Introduction à la logique

L3, année 2005/2006

Partiel

À faire au calme, par groupe de deux au plus

(à rendre pour le mardi 22 novembre)

Pierre Hyvernat
Institut mathématique de Luminy, bureau 230
téléphone : 04 91 26 96 59
email : `hyvernat@iml.univ-mrs.fr`
`http://iml.univ-mrs.fr/~hyvernat/enseignement.html`

Exercice 1 : prouvez la formule suivante en déduction naturelle : « $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ ». Peut-on prouver la direction $\leftarrow$ sans le raisonnement par l'absurde ? Et pour la direction $\to$? Que pouvez-vous en déduire sur le symbole « $\to$ » ?

> *Remarque :* faites des preuves n'utilisant que les règles de la déduction naturelle (pas de règles dérivées).

Exercice 2 : pour un langage où R est un symbole de relation unaire, pouvez-vous prouver les formules suivantes :
- $(\exists x)(\forall y)\ \big(R(x) \to R(y)\big)$;
- $(\exists x)(\forall y)\ \big(R(y) \to R(x)\big)$.

Exercice 3 : si P, R, S et T sont des symboles de relation d'arités respective 1, 1, 1 et 2, prouvez le séquent $F_1, F_2 \ \vdash\ F$ où :
- $F_1 \equiv (\exists x)(\forall y)\ \big[P(x) \wedge \big(R(y) \to T(x,y)\big)\big]$
- $F_2 \equiv (\forall x)(\forall y)\ \big(\neg P(x) \vee \neg S(y) \vee \neg T(x,y)\big)$
- $F \equiv (\forall x)\ \big(\neg R(x) \vee \neg S(x)\big)$

Exercice 4 : si f et g sont des symboles de fonction unaire, on note Inj_f la formule affirmant que f est une injection : $\mathsf{Inj}_f \equiv (\forall x)(\forall y)\ f(x) = f(y) \to x = y$. On note de manière similaire Inj_g pour la formule affirmant que g est une injection etc.
La composition des fonction f et g, noté $f \circ g$ est définie par $f \circ g(x) := f(g(x))$.

Question 1 : donner les formules Sur_f et Sur_g précisant que f et g sont des *surjections* ainsi que les formules Bij_j et Bij_g précisant que f et g sont des *bijections*.

Question 2 : démontrez les séquents suivants
- $\mathsf{Inj}_f, \mathsf{Inj}_g \ \vdash\ \mathsf{Inj}_{f\circ g}$ (la composition de deux injections est une injection)
- $\mathsf{Sur}_f, \mathsf{Sur}_g \ \vdash\ \mathsf{Sur}_{f\circ g}$ (la composition de deux surjections est une surjection)
- $\mathsf{Bij}_f, \mathsf{Bij}_g \ \vdash\ \mathsf{Bij}_{f\circ g}$ (la composition de deux bijections est une bijection)
- $\mathsf{Inj}_{f\circ g} \ \vdash\ \mathsf{Inj}_g$ (si $f \circ g$ est injective, alors g est injective)
- $\mathsf{Inj}_{f\circ g}, \mathsf{Sur}_g \ \vdash\ \mathsf{Inj}_f$ (si $f \circ g$ est injective et si g est surjective, alors f est injective)

Question 3 : montrez que l'hypothèse Sur_g dans le dernier cas est nécessaire. Autrement dit, trouver un ensemble X et deux fonctions $f, g : X \to X$ satisfaisant :
- $f \circ g$ est injective ;
- f n'est pas injective.

Exercice 5 : est-ce que la preuve suivante est correcte ? Si non, corrigez-la...

$\vdash\ (\exists x)(\forall y)\ \big((R(y) \to R(x)) \to R(x)\big) \to R(y)$ . . . . $\vee$-elim

(1.) $\vdash\ (\forall x)\, R(x)\ \vee\ \neg(\forall x)\, R(x)$ . . . . tiers-exclu, cf TD 3

(2.) $(\forall x)\, R(x)\ \vdash\ (\exists x)(\forall y)\ \big((R(y) \to R(x)) \to R(x)\big) \to R(y)$

(3.) $\neg(\forall x)\, R(x)\ \vdash\ (\exists x)(\forall y)\ \big((R(y) \to R(x)) \to R(x)\big) \to R(y)$

(2.) $(\forall x)\, R(x)\ \vdash\ (\exists x)(\forall y)\ \big((R(y) \to R(x)) \to R(x)\big) \to R(y)$ . . $\exists$-intro pour $t := z$

$(\forall x)\, R(x)\ \vdash\ (\forall y)\ \big((R(y) \to R(z)) \to R(z)\big) \to R(y)$ . . . . $\forall$-intro

$(\forall x)\, R(x)\ \vdash\ \big((R(y) \to R(z)) \to R(z)\big) \to R(y)$ . . . . $\to$-intro

$(\forall x)\, R(x)\, ,\, (R(y) \to R(z)) \to R(z)\ \vdash\ R(y) \equiv R(x)[x := z]$ . . . . $\forall$-elim

$(\forall x)\, R(x)\, ,\, (R(y) \to R(z)) \to R(z)\ \vdash\ (\forall x)\, R(x)$ . . . . axiome

(3.) $\neg(\forall x)\, R(x)\ \vdash\ (\exists x)(\forall y)\ \big((R(y) \to R(x)) \to R(x)\big) \to R(y)$ de Morgan + règle dérivée

$(\exists x)\, \neg R(x)\ \vdash\ (\exists x)(\forall y)\ \big((R(y) \to R(x)) \to R(x)\big) \to R(y)$ . . . . $\exists$-elim

(3.1.) $(\exists x)\, \neg R(x)\ \vdash\ (\exists x)\, \neg R(x)$ . . . . axiome

(3.2.) $\neg R(x)\ \vdash\ (\exists x)(\forall y)\ \big((R(y) \to R(x)) \to R(x)\big) \to R(y)$ . . $\exists$-intro pour $t := x$

$\neg R(x)\ \vdash\ (\forall y)\ \big((R(y) \to R(x)) \to R(x)\big) \to R(y)$ . . . . $\forall$-intro

$\neg R(x)\ \vdash\ \big((R(y) \to R(x)) \to R(x)\big) \to R(y)$ . . . . $\to$-intro

$\neg R(x)\, ,\, (R(y) \to R(x)) \to R(x)\ \vdash\ R(y)$ . . . . $\neg$-elim

(3.2.1.) $\neg R(x)\, ,\, (R(y) \to R(x)) \to R(x)\ \vdash\ R(y) \vee \neg R(y)$ . . . . . tiers-exclu

(3.2.2.) $\neg R(x)\, ,\, (R(y) \to R(x)) \to R(x)\, ,\, R(y)\ \vdash\ R(y)$ . . . . axiome

(3.2.3.) $\neg R(x)\, ,\, (R(y) \to R(x)) \to R(x)\, ,\, \neg R(y)\ \vdash\ R(y)$ . . . . . . $\bot$-elim

$\neg R(x)\, ,\, (R(y) \to R(x)) \to R(x)\, ,\, \neg R(y)\ \vdash\ \bot$ . . . . $\neg$-elim

(3.2.3.1.) $\neg R(x)\, ,\, (R(y) \to R(x)) \to R(x)\, ,\, \neg R(y)\ \vdash\ \neg R(x)$ . . . . . axiome

(3.2.3.2.) $\neg R(x)\, ,\, (R(y) \to R(x)) \to R(x)\, ,\, \neg R(y)\ \vdash\ R(x)$ . . . . . . $\to$-elim

(3.2.3.2.1.) $(R(y) \to R(x)) \to R(x)\, ,\, \neg R(y)\ \vdash\ (R(y) \to R(x)) \to R(x)$ . . axiome

(3.2.3.2.2.) $(R(y) \to R(x)) \to R(x)\, ,\, \neg R(y)\ \vdash\ R(y) \to R(x)$ . . . . . . $\to$-elim

(3.2.3.2.2.1.) $(R(y) \to R(x)) \to R(x)\, ,\, \neg R(y), R(y) \to R(x)\ \vdash\ (R(y) \to R(x)) \to R(x)$
. . . . axiome

(3.2.3.2.2.2.) $(R(y) \to R(x)) \to R(x)\, ,\, \neg R(y), R(y) \to R(x)\ \vdash\ R(y) \to R(x)$. axiome