Université de Savoie **Année 2003/2004**

Module M4 - Travaux dirigés, feuille 1

Exercice 1 Etudier la convergence uniforme éventuelle des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(t) = t^n(1-t^2)$ sur $[0,1]$.
2. $f_n(t) = t\, e^{-nt^2}$ sur $\mathbb{R}$.
3. $f_n(t) = \dfrac{t\sqrt{n}}{1+n^2t^2}$ sur $\mathbb{R}$.
4. $f_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{1+n^2t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. $f_n(t) = e^{-nt^2}\sin nt$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

1. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$ et uniformément sur $]a,b[$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.
2. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$ et uniformément sur tout intervalle $[\alpha,b[$ avec $a<\alpha<b$. La conclusion précédente subsiste-t-elle ?

Exercice 3 Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement vers la fonction nulle et telles que :

$$\exists M\geq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \forall t\in[a,b] \quad \left|f_n'(t)\right|\leq M$$

Montrer que la convergence est uniforme.
Indication : introduire une subdivision de $[a,b]$, utiliser la convergence en chacun des points de subdivision et l'inégalité des accroissements finis ...

Exercice 4

1. Soit g une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$, et soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction bornée φ. Montrer que $(g\circ\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g\circ\varphi$.
2. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$ convergeant uniformément vers une fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Que dire de la suite de réels $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(f_n(t))\,dt$?

Exercice 5 Soit $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, non nulle, telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 0$ et $f(0)=0$. On considère les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\,,\ \forall t\in\mathbb{R}\,,\ f_n(t) = f(nt)\,,\ g_n(t) = f(\frac{t}{n})$$

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$ mais non uniformément.

2. Montrer que $(f_n\, g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers 0.

Exercice 6 (Approximation polynomiale de la racine carrée) On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définie sur $[0,1]$ par les relations : $f_0 = 0$, $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \dfrac{t - f_n^2(t)}{2}$.

1. Étudier la convergence simple, uniforme, des fonctions f_n.
   Indications : montrer que $0 \leq f_n(t) \leq \sqrt{(t)}$, *ainsi que* $0 \leq \sqrt{(t)} - f_n(t) \leq \sqrt{(t)}\left(1 - \dfrac{\sqrt{(t)}}{2}\right)^n$.

2. Que peut-on dire de la suite des fonctions g_n définies sur $[-1,1]$ par $g_n(t) = f_n(t^2)$?

Exercice 7 (Non interversion limite-intégrale) Soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

1. Chercher la limite simple, f, des fonctions f_n.

2. Vérifier que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt$. Conclusion ?

Exercice 8 (Non interversion limite-intégrale)

1. Déterminer la limite simple des fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'il y a convergence uniforme. (On admettra la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$)

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$. Conclusion ?

Exercice 9 On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^t}$ de la variable réelle t. On note Δ son domaine de convergence.

1. Montrer que $\Delta =]0,+\infty[$. Cette série est-elle normalement convergente sur Δ?

2. Pour tout $t \in \Delta$ on note $S_n(t) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p^t}$, $S(t) = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p}{p^t}$.
   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ \forall\, t \in \mathbb{R}\,,\ |S_n(t) - S(t)| < \dfrac{1}{(n+1)^t}$.

3. En déduire que pour tout $a > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^t}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

4. En déduire que S est continue sur Δ.

5. Peut-on dériver terme à terme cette série sur Δ ?

Exercice 10 On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{array}{rccl} f_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f_n(t) = \begin{cases} t^{2n}\ln t & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. Calculer $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}} S(t)$.

2. Montrer qu'il existe $M \geq 0$ tel que $\forall\, t \in [0,1]\,,\, |S(t)| \leq M$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

3. Soit $a \in]0,1[$. Pour tout $t \in [0,1]$ on note $R_n(t) = \sum_{p=n+1}^{\infty} f_p(t)$.

   Montrer que : $\forall\, t \in [0,1]\,,\, |R_n(t)| \leq t^{2n} M$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,a]$?

4. Montrer que : $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 R_n(t)\, dt = 0$. En déduire que : $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(t)\, dt.$

5. En remarquant que $\dfrac{\ln t}{1-t^2} = \dfrac{t^2 \ln t}{1-t^2} + \ln t$, montrer que $\int_0^1 \dfrac{\ln t}{1-t^2}\, dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 11 Soit $x \in]-1,1[$. On associe à x la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n \cos(n\theta)}{n}$ de la variable réelle θ.

1. Montrer que cette série de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel θ on note $f_x(\theta)$ sa somme.

2. Montrer que $f_x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer sa dérivée.

3. Montrer que pour tout réel θ : $f_x(\theta) = -\dfrac{1}{2} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$.

4. En déduire que : $\forall\, x \in]-1,1[\,,\, \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\, d\theta = 0.$

Exercice 12 Soient $a > 0$ et $\varphi \in C([-a,a], \mathbb{R})$ telle que :

$$\exists\, C \geq 0\,,\, \forall\, t \in [-a,a]\,,\, |\varphi(t)| \leq C\,|t|$$

On se propose de chercher toutes les fonctions $f \in C([-a,a], \mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et telles que :

$$\forall t \in [-a,a]\ ,\ f(t) - f\left(\frac{t}{2}\right) = \varphi(t) \qquad (1)$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi\left(\dfrac{t}{2^n}\right)$ est convergente pour tout $t \in [-a,a]$. On note $f(t)$ sa somme.

2. Montrer que $f \in C([-a,a], \mathbb{R})$, $f(0) = 0$ et f est solution de (1).

3. Montrer qu'il n'existe pas d'autres solutions de (1) . (*On pourra montrer que la différence de deux solutions de (1) est nulle en utilisant sa continuité en* 0)

4. Montrer que si φ admet une dérivée bornée sur $[-a,a]$, alors f est dérivable sur $[-a,a]$.