

## La programmation linéaire : une introduction

- Qu'est-ce qu'un programme linéaire ?
- Exemples :
  - ▶ allocation de ressources
  - ▶ problème de recouvrement
- Hypothèses de la programmation linéaire
- Intérêt pratique de la programmation linéaire ?
- Interprétation géométrique et résolution graphique
- Résultat d'une optimisation linéaire

## Qu'est-ce qu'un programme linéaire ?

Un **programme linéaire** (PL) est un problème d'optimisation consistant à maximiser (ou minimiser) une **fonction objectif linéaire** de  $n$  variables de **décision** soumises à un ensemble de **contraintes** exprimées sous forme d'**équations** ou d'**inéquations linéaires**.

À l'origine, le terme **programme** a le sens de planification opérationnelle mais il est aujourd'hui employé comme synonyme de problème (d'optimisation).

La terminologie est due à **G. B. Dantzig**, inventeur de l'**algorithme du simplexe** (1947).

## Écriture mathématique

$$\begin{aligned} \text{Max (Min)} \quad z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c.} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i \in I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j &\geq b_k \quad k \in K \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \sum_{j=1}^n a_{rj} x_j &= b_r \quad r \in R \subseteq \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Les ensembles  $I, K$ , et  $R$  sont disjoints et  $I \cup K \cup R = \{1, \dots, m\}$ .

L'abréviation **s.c.** signifie «sous les contraintes».

## Terminologie

- Les variables  $x_1, \dots, x_n$  sont appelées **variables de décision** du problème.
- La fonction linéaire à optimiser est appelée **fonction objectif** (ou parfois **fonction objet**).
- Les **contraintes** prennent la forme d'équations et d'inéquations linéaires.
- Les contraintes de la forme

$$l_j \leq x_j \leq u_j \quad l_j, u_j \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

sont appelées des **contraintes de bornes**. Elles se résument souvent à des **contraintes de non-négativité**  $x_i \geq 0$ . Elles sont généralement traitées de manière spéciale par les algorithmes de résolution.

## Exemple : problème d'allocation de ressources

Une entreprise produit des câbles de cuivre de 5 et 10 mm de diamètre sur une seule ligne de production imposant les contraintes suivantes.

- Le cuivre disponible permet de produire 21 000 mètres de câble de 5 mm de diamètre par semaine.
- Un mètre de câble de 10 mm de diamètre nécessite 4 fois plus de cuivre qu'un mètre de câble de 5 mm de diamètre.

De plus, ayant une bonne connaissance de la demande, la production hebdomadaire de câble de 5 mm est limitée à 15 000 mètres et la production de câble de 10 mm ne doit pas dépasser les 40% de la production totale.

Les câbles sont vendus respectivement 50 frs et 200 frs le mètre.

Il ne faut pas dépasser les capacités de production

$$x_1 + 4x_2 \leq 21$$

et satisfaire les contraintes de demande

$$x_2 \leq \frac{4}{10}(x_1 + x_2)$$

$$x_1 \leq 15$$

Finalement on ne peut pas produire des quantités négatives

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

## Que doit produire l'entreprise afin de maximiser son chiffre d'affaires hebdomadaire ?

Définissons deux **variables de décision**

$x_1$  : le nombre de milliers de mètres de câble de 5 mm de diamètre produits chaque semaine,

$x_2$  : le nombre de milliers de mètres de câble de 10 mm de diamètre produits chaque semaine.

Le chiffre d'affaires associé à une production  $(x_1, x_2)$  est

$$z = 50\,000x_1 + 200\,000x_2.$$

## Problème d'allocation de ressources : modèle

Pour maximiser le chiffre d'affaires de la vente, il faut déterminer les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  solution du programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \text{Max } z = & 50\,000x_1 + 200\,000x_2 \\ \text{s.c.} & x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ & -4x_1 + 6x_2 \leq 0 \\ & x_1 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

## Exemple : problème de recouvrement

**Données :** Les demandes journalières en chauffeurs dans une entreprise de transport

Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
13	18	21	16	12	25	9

Les chauffeurs travaillent cinq jours d'affilée (et peuvent donc avoir leurs deux jours adjacents de congé n'importe quand dans la semaine).<sup>1</sup>

**Objectifs :** Déterminer les effectifs formant les sept équipes possibles de chauffeurs de manière à

- couvrir tous les besoins,
- engager un nombre minimum de chauffeurs.<sup>1</sup>

## Problème de recouvrement : modélisation

**Variables de décision :** On associe une variable de décision à chacune des sept équipes possibles

$x_1$  : nombre de chauffeurs dans l'équipe du lundi (repos le samedi et le dimanche),

$x_2$  : nombre de chauffeurs dans l'équipe du mardi,

...

$x_7$  : nombre de chauffeurs dans l'équipe du dimanche.<sup>1</sup>

**Fonction objectif :** On veut minimiser le nombre total de chauffeurs engagés

$$z = x_1 + \dots + x_7$$

**Contraintes :** Le nombre de chauffeurs présents chaque jour doit être suffisant

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 && \text{(lundi)} \\ x_1 + x_2 &+ x_5 + x_6 + x_7 \geq 18 && \text{(mardi)} \\ &\dots && \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq 9 && \text{(dimanche)} \end{aligned}$$

**Contraintes de bornes :** Le nombre de chauffeurs dans chaque équipe doit non seulement être non négatif mais également entier !

$$x_i \geq 0 \text{ et entier, } i = 1, \dots, 7.$$

## Problème de recouvrement : formulation

$$\begin{aligned} \text{Min } z = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\ \text{s.c. } & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\ & x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 18 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 21 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 16 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 12 \\ & x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 25 \\ & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \text{ entiers} \end{aligned}$$

Ce problème n'est pas un PL mais un **programme linéaire en nombres entiers** (PLNE) !

## Les hypothèses de la programmation linéaire

1. La **linéarité** des contraintes et de la fonction objectif.
  - L'**additivité** des effets.
  - La **proportionnalité** des gains/coûts et des consommations de ressources.
2. La **divisibilité** des variables.
3. La **détermination** des données.

Lors de la modélisation d'un problème réel, l'impact de ces hypothèses sur la validité du modèle mathématique doit être étudié. Cette analyse peut mener à choisir un modèle différent (non linéaire, stochastique, ...) et est essentielle pour la phase d'interprétation des résultats fournis par le modèle.

## Intérêt pratique de la programmation linéaire

1. Malgré les hypothèses sous-jacentes assez restrictives, de nombreux problèmes peuvent être modélisés par des programmes linéaires. Ces problèmes apparaissent dans des domaines aussi variés que
  - la gestion de production,
  - l'économie,
  - la distributique,
  - les télécommunications,
  - ...
2. Il existe des algorithmes généraux (et des codes les mettant en œuvre) permettant de résoudre efficacement des programmes linéaires (même lorsque le nombre de variables et de contraintes est important).

## Interprétation géométrique

- L'ensemble des solutions d'une inéquation (linéaire) correspond à un **demi-espace** dans  $\mathbb{R}^n$  (un demi-plan dans  $\mathbb{R}^2$ ).<sup>1</sup>
- L'ensemble des solutions d'une équation (linéaire) correspond à un **hyperplan** dans  $\mathbb{R}^n$  (une droite dans  $\mathbb{R}^2$ ).<sup>1</sup>
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations et d'inéquations (linéaires) correspond à l'**intersection** des demi-espaces et des hyperplans associés à chaque élément du système.<sup>1</sup>
- Cette intersection, appelée **domaine admissible**, est **convexe** et définit un **polyèdre** dans  $\mathbb{R}^n$  (une région polygonale dans  $\mathbb{R}^2$ ).<sup>1</sup>

## Terminologie

- Une **solution** est une affectation de valeurs aux variables du problème.
- Une solution est **admissible** si elle satisfait toutes les contraintes du problème (y compris les contraintes de bornes).<sup>1</sup>
- La **valeur** d'une solution est la valeur de la fonction objectif en cette solution.<sup>1</sup>
- Le **domaine admissible**  $D$  d'un PL est l'ensemble des solutions admissibles du problème.<sup>1</sup>
- La **solution optimale d'un PL** (si elle existe) est formée des valeurs optimales des variables du problème **et** de la valeur associée de la fonction objectif.<sup>1</sup>

## Résolution graphique dans le plan

- Les **lignes de niveau** de la fonction objectif sont des **droites parallèles** dans  $\mathbb{R}^2$ .
- Il existe des solutions admissibles de valeur  $z$  si la ligne de niveau associée à cette valeur intersecte le domaine admissible  $D$  du problème.
- Pour déterminer la valeur maximale atteignable par une solution admissible, il suffit de faire glisser le plus loin possible une ligne de niveau de la fonction objectif, dans le sens du gradient, jusqu'à ce qu'elle touche encore tout juste  $D$ .
- Les **points de contact** ainsi obtenus correspondent aux solutions optimales du PL.

## Objectifs

- Connaître les différents éléments d'un PL : variables de décision, d'écart, fonction objectif, contraintes, contraintes de bornes.
- Être capable de modéliser de petits problèmes : identifier les variables du problème, écrire la fonction objectif et les contraintes, discuter les hypothèses de la PL.
- Être capable de résoudre graphiquement un PL à 2 variables de décision : déterminer le domaine admissible et les lignes de niveau de la fonction objectif, identifier la solution optimale.

## Résultat d'une optimisation linéaire

Le domaine admissible d'un PL peut être

- **vide**. Dans un tel cas le problème est **sans solution admissible** (et ne possède évidemment pas de solution optimale).
- **borné** (et non vide). Le problème possède toujours au moins une solution optimale, quelle que soit la fonction objectif.
- **non borné**. Dans ce cas, selon la fonction objectif choisie,
  - ▶ le problème peut posséder des solutions optimales ;
  - ▶ il peut exister des solutions admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite). Dans un tel cas le PL n'admet pas de solution optimale finie et est dit **non borné**.

## Les différentes formes d'un programme linéaire

- Formes canonique et standard
- Notations matricielles
- Pourquoi des formes particulières ?
- Équivalence des formulations canonique et standard
- Règles de transformation particulières
- Exemple : approximation de Chebychev

## Forme générale d'un programme linéaire

$$\begin{aligned} \text{Opt } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i & i \in I \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j &\geq b_k & k \in K \subseteq \{1, \dots, m\} \\ \sum_{j=1}^n a_{rj} x_j &= b_r & r \in R \subseteq \{1, \dots, m\} \\ l_j &\leq x_j \leq u_j & j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Opt = Max ou Min,
- $I, K$  et  $R$  disjoints et  $I \cup K \cup R = \{1, \dots, m\}$ ,
- $l_j = -\infty$  et  $u_j = +\infty$  possibles.

## Forme canonique d'un programme linéaire

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i & i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Problème de **maximisation**
- Toutes les contraintes sont du type " $\leq$ "
- Toutes les variables sont **non négatives**

## Forme standard d'un programme linéaire

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= b_i & i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

- Problème de **maximisation**
- Toutes les contraintes sont des **équations**
- Toutes les variables sont **non négatives**

## Forme canonique $\rightarrow$ forme standard

On passe de la forme canonique à la forme standard en ajoutant dans chaque contrainte  $i$  une **variable d'écart**  $x_{n+i}$ .

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_j \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m 0x_{n+i} \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} &= b_i & i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & j = 1, \dots, n + m \end{aligned}$$

## Pourquoi des formes particulières ?

- Vérifier les prérequis des méthodes de résolution.
- Simplifier la présentation des algorithmes.

Cependant...

**Les définitions des formes canonique et standard varient parfois d'un auteur à l'autre !**

Dans ce cours, la forme de référence sera la forme canonique présentée ci-dessus, dont les variables seront appelées les **variables de décision** du problème et la forme standard sera toujours obtenue par l'ajout de **variables d'écart** au problème canonique.

## Notation matricielle : forme canonique

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s.c. } \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Max } z = \mathbf{c}_D\mathbf{x}_D \\ \text{s.c. } \mathbf{A}\mathbf{x}_D \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_D \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

où

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_D = (c_1 \dots c_n), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_D = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

## Notation matricielle : forme standard

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s.c. } [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{Max } z = \mathbf{c}_D\mathbf{x}_D + \mathbf{0}\mathbf{x}_E \\ \text{s.c. } \mathbf{A}\mathbf{x}_D + \mathbf{I}\mathbf{x}_E = \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_D, \mathbf{x}_E \geq \mathbf{0} \end{array} \right.$$

où

$$\mathbf{c} = (\mathbf{c}_D \mid \mathbf{c}_E) = (\mathbf{c}_D \mid \mathbf{0}) = (c_1 \dots c_n \mid 0 \dots 0)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_D \\ - \\ \mathbf{x}_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ - \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

## Notation matricielle : exemple

Pour le problème d'allocation de ressources

$$\begin{array}{l} \text{Max } z = 50\,000x_1 + 200\,000x_2 \\ \text{s.c. } \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \end{array}$$

on a

$$\mathbf{c} = (50\,000 \quad 200\,000), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

## Remarques sur les notations

- Les symboles en gras ( $\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{0}, \dots$ ) sont réservés pour les matrices (majuscules) et les vecteurs (minuscules).
- Les vecteurs doivent être interprétés comme des vecteurs-colonnes ou des vecteurs-lignes selon le contexte (pas ou peu de signes transposés).

$\mathbf{Ax} : \mathbf{x}$  vecteur-colonne       $\mathbf{yA} : \mathbf{y}$  vecteur-ligne

$\mathbf{xy} : \text{produit scalaire}$

- Les inégalités entre vecteurs (matrices) doivent être comprises composantes par composantes :

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \iff x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

Mais  $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{0} \iff \exists i \text{ t.q. } x_i < 0.$

## Règles de transformation

- Minimisation  $\leftrightarrow$  maximisation :  $\min f(\mathbf{x}) = -\max(-f(\mathbf{x}))$

Pour minimiser  $z = \mathbf{cx}$ , il suffit de maximiser  $w = -\mathbf{cx} = (-\mathbf{c})\mathbf{x}$  et de multiplier la valeur optimale de  $w$  par  $-1$  pour obtenir celle de  $z$ .

- Inéquation " $\geq$ "  $\leftrightarrow$  inéquation " $\leq$ " :

$$\mathbf{ax} \geq b \iff (-\mathbf{a})\mathbf{x} \leq -b$$

- Équation  $\rightarrow$  inéquation " $\leq$ " :

$$\mathbf{ax} = b \iff \begin{cases} \mathbf{ax} \leq b \\ \mathbf{ax} \geq b \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{ax} \leq b \\ (-\mathbf{a})\mathbf{x} \leq -b \end{cases}$$

## Équivalence des formulations canonique et standard

**Théorème 1.** Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transformé en un PL sous forme canonique équivalent.

**Théorème 2.** Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transformé en un PL sous forme standard équivalent.

Par programme équivalent, on entend :

- toute solution admissible (optimale) du problème équivalent correspond à une solution admissible (optimale) du problème initial ;
- toute solution admissible (optimale) du problème initial correspond à au moins une solution admissible (optimale) du problème équivalent ;
- l'issue de l'optimisation des deux problèmes est la même (sans solution admissible, optimum fini, problème non borné).

## Règles de transformation (suite)

- Inéquation  $\rightarrow$  équation : On ajoute une variable d'écart (de surplus)

$$\begin{aligned} \mathbf{ax} \leq b &\iff \mathbf{ax} + s = b, s \geq 0 \\ \mathbf{ax} \geq b &\iff \mathbf{ax} - s = b, s \geq 0 \end{aligned}$$

- Variable libre (réelle)  $\rightarrow$  variable non négative : Tout nombre réel peut être écrit comme la différence de deux nombres non négatifs.

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

- Variable bornée inférieurement :

$$x \geq b \iff \begin{cases} x = x' + b \\ x' \geq 0 \end{cases}$$

## Exemple de mise sous forme canonique

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= -3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c. } \quad x_1 + x_2 &= 6 \\ \quad x_1 - 2x_2 &\geq 4 \\ \quad x_1 &\in \mathbb{R} \\ \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PL initial

$$\begin{aligned} \text{Min } z = -3x_1 + 4x_2 &\rightarrow \text{Max } w = 3x_1 - 4x_2 \\ x_1 + x_2 = 6 &\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 - x_2 \leq -6 \end{cases} \\ x_1 - 2x_2 \geq 4 &\rightarrow -x_1 + 2x_2 \leq -4 \\ x_1 \in \mathbb{R} &\rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1^+ - x_1^- \\ x_1^+, x_1^- \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Modifications

PL initial

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= -3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.c. } \quad x_1 + x_2 &= 6 \\ \quad x_1 - 2x_2 &\geq 4 \\ \quad x_1 &\in \mathbb{R} \\ \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PL canonique équivalent

$$\begin{aligned} \text{Max } w &= 3x_1^+ - 3x_1^- - 4x_2 \\ \text{s.c. } \quad x_1^+ - x_1^- + x_2 &\leq 6 \\ \quad -x_1^+ + x_1^- - x_2 &\leq -6 \\ \quad -x_1^+ + x_1^- + 2x_2 &\leq -4 \\ \quad x_1^+, x_1^-, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ne pas oublier que  $z_{opt} = -w_{opt} !!$

## Règles de transformation particulières

- Problème Min-Max ou Max-Min :

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= t \\ \text{s.c. } \quad t &\geq c_1x \\ &\dots \\ t &\geq c_kx \\ t &\in \mathbb{R} \end{aligned} \iff \text{Min } z = \max\{c_1x, \dots, c_kx\}$$

- Valeurs absolues :  $|x| \leq b \iff \begin{cases} x \leq b \\ x \geq -b \end{cases}$

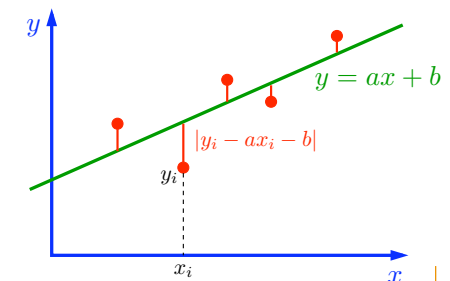


## Exemple : approximation de Chebychev

Données :  $m$  mesures

$$(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \dots, m$$

Objectif : Déterminer une approximation linéaire  $y = ax + b$  minimisant la plus grande erreur d'estimation.



Formulation :

$$\text{Min } z = \max_{i=1, \dots, m} \{ |y_i - ax_i - b| \}$$

Les variables de décision de ce problème sont  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $b \in \mathbb{R} !!$

On peut récrire le problème comme

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = \max_{i=1, \dots, m} \{\Delta_i\} \\ \text{s.c.} & \Delta_i = |y_i - \mathbf{a}\mathbf{x}_i - b| \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = t \\ \text{s.c.} & t \geq |y_i - \mathbf{a}\mathbf{x}_i - b| \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

pour finalement obtenir une formulation linéaire

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = t \\ \text{s.c.} & t \geq y_i - \mathbf{a}\mathbf{x}_i - b \quad i = 1, \dots, m \\ & t \geq -y_i + \mathbf{a}\mathbf{x}_i + b \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

avec  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $t \geq 0$ .

## Objectifs

- Connaître les définitions des formes canonique et standard d'un PL.
- Maîtriser les règles de transformations permettant de passer d'une formulation à une autre équivalente.
- Pouvoir transformer une formulation non linéaire d'un problème d'optimisation en un programme linéaire (lorsque c'est possible évidemment).