \cap_{i \in S} H_i$ (on a $H_\emptyset = \Delta$). L'intersection de Z avec H_S est l'image Z_S par Log d'une hypersurface d'un orthant positif définie par un polynôme f_S en $n - |S|$ variables et au plus $n - |S| + (k+1) + 1$ monômes (et même au plus $n - |S| + k + 1$ monômes si $0 \notin S$). On choisit $M_0, M_1, \dots, M_n > 0$ suffisamment grands et génériques de telle sorte que pour tout sous-ensemble strict S de $\{0, 1, \dots, n\}$ l'hypersurface Z_S soit lisse, la face $\Delta \cap H_S$ contienne toutes les composantes connexes compactes de Z_S , et toutes les composantes connexes non compactes de Z_S intersectent le bord de $\Delta \cap H_S$. Le nombre de composantes connexes de Z est alors majoré par la somme des nombres de composantes connexes compactes des hypersurfaces Z_S pour S variant parmi les parties strictes de $\{0, 1, \dots, n\}$. Si on note $\tau(n, k)$ (resp., $\kappa(n, k)$) le nombre maximal de composantes connexes (resp., le nombre maximal de composantes connexes compactes) d'une hypersurface lisse de l'orthant positif $(]0, +\infty[)^n$ définie par un polynôme avec au plus $n + k + 1$ monômes, on a donc

$$\tau(n, k) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1}{i} \kappa(n-i, k+1).$$

En utilisant la borne $\kappa(n-i, k+1) \leq \frac{e^2+3}{8} 2^{\binom{k+1}{2}} (n-i)^{k+1}$, on prouve le résultat suivant dans [5].

Théorème 12

$$b_0(Z_f) \leq \frac{e^2 + 3}{4} \cdot 2^{\binom{k+1}{2}} 2^n n^{k+1}.$$

On s'intéresse maintenant à la somme $b_*(Z_f)$ des nombres de Betti de Z_f . Si Z_f est compacte, alors, quitte à perturber un peu f , la restriction à Z_f d'une fonction monomiale $x \mapsto x^w$ est une fonction de Morse. La théorie de Morse classique permet de majorer la somme des nombres de Betti de Z_f par le nombre de points critiques d'une telle fonction. On a déjà vu que ces points critiques sont les solutions positives d'un système de support \mathcal{W} . On obtient donc la borne suivante grâce au théorème 6.

$$b_*(Z_f) \leq \frac{e^2 + 3}{4} 2^{\binom{k}{2}} n^k.$$

Il reste à traiter le cas où Z_f est non compacte. On travaille comme auparavant avec l'image $Z = \text{Log}(Z_f)$. On choisit cette fois-ci $M_0, M_1, \dots, M_n > 0$ suffisamment grands et génériques de telle sorte que chaque hypersurface Z_S soit lisse et $b_*(Z) = b_*(Z \cap \Delta)$. La théorie de Morse classique ne peut pas être utilisée pour borner $b_*(Z \cap \Delta)$ car $Z \cap \Delta$ bien que compacte n'est pas lisse. Néanmoins $Z \cap \Delta$ est une variété à coins et admet donc une stratification de Whitney. Les strates de $Z \cap \Delta$ sont les Z_S° pour S variant parmi les parties strictes de $\{0, 1, \dots, n\}$, où Z_S° est l'intersection de l'hypersurface Z_S avec l'intérieur relatif de $\Delta \cap H_S$ dans H_S . On peut alors utiliser la théorie de Morse stratifiée développée par Goresky et MacPherson pour borner $b_*(Z \cap \Delta)$.

Une fonction différentiable sur $Z \cap \Delta$ est la restriction d'une fonction différentiable sur \mathbf{R}^n . Un point critique d'une fonction différentiable sur $Z \cap \Delta$ est un point critique au sens habituel de la restriction de cette fonction sur l'une des strates Z_S° de $Z \cap \Delta$. Une fonction différentiable h sur $Z \cap \Delta$ est une fonction de Morse stratifiée si h admet autant de valeurs critiques que de points critiques (comme dans le cas classique), si chaque point critique p de h est un point critique non dégénéré de la restriction de h à la strate Z_S° contenant p et, finalement, si la différentielle $dh(p)$ n'est pas identiquement nulle sur toute limite d'espaces tangents $T_{p_i} Z_{S_i}^\circ$ à une strate $Z_{S'}^\circ$ adjacente à (et distincte de) Z_S° en une suite de points (p_i) tendant vers p . La théorie de Morse stratifiée permet de majorer la somme des nombres de Betti de $Z \cap \Delta$ par le nombre de points critiques d'une fonction de Morse sur $Z \cap \Delta$. Comme dans le cas compact, on considère une fonction monomiale $x \mapsto x^w$ sur l'orthant positif qui correspond à une application linéaire $h_w : z \mapsto \langle z, w \rangle$ sur \mathbf{R}^n via Log . Pour w suffisamment générique, l'application h_w est une fonction de Morse sur $Z \cap \Delta$. Les points critiques de h_w sur la strate Z_S° sont

les solutions positives d'un système en $n - |S|$ variables et constitué d'au plus $n - |S| + k + 2$ monômes, et même au plus $n - |S| + k + 1$ monômes si $0 \notin S$. Comme pour le théorème 12, on obtient alors

$$b_*(Z_f) \leq \frac{e^2 + 3}{2} \cdot 2^{\binom{k+1}{2}} 2^n n^{k+1}.$$

Une observation essentielle de l'article [1] est qu'on peut choisir w de manière à ce que les points critiques de h_w situés sur des strates Z_S° avec $0 \in S$ ne contribuent pas à la topologie de $Z \cap \Delta$. Cela permet de réduire la borne précédente approximativement de moitié.

Théorème 13

$$b_*(Z_f) \leq \frac{e^2 + 3}{4} \cdot 2^{\binom{k}{2}} \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} i^l.$$

Comme dans le cas classique, si un intervalle $[a, b]$ ne contient pas de valeur critique de h_w , alors $Z \cap \Delta \cap]-\infty, b]$ est homéomorphe à $Z \cap \Delta \cap]-\infty, a]$. De plus, si $[a, b]$ contient exactement une valeur critique de h_w , correspondant à un unique point critique p d'une restriction de h_w à une strate Z_S° , alors le changement de topologie entre $Z \cap \Delta \cap]-\infty, a]$ et $Z \cap \Delta \cap]-\infty, b]$ est encodé par une paire (A, B) avec $B \subset \partial A$: à homéomorphisme près $Z \cap \Delta \cap]-\infty, b]$ peut être obtenu en collant A à $Z \cap \Delta \cap]-\infty, a]$ le long de B . Dans le cas classique (A, B) est homéomorphe à $(D^\lambda \times D^{n-\lambda}, \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda})$ où n est la dimension de la variété et λ est l'indice de la fonction de Morse au point critique considéré (nombre de valeurs propres négatives de la hessienne). Dans le cas stratifié, la paire (A, B) est homéomorphe à un produit de paires

$$(A_T, B_T) \times (A_N, B_N) = (A_T \times A_N, A_T \times B_N \cup A_N \times B_T),$$

où (A_T, B_T) est la paire décrite plus haut pour la fonction de Morse classique obtenue en prenant la restriction de la fonction de Morse stratifiée à la strate contenant le point critique (on parle de données de Morses tangentielles) et (A_N, B_N) est la paire définie de la manière suivante (on parle de données de Morse normales). Si le point critique p appartient à une strate de dimension ℓ d'une variété à coins de dimension $m + \ell$, alors localement autour de p la variété est homéomorphe à $[0, +\infty[^m \times \mathbf{R}^\ell$. Une tranche normale $N(p)$ de la variété à coins en p est son intersection avec un petit disque centré en p dont l'intersection avec la strate est réduite à p . Une telle tranche normale est homéomorphe à un voisinage de l'origine dans $[0, +\infty[^m$. Pour $0 < \epsilon \ll 1$, on définit alors $A_N = \{x \in N(p), h_w(p) - \epsilon \leq h_w(x) \leq h_w(p) + \epsilon\}$ et $B_N = \{x \in N(p), h_w(p) - \epsilon = h_w(x)\}$. On observe que A_N est homéomorphe

au simplexe standard dans $[0, +\infty[^m$ et que B_N est soit vide, lorsque h_w admet sur $N(p)$ un minimum local en p , soit un sous-ensemble contractible du bord de A_N . Si B_N est vide, on a

$$(D^\lambda \times D^{\ell-\lambda}, (\partial D^\lambda) \times D^{\ell-\lambda}) \times (A_N, B_N) \simeq (D^\lambda \times D^{\ell+m-\lambda}, (\partial D^\lambda) \times D^{\ell+m-\lambda}),$$

et donc le point critique p peut contribuer à la topologie de la variété à coins. Dans le deuxième cas la paire (B_N, B_N) est un rétract par déformation de (A_N, B_N) et il s'ensuit que le point critique p ne contribue pas à la topologie de la variété à coins. À ce stade, on obtient donc que la somme des nombres de Betti de $Z \cap \Delta$ est majorée par le nombre de points critiques p de h_w pour lesquels le minimum de h_w sur $N(p)$ est atteint en p . Soit maintenant p un point critique de h_w situé sur une strate Z_S° avec $0 \in S$. En particulier p appartient à la facette H_0 et la restriction à $N(p)$ de la forme linéaire $h_{(1, \dots, 1)}$ prend sa valeur maximale en p . On peut alors remplacer w par $w + \delta(1, \dots, 1)$ avec $\delta > 0$ suffisamment grand et générique de manière à ce que p soit toujours un point critique de h mais que h n'admette pas son minimum sur $N(p)$ en p . Le nombre de points critiques de h_w situés sur des strates Z_S° avec $0 \in S$ étant fini, il va donc exister $\delta > 0$ tel que $h_{w+\delta(1, \dots, 1)}$ soit une fonction de Morse sur $Z \cap \Delta$ dont le minimum sur une tranche normale $N(p)$ en un point critique p n'est pas atteint en p si $p \in Z_S^\circ$ avec $0 \in S$.

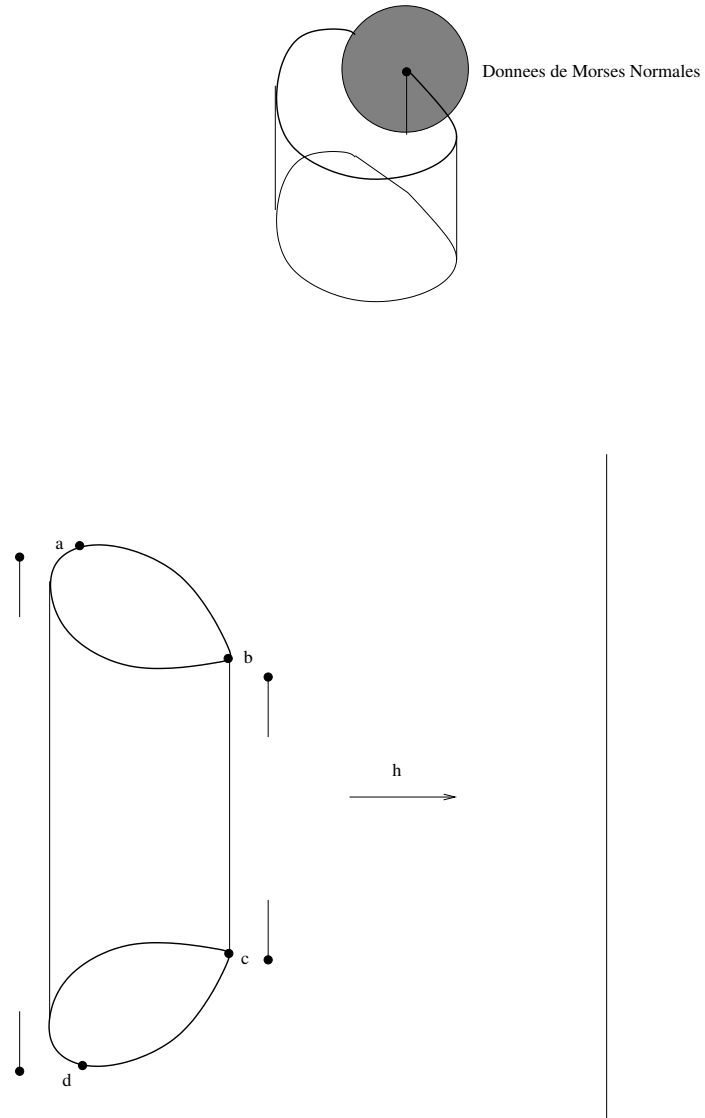


FIGURE 3.2 – Un cylindre avec 4 points critiques, seuls les points critiques c et d contribuent.

Chapitre 4

Synthèse

Je fais maintenant une synthèse des résultats contenus dans les articles [1], [2], [3], [4], [5], [6], [8], [10], [16] et [18].

Dans les papiers [10] et [8], on traite des systèmes polynomiaux en n variables dont le nombre total m de monômes vérifie $m \leq n+2$. Le cas $m \leq n+1$ est très facile, et on peut supposer $m = n + 2$. Dans ce cas, les monômes du système constituent ce qui est appelé un *circuit* dans \mathbf{Z}^n , que l'on notera \mathcal{C} . Ici et par la suite, un monôme de Laurent $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$ en n variables sera confondu avec le vecteur $(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbf{Z}^n$ correspondant et le support du système contiendra toujours le vecteur nul (monôme constant).

Dans l'article [10] obtenu avec B. Bertrand et F. Sottile, on suppose que les vecteurs non nuls de \mathcal{C} sont \mathbf{R} -linéairement indépendants et que le sous-groupe de \mathbf{Z}^n engendré par \mathcal{C} est \mathbf{Z}^n tout entier (ou un sous-groupe d'indice impair). On s'intéresse aux solutions réelles (à coordonnées non nulles) du système. On établit une bijection entre ces solutions réelles et les racines réelles d'un polynôme en une variable appelé éliminant du système. Cet éliminant a une forme spéciale : c'est un binôme (somme de deux monômes) en $n + 1$ formes affines sur \mathbf{R} . On étudie alors le nombre de racines réelles d'un tel type de polynôme ce qui nous permet d'obtenir la borne

$$2n + 1$$

sur le nombre de solutions réelles du système initial. On montre de plus que la borne précédente est optimale en exhibant pour tout n un circuit \mathcal{C} et un système de support \mathcal{C} ayant $2n + 1$ solutions réelles. Dans [10], on considère aussi des supports appelés "near circuit". Un near circuit est un circuit auquel on a ajouté tous les points entiers situé sur un segment joignant deux points du circuit. Nos méthodes s'adaptent bien à de tels supports et nous permettent également d'obtenir des bornes optimales du type précédent.

Dans l'article [8], on cherche des bornes optimales toujours dans le cas d'un circuit \mathcal{C} mais sans conditions sur \mathcal{C} . Notons $m(\mathcal{C})$ la dimension minimale d'un espace affine contenant des points du circuit affinement dépendants et notons $rk(\bar{\mathcal{C}})$ le rang du sous-groupe de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$ engendré par les images des vecteurs de \mathcal{C} via la réduction modulo 2 coordonnée par coordonnée. On établit une bijection entre le nombre de solutions réelles du système et le nombre de racines réelles de l'éliminant plus haut qui sont soumises à certaines conditions de signe. Cela nous permet d'obtenir la borne suivante sur le nombre de solutions réelles du système

$$2^{n-rk(\bar{\mathcal{C}})} \cdot \text{Min}(m(\mathcal{C}) + rk(\bar{\mathcal{C}}) + 1, 2m(\mathcal{C}) + 1).$$

On obtient aussi la borne suivante sur le nombre de solutions positives du système de départ

$$m(\mathcal{C}) + 1.$$

Dans [8] on montre aussi que les bornes obtenues sont optimales. Précisément, pour chaque paire (m, r) possible pour le couple d'entiers $(m(\mathcal{C}), rk(\bar{\mathcal{C}}))$, on montre l'existence d'un circuit \mathcal{C} tel que $(m(\mathcal{C}), rk(\bar{\mathcal{C}})) = (m, r)$ et un système de support \mathcal{C} ayant le nombre maximal de solutions réelles (on montre de même que la borne sur le nombre de solutions positives est optimale). L'optimalité est démontrée en utilisant la théorie des dessins d'enfants. Écrivons l'éliminant du système sous la forme d'un binôme $b(x) = m_1(x) - m_2(x)$, où m_1 et m_2 sont des monômes en des formes affines prises parmi $n + 1$ (déterminées par le système initial). On considère alors le dessin d'enfant $\Phi^{-1}(\mathbf{R}P^1) \subset \mathbf{C}P^1$ associé à l'application réelle $\Phi = \frac{m_1}{m_2}$ vue comme application de $\mathbf{C}P^1$ dans $\mathbf{C}P^1$. Il se trouve que le nombre de racines réelles de $b(x)$ soumises aux contraintes de signes prescrites peut se lire sur le dessin d'enfant, et réciproquement l'existence d'un "dessin sur $\mathbf{C}P^1$ avec les propriétés voulues" garantit l'existence (via le théorème d'existence de Riemann) d'un polynôme $b(x)$ avec le nombre requis de racines réelles satisfaisant aux contraintes de signes souhaitées. L'optimalité des bornes plus haut est alors obtenue via la construction de dessins d'enfants avec les propriétés extrémales correspondantes.

L'article [6] obtenu avec F. Sottile est dans la continuité des deux précédents mais propose une avancée très importante. On propose des bornes sur le nombre de solutions positives de systèmes polynomiaux sans contraintes sur le nombre total m de monômes du système. Écrivons $m = n + k + 1$ avec $k \geq 1$. Rappelons que la borne de Khovansky sur le nombre de solutions positives d'un système polynomial en n variables avec au plus $m = n + k + 1$ monômes est

$$2^{\frac{(n+k)(n+k-1)}{2}}(n+1)^{n+k}.$$

Dans l'article [6], nous améliorons considérablement cette borne pour obtenir

$$\frac{e^2 + 3}{4} \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}} n^k.$$

(On obtient en fait des bornes plus fines mais moins présentables.) Par exemple, lorsque $n = k = 2$, ce qui correspond au cas d'un système de deux équations en deux variables avec un total de cinq monômes, on passe de la borne 5184 à la nouvelle borne 15. On se ramène à un autre système appelé *système de Gale* en utilisant une base pour l'ensemble des relations sur les exposants du système initial. Ce système de Gale est un système de k équations en k variables, chaque équation étant donnée par un binôme en des formes affines sur \mathbf{R}^k . Un tel binôme sera appelé polynôme de *Master*. Ce système de Gale généralise l'éliminant considéré dans le cas du circuit ($k = 1$). Le nombre de solutions positives du système de départ est alors en bijection avec le nombre de solutions du système de Gale contenues dans un certain polytope de \mathbf{R}^k déterminé par le système. Le nombre de solutions du nouveau système est majoré en utilisant de la géométrie différentielle, de la géométrie torique ainsi que de la combinatoire de polytopes. On propose aussi dans ce même article une nouvelle borne fewnomiale (fonction du nombre de monômes et du nombre de variables) sur le nombre de composantes connexes compactes de l'orthant positif d'une hypersurface. On borne ce nombre de composantes connexes compactes par la moitié du nombre de points critiques d'une fonction monomiale. L'observation est que si le monôme est l'un des monômes du polynôme définissant l'hypersurface, alors les points critiques recherchés sont les solutions positives d'un système de même support que le polynôme précédent. On peut alors utiliser les bornes précédentes, mais on peut faire mieux encore car les formes affines constituant le système de Gale correspondant ont très peu de monômes (sont creuses). La nouvelle borne fewnomiale est alors obtenue en exploitant la "sparsité" de ces formes affines dans l'utilisation de notre méthode pour borner le nombre de solution positives d'un système. Dans la note [5] obtenue avec F. Sottile et J.-M. Rojas, on montre que la borne précédente sur le nombre de solutions positives est asymptotiquement optimale en un certain sens. On donne également des bornes sur le nombre de composantes connexes compactes ou non d'une hypersurface fewnomiale de l'orthant positif. Dans l'article [18] obtenu avec C. Stella et J.-M. Rojas, on utilise la forme connue (voir le livre de Gelfand-Kapranov-Zelevinsky) du polynôme discriminant sur l'espace des polynômes

de support un circuit donné et on en déduit entre autre une classification de tous les types topologiques possible d'une hypersurface de l'orthant positif dont le support est un circuit donné. Un ingrédient important de la preuve de nos bornes est la notion de dualité de Gale entre systèmes polynomiaux (variétés zéro-dimensionnelles). Dans l'article [4] obtenu avec F. Sottile, on généralise cette notion aux intersections complètes de dimensions arbitraires. Cette dualité de Gale donne un isomorphisme entre une intersection complète (donnée par un système de $p \leq n$ polynômes en n variables) dans un tore algébrique complexe et une intersection complète définie par des polynômes de Master dans le complémentaire de l'union des hyperplans lieux des zéros des formes affines constituant les polynômes de Master. Comme application de cette dualité de Gale générale, on obtient un théorème de Kouchnirenko ainsi qu'une formule pour la caractéristique d'Euler pour les variétés algébriques définies par des polynômes de Master. Dans l'article [3], on montre comment modifier la preuve de la borne obtenue dans [6] sur le nombre de solutions positives d'un système de manière à obtenir une borne sur le nombre de solutions réelles (à coordonnées non nulles). On peut trivialement multiplier par 2^n la borne sur le nombre de solutions positives (si n est le nombre de variables). La borne obtenue dans [3] est

$$\frac{e^4 + 3}{4} \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}} n^k$$

et diffère de la borne sur le nombre de solutions positives par la constante multiplicative $\frac{e^4+3}{e^2+3}!$ Dans l'article [1], on obtient une borne fewnomiale sur la somme des nombres de Betti d'une hypersurface de l'orthant positif. On reprend l'approche déjà utilisée pour borner le nombre de composantes connexes d'une telle hypersurface : points critiques d'une fonction monomiale plus intersection de l'hypersurface avec un simplexe. Ici une difficulté intervient car la fonction monomiale utilisée (un des monômes du support) n'est pas nécessairement une fonction de Morse sur l'hypersurface, et de plus on veut appliquer la théorie de Morse non pas à l'hypersurface, mais à son intersection avec un simplexe suffisamment grand (de telle sorte que la somme des nombres de Betti de l'hypersurface soit égale à la somme des nombres de Betti de son intersection avec le simplexe). Cette intersection n'est en général pas une variété lisse, mais plutôt ce qui est appelé *une variété à coins*. L'ingrédient supplémentaire de l'article [1] est l'utilisation de la théorie de Morse stratifiée pour borner la somme des nombres de Betti d'une telle intersection. Les bornes sur les nombre de solutions de systèmes obtenues jusqu'alors sont en fait des bornes valables pour un système polynomial général de support donné (de cardinal $n + k + 1$ dans \mathbf{Z}^n). Typiquement, dans un tel système, les équations ont toutes les mêmes monômes (autrement dit, le support de

chaque équation coïncide avec le support du système). Il nous est apparu intéressant de considérer des systèmes non généraux de support donné, précisément, des systèmes dont des monômes du support sont absents de certaines équations. Un cas extrême consiste en les systèmes dont les supports des équations sont disjoint deux à deux (ou ont au plus le monôme constant en commun). Ces systèmes sont l'objet d'étude de l'article **[16]**. On obtient une borne sur le nombre de solutions positives d'un tel système qui est meilleure (plus fine) que la borne précédemment obtenue. Pour cela, il a fallu modifier certains arguments qui utilisaient la généricité du système de départ, et exploiter comme dans un résultat précédent la "sparsité" des fonctions affines intervenant pour de tels systèmes non génériques. Supposons que chacune des équations du système ait au moins deux monômes dont l'un est le monôme constant (on peut toujours se ramener à cette situation). Notons $2 + k_i$ le nombre de monômes de la i -ème équation et supposons que si l'on oublie le monôme constant les supports des équations sont disjoints deux à deux. Le support total du système consiste alors en $1 + \sum_{i=1}^n (1 + k_i)$ monômes, ce qui constitue un support de cardinal $n + k + 1$ si on pose $k = \sum_{i=1}^n k_i$. La borne obtenue dans l'article **[16]** sur le nombre de solutions positives d'un tel système est

$$\frac{e^2 + 3}{4} \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n},$$

où $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n}$ est le coefficient multinomial. Cette borne est meilleure que la borne $\frac{e^2+3}{4} \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}} n^k$ puisque

$$n^k = \sum \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n},$$

la somme étant prise sur l'ensemble des n -uplets d'entiers positifs tels que $k = \sum_{i=1}^n k_i$.

Mentionnons pour finir les bornes obtenues récemment par F. Sottile et deux étudiants pour des systèmes polynomiaux dont le support est l'union de n points avec l'image par une application affine entière $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ de l'ensemble des points entiers de d fois le ℓ -simplexe standard. Un tel support est intermédiaire entre celui d'un polynôme dense de degré donné d en ℓ variables et un support creux (arbitraire). Pour $\ell = 1$, on obtient ce qu'on a appelé near circuit dans **[10]**. On a montré dans **[10]** que les méthodes utilisées pour traiter des circuits s'adaptent bien au cas du near circuit. Les méthodes utilisées pour les circuits ont ensuite été généralisées aux supports creux quelconques et il se trouve que ces dernières méthodes s'adaptent également bien, non sans éviter de nombreuses complications techniques, aux supports intermédiaires introduits précédemment. Un travail en cours avec

F. Sottile consiste à adapter nos méthodes au cas d'un support intermédiaire entre celui d'un polynôme de polytope de Newton donné et un support creux (arbitraire). Des difficultés plus sérieuses apparaissent alors lorsque la variété torique associée au polytope de Newton est singulière.

Chapitre 5

Autres travaux

Je décris ici assez rapidement les autres travaux obtenus après la thèse et contenus dans les articles [7], [9], [12] et [17] et [19]. Je ne reviens pas sur les articles [11], [13], [14] et [15] qui sont directement issus de ma thèse.

Une variété algébrique réelle X est une variété complexe définie par des équations algébriques à coefficients réels. L'ensemble des solutions réelles de ces équations est l'ensemble noté $\mathbf{R}X$ des points réels de X (plus généralement, on considère une variété complexe X équipée d'une involution antiholomorphe $\sigma : X \rightarrow X$, la partie réelle de X est alors l'ensemble des points fixes de σ). Les variétés réelles les plus étudiées sont naturellement les hypersurfaces projectives. On notera X_m^n une hypersurface réelle de degré m dans l'espace projectif $\mathbf{C}P^n$. Sa partie réelle $\mathbf{R}X_m^n$ est un sous-ensemble de l'espace projectif réel $\mathbf{R}P^n$. Deux hypersurfaces algébriques réelles lisses de même degré dans $\mathbf{C}P^n$ sont toujours difféomorphes, mais il n'en va pas de même pour leurs parties réelles. Il en résulte, entre autres, le problème de la classification des types topologiques possibles de $\mathbf{R}X_m^n$ pour m, n donnés et X_m^n lisse. Pour $n = 2$, la solution complète à ce problème est due à Harnack (1876), et on s'intéresse actuellement à la classification des schémas réels des courbes planes, i.e. des types topologiques possibles des paires $(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R}X_m^2)$. Pour $n = 3$ (surfaces algébriques réelles dans $\mathbf{C}P^3$), la classification des types topologiques possibles de $\mathbf{R}X_m^3$ est connue depuis longtemps pour les degrés $m \leq 3$. La question correspondante pour $m = 4$ (quartiques) fut posée par D. Hilbert dans le seizième problème de sa fameuse liste de 1900. La réponse finale à cette question fut apportée par Kharlamov en 1976 (d'autres classifications plus fines, à isotopie et isotopie rigide près, ont également été obtenues pour les quartiques). À ce jour, la question reste ouverte pour $n = 3, m \geq 5$ ou $n \geq 4, m \geq 3$ malgré les restrictions connues : inégalités de Smith-Thom, inégalités de Comessati-Kharlamov, etc, et les moyens de construction existants qui sont essentiellement la méthode de construc-

tion par petite perturbation (aussi dite à la Harnack) et méthode de Viro. La plupart des constructions d'importance récentes ont été obtenues grâce à la méthode de Viro et sa version combinatoire le patchwork combinatoire. La méthode de Viro procède d'un esprit très différent de la méthode à la Harnack. À partir d'une subdivision polyédrale convexe d'un polytope P par des polytopes P_i , $i \in I$, et d'une collection de polynômes réels f_i de polytopes de Newton respectifs P_i , la méthode de Viro permet de recoller des hypersurfaces $\{f_i = 0\} \subset (\mathbf{R}^*)^n$ en une hypersurface $\{f = 0\} \subset (\mathbf{R}^*)^n$, où f a pour polytope de Newton P . Lorsque chacun des polytopes Δ_i est un simplexe dont les sommets correspondent exactement aux monômes de f_i , alors les hypersurfaces $\{f_i = 0\} \subset (\mathbf{R}^*)^n$ sont déterminées (d'un point de vue topologique) par les signes des monômes des f_i , et la construction devient complètement combinatoire. On parle dans ce cas de patchwork combinatoire ou de T-construction et on appelle T-variété une variété construite de cette manière. Il existe des généralisations de la méthode de Viro, au cas des hypersurfaces singulières ou des champs de vecteurs, par exemple. Une généralisation du patchwork combinatoire au cas des intersections complètes a été obtenue par B. Sturmfels. Dans [12] j'ai obtenu une généralisation de la méthode de Viro initiale au cas des intersections complètes, qui étend également la version proposée par Sturmfels. Peu de temps après la publication de [12], j'ai remarqué que l'on pouvait y relâcher certaines des hypothèses pour obtenir ainsi une version légèrement plus générale ayant aussi l'avantage de se décrire très simplement en utilisant la version originale de la méthode de Viro pour les hypersurfaces et ce qui est appelé le *Cayley trick*. Cette nouvelle version a fait l'objet de quelques exposés (note en projet).

Soit X une variété réelle. L'inégalité de Smith-Thom s'écrit

$$b_*(\mathbf{R}X) \leq b_*(X)$$

et signifie que la somme des nombres de Betti de $\mathbf{R}X$ est majorée par la somme des nombres de Betti de X (les nombres de Betti seront pris à coefficients dans $\mathbf{Z}/2$). La variété X est dite *maximale* ou *M-variété* lorsque $b_*(\mathbf{R}X) = b_*(X)$. Pour une variété projective lisse de dimension complexe paire $n = 2k$, l'inégalité de Comessatti-Kharlamov s'écrit

$$|\chi(\mathbf{R}X) - 1| \leq h^{k,k}(X) - 1$$

et donne donc des bornes sur la caractéristique d'Euler de $\mathbf{R}X$ en fonction du nombre de Hodge $h^{k,k}(X)$ de X . Les inégalités de Smith-Thom combinées à celles de Comessatti-Kharlamov donnent lieu à des bornes sur les nombres de Betti individuels de $\mathbf{R}X$. On peut alors s'intéresser à la question des

valeurs maximales possibles pour m et n fixés de chacun des nombres de Betti $b_i(\mathbf{R}X_m^n)$, où X_m^n est une hypersurface réelle lisse de degré m dans $\mathbf{C}P^n$. C'est une question difficile. Par exemple, on ne connaît toujours pas la valeur maximale possible de $b_0(\mathbf{R}X_5^3)$ (nombre de composantes connexes pour une quintique réelle dans $\mathbf{C}P^3$), on sait néanmoins que cette valeur maximale est égale à 22 ou 23.

La plupart des résultats obtenus dans ma thèse apportent des réponses à la question précédente pour certaines valeurs de n et m ([15], [13], [14], [11]). Le travail présenté dans [19] a été obtenu après la thèse et généralise ceux obtenus dans [11] qui ne concernaient que les surfaces dans $\mathbf{C}P^3$: on obtient dans [19] des estimations asymptotiques pour $m \rightarrow +\infty$ et n fixé des valeurs maximales des nombres de betti $b_i(\mathbf{R}X_m^n)$. Précisément, suite à une remarque de V. Kharlamov, j'ai montré que pour chaque paire d'entiers (i, n) , la suite réelle dont le terme général est la valeur maximale possible de $b_i(\mathbf{R}X_m^n)$ divisée par m^n admet une limite lorsque $m \rightarrow +\infty$:

$$\frac{\text{Max } b_i(\mathbf{R}X_m^n)}{m^n} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \ell_{i,n}.$$

Il devient alors naturel de tenter d'obtenir des estimations pour ces réels $\ell_{i,n}$. L'inégalité de Smith-Thom donne trivialement la borne supérieure $\ell_{i,n} \leq 1$, borne que l'on peut raffiner en utilisant l'inégalité de Comessatti-Kharlamov lorsque n est impair. On obtient dans [19] des bornes inférieures pour chacun des réels $\ell_{0,n}$ gouvernant l'asymptotique de la valeur maximale du nombre de composantes connexes d'une hypersurface de degré m dans $\mathbf{R}P^n$. En particulier on obtient l'inégalité suivante

$$\ell_{0,n} \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La preuve est constructive et utilise différentes versions de la méthode de Viro couplées avec des constructions de géométrie complexe.

Lors d'un semestre au MSRI consacré aux variétés réelles (printemps 2004), je me suis intéressé, dans un premier temps avec Clint McCrory, à la question suivante : "toute variété torique est-elle une M -variété?". Rappelons qu'une variété torique X de dimension n est la clôture de Zarisky d'un tore algébrique $(\mathbf{C}^*)^n$ qui agit sur X . Il lui correspond un éventail Δ dans un réseau $N \simeq \mathbf{Z}^n$ dont les cônes correspondent aux orbites – des sous-tores algébriques – du tore $(\mathbf{C}^*)^n$. On munit ici une variété torique de sa structure réelle classique, de telle sorte que $(\mathbf{R}^*)^n$ soit la partie réelle de $(\mathbf{C}^*)^n$ (en particulier un tore est lui-même une M -variété). Il est connu depuis longtemps que toute variété torique projective lisse est une M -variété (dans ce cas, on connaît même les nombres

de betti individuels des parties réelles et complexes en fonction des nombres de faces d'un polytope associé). Le papier [9] obtenu avec Matthias Franz, Clint McCrory et Joost Van Hamel, résulte d'une tentative de généralisation de ce résultat aux variétés toriques non nécessairement compactes ni lisses. On montre dans un premier temps que toute surface torique compacte est une M -surface. On obtient en fait le résultat suivant plus précis.

Théorème 14 *Soit X une surface torique compacte associée à un éventail complet Δ d'un réseau $N \simeq \mathbf{Z}^2$ de dimension 2. Soit s le nombre de cones de dimension 1 de cet éventail Δ .*

1. *Si au moins deux générateurs primitifs de cones de dimension 1 de Δ ont des images différentes dans le quotient $N/2N$, alors*

$$b_0(\mathbf{R}X) = 1, \quad b_1(\mathbf{R}X) = s - 2, \quad b_2(\mathbf{R}X) = 1, \\ b_0(\mathbf{C}X) = 1, \quad b_1(\mathbf{C}X) = 0, \quad b_2(\mathbf{C}X) = s - 2, \quad b_3(\mathbf{C}X) = 0, \quad b_4(\mathbf{C}X) = 1,$$

2. *Sinon,*

$$b_0(\mathbf{R}X) = 1, \quad b_1(\mathbf{R}X) = s - 1, \quad b_2(\mathbf{R}X) = 2, \\ b_0(\mathbf{C}X) = 1, \quad b_1(\mathbf{C}X) = 0, \quad b_2(\mathbf{C}X) = s - 1, \quad b_3(\mathbf{C}X) = 1, \quad b_4(\mathbf{C}X) = 1.$$

On peut remarquer que dans le deuxième cas la surface torique est forcément singulière : elle a s points singuliers correspondant aux cones de dimension 2 de Δ . Pour les dimensions supérieures, on obtient le résultat suivant.

Théorème 15 *Si X est une variété torique qui est soit compacte à singularités isolées, soit de dimension inférieure ou égale à 3, alors X est une M -variété.*

Récemment, Valerie Hower, une étudiante en thèse de Clint McCrory, a construit une variété torique de dimension 6 qui n'est pas une M -variété, apportant par la même une réponse négative à notre question initiale.

L'article [7] traite des surfaces elliptiques réelles et résulte d'une collaboration avec Frédéric Mangolte. Les surfaces elliptiques réelles avec section réelle et base la droite projective $\mathbf{C}P^1$ sont étroitement liées aux courbes trigonales, qui sont des courbes d'un certain type sur des surfaces de Hirzebruch. Le lien est donné par le revêtement double de la surface de Hirzebruch ramifié le long de la courbe trigonale, et la topologie de la partie réelle de la surface elliptique est déterminée par le schéma réel de la courbe trigonale. Ce schéma est lui-même uniquement déterminé par un certain *dessin d'enfant* sur $\mathbf{C}P^1$, obtenu comme image inverse de $\mathbf{R}P^1$ par une application

rationnelle réelle $\mathbf{C}P^1 \rightarrow \mathbf{C}P^1$ déterminée par la courbe trigonale. La découverte de cette correspondance entre courbes trigonales et dessins d'enfants est due à S. Orevkov. Dans [7], nous donnons une classification topologique complète des surfaces elliptiques réelles avec section réelle et base la droite projective $\mathbf{C}P^1$ pour une classe de déformation de surface elliptique complexe donnée. Notons que les classes de déformation des surfaces elliptiques complexes considérées ici sont uniquement déterminées par la caractéristique d'Euler holomorphe. Dans le théorème qui suit, on appelle type topologique extrémal un type topologique qui ne peut pas se déduire d'un autre par une modification de Morse c.à.d. par la suppression d'une sphère ou d'une anse.

Théorème 16 *Les types topologiques extrémaux des surfaces elliptiques réelles lisses avec section réelle, base $\mathbf{C}P^1$ et caractéristique d'Euler holomorphe égale à k sont les suivants*

1. *M -surfaces, $a = k + 4\lambda - 1$, $l = 5k - 4\lambda$, $\lambda = 0, 1, \dots, k$*
 - $S_l \sqcup aS$, k pair ou
 - $V_{2l} \sqcup aS$, k impair.
2. *$(M - 2)$ -surfaces, $a = k + 4\lambda$, $l = 5k - 4\lambda - 3$, $\lambda = 0, 1, \dots, k - 1$*
 - $S_l \sqcup aS$, k pair ou
 - $V_{2l} \sqcup aS$, k impair.
3. - $S_1 \sqcup S_1$, k pair ou
- $V_2 \sqcup V_2$, k impair.

Ici S_α désigne une sphère avec α anses et V_β désigne la somme connexe de β plan projectifs réels (bouteille de Klein avec $(\beta - 2)/2$ anses si β est pair, le plan projectif avec $(\beta - 1)/2$ anses si β est impair). Réciproquement, tout type topologique de surface de premier nombre de Betti ≥ 2 et s'obtenant à partir d'un des types précédent par une suite de transformations de Morse est le type topologique d'une surface elliptique réelle lisse avec section réelle, base $\mathbf{C}P^1$ et caractéristique d'Euler holomorphe égale à k .

Plus récemment, est apparu l'article "On deformation types of real elliptic surfaces" par Degtyarev, Itenberg et Kharlamov contenant une étude détaillée des surfaces elliptiques réelles en toute généralité à travers leurs relations avec les courbes trigonales et dessins d'enfants.

L'article [17] en collaboration avec B. Bertrand se situe dans le cadre de la géométrie tropicale. Basiquement une variété tropicale est une variété linéaire par morceaux qui peut être vue comme l'image d'une variété complexe après une certaine dégénérescence de sa structure complexe. Certaines propriétés de la variété complexe survivent à cette forte dégénérescence et se

retrouvent donc dans la variété tropicale correspondante. La géométrie tropicale est étroitement liée au patchwork combinatoire du à O. Viro (voir l'article "Dequantization of Real Algebraic Geometry on Logarithmic Paper) et les premiers développements de cette théorie sont principalement dus à M. Kapranov, G. Mikhalkin et B. Sturmfels. Parmi les résultats les plus impressionnants, citons celui de Mikhalkin qui a obtenu une formule pour le nombre de courbes complexes de genre et de polygone de Newton donnés passant par une configuration générique de points dans la surface torique projective associée au polygone de Newton (le nombre de points est celui qu'il faut pour avoir un nombre fini de courbes). Il résoud en fait l'analogie tropical de ce problème et montre qu'on a une bijection entre courbes complexes et courbes tropicales correspondantes (le problème dans le monde tropical est alors combinatoire). On peut aussi de cette manière compter le nombre de courbes réelles passant par une configuration de points (globalement réelle). On arrive ainsi à la notion de variété tropicale réelle. Dans l'article [17], on donne une définition d'intersections tropicales complètes non dégénérées. En particulier, cela correspond à une intersection d'hypersurfaces complexes pour laquelle chaque intersection partielle est une intersection complète. On définit une multiplicité d'intersection entre hypersurfaces tropicales et on montre que les deux définitions sont cohérentes entre elles au sens où chacune des multiplicités d'intersection intervenant dans une intersection tropicale complète non dégénérée est soit nulle soit égale à 1. Cette multiplicité d'intersection est définie comme celle introduite par Mikhalkin : dans un premier temps pour une intersection transverses de cellules, puis comme une somme de multiplicités émergeant d'une intersection non transverse après perturbation générique des hypersurfaces tropicales. Néanmoins, notre définition est valable pour les cellules de toute dimension alors que celle de Mikhalkin ne concernait que les cellules de dimensions maximales. On montre que la multiplicité ainsi obtenue est bien définie, c.à.d. ne dépend pas de la perturbation utilisée, en donnant une formule explicite pour cette multiplicité. Si ξ est l'intersection de k cellules ξ_1, \dots, ξ_k de k hypersurfaces tropicales Z_1, \dots, Z_k , si σ_i est le polytope correspondant à ξ_i dans la subdivision du polytope de Newton de Z_i qui est duale à Z_i , alors la multiplicité d'intersection portée par ξ est égale à

$$w(\xi) = \sum_{\underline{t}, t_1 + \dots + t_k = d} MV_d(\sigma_1, \dots, \sigma_k; \underline{t}),$$

où la somme est prise sur toutes les partitions $\underline{t} = (t_1, \dots, t_k)$ de d c.à.d. tous les k -uplets (t_1, \dots, t_k) d'entiers strictement positifs de somme égale à d . Ici d est la dimension du polytope $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$ et $MV_d(\sigma_1, \dots, \sigma_k; \underline{t})$ est un volume mixte généralisé défini de la manière suivante en utilisant le volume mixte d -dimensionnel usuel

$$MV_d(\sigma_1, \dots, \sigma_k; \underline{t}) := MV_d(\underbrace{\sigma_1, \dots, \sigma_1}_{t_1}, \dots, \underbrace{\sigma_m, \dots, \sigma_k}_{t_k}).$$

Grossièrement, une intersection complète non dégénérée d'hypersurfaces tropicales est une intersection pour laquelle aucune multiplicité d'intersection intervenant entre ces hypersurfaces n'est supérieure strictement à 1 (il faut aussi inclure d'autres hypersurfaces tropicales "à l'infini" obtenues en tronquant les polynômes de départ sur les faces des polytopes de Newton). Le résultat principal de la deuxième partie de notre article est que la caractéristique d'Euler de la partie réelle d'une telle intersection tropicale coïncide toujours avec la signature complexe d'une intersection complète générique d'hypersurfaces complexes de mêmes polytopes de Newton. En fait cette signature complexe n'existe pas toujours (par exemple lorsque aucune intersection complexe n'est lisse), auquel cas on doit remplacer la signature par la signature mixte qui est définie dans l'article. Ce résultat généralise un résultat de la thèse de B. Bertrand (cas des hypersurfaces). La démonstration est combinatoire et utilise des résultats de V. Batyrev sur les structures de Hodge mixtes pour les hypersurfaces. L'article [17] est en révision et devrait être découpé en deux articles.

Bibliographie

1. *Betti number bounds for fewnomial hypersurfaces via stratified Morse theory*, avec F. Sottile, Proceedings of the American Mathematical Society, 137 (2009), 2825–2833.
2. *Faster Real Feasibility via Circuit Discriminants*, avec C. Stella et J.-M. Rojas, proceedings of ISSAC 2009 (July 28-31, Seoul, Korea).
3. *Bounds on the number of real solutions to polynomial equations*, avec D. Bates et F. Sottile, International Mathematical Research Notices, 2007, no. 23, 7 pages.
4. *Gale duality for complete intersection*, avec F. Sottile, 10 pages, Annales de l'Institut Fourier, 58 (2008), no. 3, 877–891.
5. *On the sharpness of fewnomial bounds and the number of components of fewnomial hypersurfaces*, avec J.-M. Rojas et F. Sottile, IMA Volume 146 "Algorithms in Algebraic Geometry" édité par Alicia Dickenstein, Frank-Olaf Schreyer, and Andrew J. Sommese, 15-20, Springer, New York, 2007.
6. *New fewnomial upper bounds from Gale dual polynomial systems*, avec F. Sottile, Moscow Mathematical Journal, volume 7, Number 3, (2007), 387-407. (Volume spécial pour les soixante ans de A. Khovansky).

7. *Topological types of real regular elliptic surfaces*, avec F. Mangolte, *Geometriae Dedicata*, volume 127, (2007), 57-73.
8. *Polynomial systems supported on circuits and dessins d'enfants*, *Journal of the London Mathematical Society*, volume 75, (2007), no. 1, 116-132.
9. *Is every toric variety an M-variety?*, avec M. Franz, C. McCrory et J. Van Hamel, *Manuscripta Mathematica*, **120** (2006), 217-232.
10. *Polynomial systems with few real zeroes*, avec B. Bertrand et F. Sottile, *Math. Zeitschrift* **253** (2006), 361-385.
11. *Asymptotic behaviour of Betti numbers of real algebraic surfaces*, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **78**, (2003), 227-244.
12. *Viro method for the construction of real complete intersections*, *Advances in Mathematics*, **169**, no 2, (2002), 177-186.
13. *Betti numbers of real numerical quintic surfaces*, "Topology, Ergodic Theory, Real Algebraic Geometry. Rokhlin's Memorial" *Amer. Math. Soc. Transl. ser. 2*, **202**, ed. V. Turaev and A. Vershik, (2001), 31-38.
14. *Une sextique de l'espace projectif réel avec un grand nombre d'anses*, *Revista Matematica Complutense*, **14**, no 2, (2001), 439-461.
15. *Une quintique numérique réelle dont le premier nombre de Betti est maximal*, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. 1 Math* (**329**) (1999), no 2, 135-140.
16. *Fewnomial bound for completely mixed polynomial systems*, avec F. Sottile, *Advances in Geometry*, vol. 11, no 3, (2011), 541-556.
17. *Euler characteristic of real non degenerate tropical complete intersections*, avec B. Bertrand, 30 pages, Avril 2007, en cours de révision.
18. *First steps in algorithmic real fewnomial theory*, avec J. -M. Rojas et C. Stella, 25 pages, Janvier 2006, Arxiv, version préliminaire de l'article "Faster Real Feasibility via Circuit Discriminants", publié dans les proceedings de ISSAC 2009.
19. *Asymptotiques de nombres de Betti d'hypersurfaces projectives réelles*, en français, 28 pages, 2003.