Étude des points fixes de la fermeture pseudopalindromique itérative

Geneviève Paquin

En collaboration avec D. Jamet et G. Richomme

Laboratoire de Mathématiques
Université de Savoie

web : http://www.lama.univ-savoie.fr/~paquin/
courriel : Genevieve.Paquin@lama.univ-savoie.fr

11 décembre 2008

Plan de l'exposé

- Définitions et notations
- Suite sturmienne (standard)
- Généralisation pour un alphabet à plus de 2 lettres
- Points fixes et mot de Kolakoski
- Points fixes de la fermeture palindromique itérative
- Pseudopalindrome et mot pseudostandard
- Points fixes de la fermeture pseudopalindromique itérative
- Problèmes ouverts

Définitions et notations (1/2)

- $\mathcal{A} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}\}$: alphabet fini à k lettres
- $\mathcal{A}^*$: ensemble des mots finis $w = w[0]w[1]\cdots w[n-1]$, $w[i] \in \mathcal{A}$
- $|w|$: longueur du mot w
- ε : mot vide, de longueur 0
- $\mathcal{A}^\omega$: mot infini (suite) sur l'alphabet $\mathcal{A}$
- Si $w = pfs$, alors p, f, s sont des facteurs de w. Plus particulièrement, p est un préfixe et s est un suffixe de w.

Définitions et notations (2/2)

Palindrome

On note $\widetilde{w} = w[n-1]w[n-2]\cdots w[0]$ l'*image miroir* de w. Si $w = \widetilde{w}$, alors w est un palindrome.

Exemples

LAVAL, radar, Karine alla en Irak, 1213121, ababbaba

Fermeture palindromique

La *fermeture palindromique* du mot $w \in \mathcal{A}^*$, notée w^+, est le plus court palindrome ayant w comme préfixe.

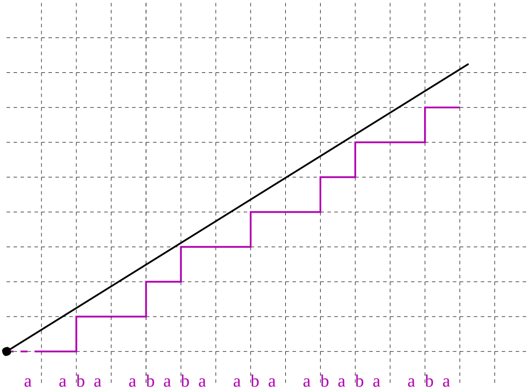
Exemples

1) $(LAMA)^+ = L \cdot AMA \cdot \widetilde{L} = LAMAL$

2) $(genevieve)^+ = genevi \cdot eve \cdot \widetilde{genevi} = genevieveiveneg$

3) $(11231213121)^+ = 1123 \cdot 1213121 \cdot \widetilde{1123} = 112312131213211$

Suite sturmienne (standard) (1/2)



$w = a^{-1}aabaababaabaababaaba\cdots = abaababaabaababaaba\cdots$ est une *suite sturmienne standard*, de pente $1/\phi^2$.

Suite sturmienne (standard) (2/2)

Fermeture palindromique itérative

Soit $w \in \mathcal{A}^+$. Alors la fermeture palindromique itérative de w, notée $\mathrm{Pal}(w)$, est définie par

$$\begin{aligned} \mathrm{Pal}(\varepsilon) &= \varepsilon, \\ \mathrm{Pal}(w) &= (\mathrm{Pal}(w[0, n-1])w[n])^+. \end{aligned}$$

Exemple

$\mathrm{Pal}(121) = (\mathrm{Pal}(12)1)^+ = ((\mathrm{Pal}(1)2)^+1)^+ = ((12)^+1)^+ = ((121)1)^+ = 121121.$

Naturellement, la fermeture palindromique itérative se généralise à un mot $u \in \mathcal{A}^\omega$ par

$$\mathrm{IPal}(u) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{Pal}(u[0, n]).$$

Exemple : mot de Fibonacci

$\mathrm{IPal}(ababa\cdots) = \underline{ab}a\underline{a}bab\underline{a}...$

Généralisation pour $|\mathcal{A}| \geq 3$

Suite épisturmienne standard

Soit $\mathcal{A}$ tel que $|\mathcal{A}| > 2$ et posons $w \in \mathcal{A}^\omega$. Alors $\mathrm{IPal}(w)$ est une *suite épisturmienne standard.*

Exemple : suite de Tribonacci

Posons $T = \mathrm{IPal}((123)^\omega)$. Ainsi,

$$T = \underline{12}1\underline{3}121\underline{1}213121\underline{2}131211213121\cdots$$

De façon générale, on note $\Delta(T)$ la suite qui détermine T, appellée la *suite directrice* de T. Ici, $\Delta(T) = (123)^\omega$.

Mot de Kolakoski

$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, \cdots$

$\underbrace{22}_{22}\ \underbrace{11}_{21}\ \underbrace{2}_{12}\ \underbrace{1}_{11}\ \underbrace{22}_{22}\ \underbrace{1}_{11}\ \underbrace{22}_{22}\ \underbrace{11}_{21}\ \cdots$

$\underbrace{22}_{2}\ \underbrace{11}_{2}\ \underbrace{2}_{1}\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{22}_{2}\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{22}_{2}\ \underbrace{11}_{2}\ \cdots$

La fonction qui, à un mot $w \in \mathcal{A}^\infty$, associe un mot décrivant ses longueurs de blocs de lettres successifs est (aussi) notée Δ.

Par exemple, $\Delta(1121211112) = 211141$.

En considérant l'alphabet $\{1, 2\}$, le mot de Kolakoski, noté K, est le point fixe sous Δ, commençant par 2 :
$K = 2211212212211 \cdots$ et $1K$ est celui commençant par 1.

Questions

1. À quoi ressemblent les points fixes de la fermeture palindromique itérative ?
2. Combien y en a-t'il ?
3. Ont-ils des propriétés remarquables ? Lesquelles ?

Existence (1/2)

Proposition

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet à k lettres, $k \geq 2$, et $w \in \mathcal{A}^\omega$ contenant au moins 2 lettres différentes, disons a et b. Alors $\lim_{i \to \infty} \mathrm{IPal}^i(w)$ tend vers un mot infini point fixe sous l'opérateur IPal, noté $s_{n,a,b}$, qui ne dépend que du préfixe $a^n b$ de w, avec $n \geq 1$. L'alphabet du point fixe est $\{a, b\}$.

$$\begin{aligned} s_{1,a,b} &= abaabaababaabaabaababaabaabaababaabaa\cdots \\ s_{2,a,b} &= aabaaabaaabaaabaabaaabaaabaaabaaabaab\cdots \end{aligned}$$

Existence (2/2)

Idée de la preuve

Posons $w = a^n bq$.
Considérons $u_1 = a^n b$, $u_2 = \mathrm{Pal}(a^n b) = a^n ba^n$, $u_k = \mathrm{Pal}(u_{k-1})$.
u_{k-1} est préfixe propre de $u_k \implies (u_k)_{k \geq 1}$ converge vers une suite $s_{n,a,b}$.
u_1 est préfixe propre de $w = \mathrm{IPal}^0(w)$, ... u_k est préfixe propre de $\mathrm{IPal}^{k-1}(w)$. Donc $\mathrm{IPal}^k(w)$ converge aussi vers $s_{n,a,b}$.

Exemple

Prenons $w = abcq$, avec $a, b, c \in \mathcal{A}$ et $q \in \mathcal{A}^\omega$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{IPal}(w) &= \underline{ab}a \cdot \underline{c}aba \cdots \\
\mathrm{IPal}^2(w) &= \underline{ab}a\underline{a}ba \cdot \underline{c}abaaba \cdots \\
\mathrm{IPal}^3(w) &= \underline{ab}a\underline{a}ba\underline{a}ba\underline{b}aabaaba\underline{a}babaabaaba \cdot \underline{c}abaab \cdots
\end{aligned}$$

Propriétés (1/5)

Lemme [Droubay, Justin, Pirillo - 2001]

Un mot infini obtenu par l'opérateur IPal est ultimement périodique si et seulement si sa suite directrice a la forme ua^{ω}, avec $a \in \mathcal{A}$ et $u \in \mathcal{A}^*$.

Proposition

Les suites $s_{n,a,b}$ ne sont pas ultimement périodiques et par conséquent, sont des suites sturmiennes standards.

Propriétés (2/5)

Lemme [Arnoux, Rauzy - 1991]

Soit $w = a^{d_1} b^{d_2} a^{d_3} b^{d_4} \cdots$ la suite directrice d'une suite sturmienne standard s, avec $d_i \geq 1$. Alors la pente de s a le développement en fractions continues suivant :

$$[0; d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots].$$

Lemme [Lothaire - 2002]

Une suite sturmienne standard de pente α est point fixe d'un morphisme non trivial si et seulement si la décomposition en fractions continues de α est de l'une des formes suivantes :

1. $\alpha = [0; 1, a_0, \overline{a_1, \ldots, a_k}]$, avec $a_k \geq a_0$;
2. $\alpha = [0; 1 + a_0, \overline{a_1, \ldots, a_k}]$, avec $a_k \geq a_0 \geq 1$.

Propriétés (3/5)

Proposition

$s_{n,a,b}$ n'est pas point fixe de morphisme.

Idée de la preuve

Posons $\alpha_{n,a,b}$ la pente du point fixe $s_{n,a,b} = a^n ba^n ba^{d_2} ba^{d_3} \cdots$. Alors $\alpha_{n,a,b} = [0; n, 1, n, 1, d_2, 1, \ldots]$ et n'admet pas de période, puisque sinon, $s_{n,a,b}$ serait ultimement périodique.

Proposition

Le développement en fractions continues de $\alpha_{n,a,b}$ est à coefficients bornés.

Preuve

Il suffit de remarquer que les *longueurs des blocs de lettres* sont $1, n$ et $n+1$.

Propriétés (4/5)

Lemme [Vandeth - 2000]

Une suite sturmienne standard de pente α ne contient pas de puissance $k \in \mathbb{N}$ si et seulement si le développement en fractions continues de α est à coefficients bornés.

Plus précisément, si le développement est à coefficients bornés, alors la suite sturmienne associée contient des puissances $(k-1)$-ième, où $k = 3 + \max_{i \geq 0} d_i$.

Proposition

$s_{n,a,b}$ ne contient pas de puissance $(n+4)$-ième, mais contient des puissances $(n+3)$-ième.

Propriétés (5/5)

Définitions

L'*indice* d'un mot fini u dans un mot infini w est défini par $\mathrm{index}_u(w) = \max\{q \in \mathbb{Q} | u^q \in F(w)\}$, s'il existe.

L'*exposant critique*, noté $E(w)$, est

$$E(w) = \sup\{\mathrm{index}_u(w) | u \in F(w) \setminus \varepsilon\}.$$

Exemple

Soit le mot $w = 311211213213$. Les mots d'index > 1 sont : $\mathrm{index}(1) = 2$, $\mathrm{index}(112) = 7/3$, $\mathrm{index}(121) = 2$, $\mathrm{index}(213) = 2$. Ainsi, $E(w) = 7/3$.

Lemme [Damanik, Lenz - 2002]

Une suite sturmienne a un exposant critique si et seulement si le développement en fractions continues de sa pente est à coefficients bornés.

Proposition

L'exposant critique de $s_{n,a,b}$ existe.

Pseudopalindrome

Un *antimorphisme* de $\mathcal{A}^*$ est une fonction $\theta : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ telle que pour $u, v \in \mathcal{A}^*$, $\theta(uv) = \theta(v)\theta(u)$.
Si $\theta^2 = \mathrm{id}$, alors on dit qu'il est *involutif*.

θ-palindrome

Pour un antimorphisme involutif θ fixé, on dit que $w \in \mathcal{A}^*$ est un *θ-palindrome (pseudopalindrome)* si $\theta(w) = w$.

Dans ce qui suit, $R : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ est l'antimorphisme involutif défini par $R(w) = \widetilde{w}$.

Exemple

Posons $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ et considérons l'antimorphisme R. Alors $p = 12321$ est un R-palindrome. En effet, $R(12321) = 12321$.

Construction d'antimorphismes involutifs

Lemme [de Luca, De Luca - 2006]

Soit τ, une permutation involutive de l'alphabet $\mathcal{A}$. Alors la fonction $\theta = \tau \circ R = R \circ \tau$ est l'unique antimorphisme involutif de $\mathcal{A}^*$ qui étend la permutation τ. Ainsi,

$$\theta(w) = \tau(w[n])\tau(w[n-1]) \cdots \tau(w[0]).$$

Tout antimorphisme involutif se construit de cette façon.
Ainsi, le nombre d'antimorphismes involutifs sur un alphabet à k lettres est égal au nombre de permutations involutives sur k éléments, bien connus comme étant

$$k! \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{1}{2^i (n-2i)! i!}$$

$1, 2, 4, 10, 26, 76, \ldots$

Fermeture pseudopalindromique

La *fermeture θ-palindromique* (*pseudopalindromique*) d'un mot $w \in \mathcal{A}^+$, noté $w^{\oplus}$, est le plus court pseudopalindrome ayant w comme préfixe.

Exemple

Soit l'antimorphisme θ tel que $\tau(1) = 3$, $\tau(2) = 4$, $\tau(3) = 1$ et $\tau(4) = 2$, et soit $w = 123124$. Alors

$$w^{\oplus} = 1231 \cdot 24 \cdot \theta(1231) = 1231 \cdot 24 \cdot 3143.$$

Mot pseudostandard

La *fermeture pseudopalindromique itérative*, notée Pal_θ, est naturellement définie par $\mathrm{Pal}_\theta(\varepsilon) = \varepsilon$, et pour $w \in \mathcal{A}^*$,

$$\mathrm{Pal}_\theta(w) = (\mathrm{Pal}_\theta(w[0, n-1])w[n])^\oplus.$$

Et $\mathrm{IPal}_\theta = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Pal}_\theta(w[0, n])$.

Fixons $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ et posons $\tau(a) = c$, $\tau(b) = b$ et $\tau(c) = a$. Soit $w = abcabab\cdots$. Alors, le *mot pseudostandard* t défini par la suite directrice $\Delta(t) = w$ est

$$t = \underline{a}c\underline{b}ac\underline{c}aabac\underline{a}cbccaacbac\cdots$$

Existence de points fixes

Théorème

Sur un alphabet à k lettres, avec $k \geq 2$, il existe 3 sortes de points fixes, déterminés par la première lettre du mot et par l'antimorphisme involutif considéré, à permutation des lettres près :

1. Si le préfixe est $a^n b$, avec $\tau(a) = a$, $\tau(b) = b$, alors on obtient $s_{n,a,b} = s_{R,n,a,b}$.
2. Si le préfixe est $a^n b$ avec $\tau(a) = a$, $\tau(b) = c$, $\tau(c) = b$, alors on obtient

$$s_{H,n,a,b,c} = \underline{a}^n \underline{b} c a^n \underline{c} b a^n b c a^n \underline{a} b c a^n c b a^n b c a^n \cdots$$

3. Si la première lettre est a et que $\tau(a) = b$ et $\tau(b) = a$, alors on obtient

$$s_{E,n,a,b} = \underline{a} b \underline{b} a a b \underline{b} a a b \underline{a} b b a a b b a a b \underline{a} \cdots$$

Remarque : la dernière forme ne peut pas commencer par a^2, comme a^2 n'est pas préfixe de $\mathrm{Pal}_\theta(a^2) = abab$

Propriété utile

Théorème [De Luca, de Luca - 2006]

Pour tout $u \in \mathcal{A}^\omega$,

$$\mathrm{IPal}_\theta(u) = \mu_\theta(\mathrm{IPal}(u)),$$

avec $\mu_\theta(a) = a$ si $\tau(a) = a$ et $\mu_\theta(a) = a\tau(a)$ sinon.

1. Pour s_R, on a $s_R = \mathrm{IPal}_R(s_R) = \mu_R(\mathrm{IPal}(s_R)) = \mathrm{IPal}(s_R)$: trivial.
2. Pour s_H, on pose $w_H = \mathrm{IPal}(s_H)$ et $s_H = \mu_H(w_H)$.
3. Pour s_E, on pose $w_E = \mathrm{IPal}(s_E)$ et $s_E = \mu_E(w_E)$.

Étude de w_E

s_E n'est pas une suite sturmienne, mais w_E l'est.

$$\begin{aligned} s_E &= \underbrace{ab}_{a}\underbrace{ba}_{b}\underbrace{ab}_{a}\underbrace{ba}_{b}\underbrace{ab}_{a}\underbrace{ab}_{a}\underbrace{ba}_{b}abbaaba\cdots \\ w_E &= \underline{ab}a\underline{b}a\underline{a}baba\underline{a}baba\cdots \end{aligned}$$

<u>Idée</u> : étudier les propriétés de w_E et tenter d'en conclure quelque chose pour s_E.

Propriétés de w_E

1. w_E n'est pas ultimement périodique, et conséquemment, est une suite sturmienne.
2. w_E n'est pas point fixe d'un morphisme.
3. w_E contient des puissances 4-ième, mais pas 5-ième ; il a un exposant critique.

Étude de s_E (1/2)

Propriétés de s_E

1. s_E n'est pas ultimement périodique, mais n'est pas une suite sturmienne. C'est un mot pseudostandard.
2. s_E n'est pas point fixe de morphisme (*).
3. Les longueurs des blocs de lettres de s_E sont 1 et 2.
4. s_E contient des puissances 4-ième, mais pas 5-ième. Il a un exposant critique.
5. La fréquence des lettres dans s_E est $1/2$ (*).

Étude de s_E (2/2)

Idée de la preuve de la non existence de puissance 5-ième

- Supposons qu'il existe un facteur f de s_E tel que f^5 est aussi facteur.
- Comme $s_E = \mu_E(w_E)$, $s_E \in \{ab, ba\}^\omega$, un code bipréfixe.
- Supposons $f[0] = a$.
  1. Si $|f|$ est paire et $f[1] = b$, alors $f^5 \in \{ab, ba\}^*$ (ou $a^{-1}f^5a$) et donc, $\mu_E^{-1}(f^5)$ est facteur de w_E.
  2. Si $|f|$ est paire et $f[1] = a$, alors $a^{-1}f^5a \in \{ab, ba\}^*$.
  3. Si $|f|$ est impaire et $f[1] = a$, alors $f = au$, avec $u \in \{ab, ba\}^*$. Mais comme f est suivi de f, la deuxième occurrence de f est telle que $f\alpha^{-1} \in \{ab, ba\}^*$. Impossible, comme aa est préfixe de f.
  4. Similaire.

Étude de s_H (1/3)

$$\begin{aligned} s_H &= a^n bca^n cba^n bc \cdots \\ w_H &= \mathrm{IPal}(s_H) = \mathrm{IPal}(a^n bca^n cba^n bc \cdots) \\ &= a^n ba^n ca^n ba^n aba^n ca^n ba^n \cdots \end{aligned}$$

Non périodicité s_H

w_H est une suite épisturmienne standard stricte non ultimement périodique.

$\Longrightarrow$ s_H est non ultimement périodique.

Lemme [Justin, Pirillo - 2002]

Une suite épisturmienne standard stricte est un point fixe de morphisme non trivial si et seulement si sa suite directrice est périodique.

w_H n'est pas point fixe de morphisme

Étude de s_H (2/3)

Lemme [Justin - 2005]

Soit $w \in \mathcal{A}^*$ et $a \in \mathcal{A}$. Si $|w|_a = 0$, alors $\mathrm{Pal}(wa) = \mathrm{Pal}(w)a\mathrm{Pal}(w)$. Sinon, on écrit $w = w_1aw_2$, avec $|w_2|_a = 0$ et alors, $\mathrm{Pal}(wa) = \mathrm{Pal}(w)\mathrm{Pal}^{-1}(w_1)\mathrm{Pal}(w)$.

Puissances

w_H contient des puissances $(n+2)$ (prouvé)
w_H ne contient pas de puissances $(n+3)$ (conjecture)

Idée de la preuve

- $w_H = \mathrm{IPal}(s_H)$ et $s_H = a^nbca^ncba^nbca^na\cdots$
- w_H a le préfixe $\mathrm{Pal}(ua^{n+1})$, $u = a^nbca^ncba^nbc$.
- En faisant une récurrence et en utilisant le lemme de Justin, on obtient que $\mathrm{Pal}(ua^{n+1}) = \mathrm{Pal}(u)(\mathrm{Pal}(u_1)^{-1}\mathrm{Pal}(u))^{n+2}$.
- Comme $u_1 \neq u$, $\mathrm{Pal}(u_1)^{-1}\mathrm{Pal}(u)$ est un facteur qui apparaît avec une puissance $(n+2)$.

Étude de s_H (3/3)

Propriétés de s_H

1. s_H n'est pas point fixe de morphisme.
2. s_H contient des puissances $(n+2)$
3. Les fréquences des lettres b et c sont égales dans s_H (comme $s_H = \mu_H(w_H)$ et $\mu_H(b) = bc$, $\mu_H(c) = cb$ et $\mu_H(a) = a$).

Conjecture

s_H ne contient pas de puissance $(n+3)$-ième.

Problèmes ouverts

- Prouver la non occurrence de puissance $(n+3)$-ième dans w_H et s_H.
- Pour tous les mots, en savoir plus sur l'exposant critique : sa valeur exacte, les occurrences (nombre, position), etc.
- Existe-t'il un lien entre les $s_{R,n,a,b}$ et $s_{R,n+1,a,b}$? $s_{H,n,a,b,c}$ et $s_{H,n+1,a,b,c}$?
- Les pentes des $s_{R,n,a,b}$ sont-elles algébriques ?
- Peut-on donner une interprétation géométrique à la fermeture palindromique (pseudopalindromique) itérative ?
- Quels sont les fréquences des lettres ? Les fréquences de b et c dans s_H sont-elles les mêmes pour tout n ? De quelle façon varient-elles ?
- Autres propriétés combinatoires ?
- Qu'ont-ils de remarquables ?
- Étudier les points fixes de suites pseudostandards généralisées (avec une graine, ou à deux suites directrices).