Géométrie d'une application polynomiale en caractéristique positive

Thèse de Doctorat

de

l'UNIVERSITÉ JAGELLONNE

en cotutelle avec

l'UNIVERSITÉ de SAVOIE

SPÉCIALITÉ: MATHÉMATIQUES

présentée par

Anna Stasica

Soutenue le 5 decembre 2003 à Kraków devant le jury composé de:

M. Zbigniew Jelonek (Warszawa - PAN)	**Directeur de thèse**
M. Krzysztof Kurdyka (Chambéry)	**Co-Directeur de thèse**
M. Tadeusz Mostowski (Warszawa)	**Rapporteur**
M. Wiesław Pawłucki (Kraków)	**Rapporteur**
M. Wiesław Pleśniak (Kraków)	**Président de jury**
M. Kamil Rusek (Kraków)	**Examinateur**
M. Zbigniew Szafraniec (Gdańsk)	**Rapporteur**
M. David Trotman (Marseille)	**Rapporteur**

Sommaire

0 Introduction

Dans l'étude de la géométrie d'une application polynomiale l'ensemble des points en lesquels l'application n'est pas propre joue un rôle très important. Rappelons que l'application $f : X \to Y$ entre des espaces topologiques est propre en un point $y \in Y$ s'il existe un voisinage ouvert U de y tel que la restriction $f_{|f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ est propre (l'image réciproque d'un ensemble compact est compact). Si X et Y sont des espaces euclidiennes, alors f n'est pas propre en y si et seulement s'il existe une suite $\{x_n\} \subset X$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} ||x_n|| \to \infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) \to y$. Ainsi, nous appellerons l'ensemble de points en lesquels l'application n'est pas propre un *ensemble asymptotique.* Il est bien connu qu'un polynôme non constant en une variable est une application propre. Lorsque l'on considère le cas de plusieurs variables, la situation change. Bien que la définition de l'ensemble asymptotique soit naturelle ce n'est qu'à l'aube des années quatre-vingt-dix que Zbigniew Jelonek a proposé cette définition dans le cas des applications polynomiales et a commencé à explorer les propriétés géométriques de cet ensemble. Plus exactement dans l'article [J1] il a posé la définition suivante: «L'application dominante $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ n'est pas propre en un point $y \in \mathbb{C}^n$ si pour tout voisinage ouvert U de y l'image réciproque $f^{-1}(\overline{U})$ n'est pas compacte.» Il a démontré que pour une telle application l'ensemble asymptotique est une hypersurface. Ensuite, dans [J2] il a donné une généralisation du résultat précédent pour une application polynomiale $f : X \to Y$ entre des variétés affines définies sur le corps des nombres complexes. De plus, il a démontré que si X est une variété de dimension n telle qu'il existe un morphisme dominant propre $\varphi : X \to \mathbb{C}^n$ (une telle variété est appelée *semi-affine*), et telle qu'il existe un morphisme dominant $\psi : \mathbb{C}^n \to X$ alors la variété asymptotique d'une application polynomiale dominante $f : X \to Y$ forme une hypersurface $\mathbb{C}$-réglée, autrement dit, une hypersurface dominée par un cylindre de la forme $\mathbb{C} \times R$ où R est une variété affine de dimension pure égale à $n - 2$. C'est pourquoi nous parlerons aussi *d'ensemble de Jelonek de l'application* f pour l'ensemble asymptotique de f. Nous noterons cet ensemble J_f.

Dans le cas réel, la géométrie de l'ensemble asymptotique d'une application polynomiale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est plus riche. Notamment, l'ensemble de Jelonek n'est plus de codimension pure égale à 1. De plus, pour tout entier $k \in [1, n-1]$, on peut trouver une application f_k telle que $\dim J_{f_k} = k$. Par contre, dans le cas réel l'ensemble de Jelonek est aussi $\mathbb{R}$-réglé, c'est-à-dire pour tout point $y \in J_f$ il existe une application polynomiale $\Gamma_y : \mathbb{R} \to J_f$ non constante telle que $\Gamma_y(0) = y$. Alors, toutes les composantes connexes de l'ensemble de Jelonek sont non-bornées.

L'analyse des propriétés de l'ensemble de Jelonek permet de résoudre beaucoup de problèmes géométriques. Par exemple dans [JK], Jelonek et Kurdyka ont obtenu une très jolie estimation sur le nombre des points de bifurcation d'une application polynomiale. Cet ensemble est important pour mieux comprendre le problème de la célèbre hypothèse jacobienne (si $Jac(f) = 1$ pour une application polynomiale $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, alors f est-elle un difféomorphisme polynomial?). Jelonek a démontré que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application polynomiale avec jacobien toujours différent de zéro, alors soit $\operatorname{codim} J_f \geq 2$, soit $J_f = \emptyset$ [J4]. Ce résultat l'a incité à poser la question suivante: «Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application polynomiale, telle que $Jac(f) \neq 0$, et $\operatorname{codim} J_f \geq 2$, alors f est-elle une bijection?» Remarquons que, si cette conjecture est vraie en dimension $2n$, alors l'hypothèse jacobienne est vraie en dimension n.

Lorsqu'on considère des variétés sur un corps arbitraire on dit que l'application polynomiale $f : X \to Y$ entre des variétés affines irréductibles est finie en un point $y \in Y$ s'il existe un voisinage ouvert de Zariski U du point y tel que $f_{|f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ est finie. Cette définition algébrique correspond à celle topologique dans le cas complexe ou bien réel. Ainsi, l'ensemble de Jelonek, autrement dit l'ensemble asymptotique, d'une application polynomiale est l'ensemble de points en lesquels cette application n'est pas finie.

Le premier but de ce travail, auquel nous consacrons la première partie, est une réponse à deux questions posées par le Professeur Jelonek. Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos. «L'ensemble asymptotique d'une application polynomiale dominante $f : X \to Y$ entre espaces affines sur $\mathbb{K}$ est-elle une hypersurface $\mathbb{K}$-réglée? En plus, si on demande que f soit séparable (l'extension de corps $f^*(\mathbb{K}(Y)) \subset \mathbb{K}(X)$ est séparable), J_f est-il aussi séparablement $\mathbb{K}$-reglé?»

La réponse à la première question était déjà partiellement connue. En effet, dans [J3] Jelonek a démontré que J_f est une hypersurface. Dans nos considérations, nous substituons la définition et donnons une caractérisation de variété $\mathbb{K}$-réglée analogue à celle de variété $\mathbb{C}$-réglée. Ensuite, nous montrons que J_f est $\mathbb{K}$-réglé.

La deuxième question dans le cas complexe n'est pas intéressante, car toute application polynomiale dominante est séparable. Par contre, dans le cas général, il semblait que cette hypothèse soit suffisante pour que l'ensemble de Jelonek soit séparablement $\mathbb{K}$-réglé, cependant il s'est avéré que ce n'était pas vrai, parce que nous avons trouvé un contre-exemple.

Ainsi la première partie de ce travail est consacrée aux études de l'ensemble de Jelonek d'une application polynomiale dominante entre des variétés affines définies sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque. Au début, nous rappelons et préparons des outils qui nous serviront dans la preuve du résultat principal. Dans le quatrième chapitre, à l'aide des bases de Gröbner, nous proposons une méthode effective pour déterminer des équations de l'ensemble de Jelonek d'une application polynomiale dominante. Ce chapitre fait partie d'un article [S].

Le deuxième but de notre travail est de trouver une autre description de l'ensemble de Jelonek dans le cas réel qui permettrait de déterminer effectivement l'ensemble asymptotique d'une application polynomiale, car la méthode proposée dans le troisième chapitre n'est pas applicable dans le cas réel. Nous trouvons, dans un langage de fonctions constructibles, une telle description en dimension 2 en utilisant un très joli résultat de Coste et Kurdyka qui a été aussi obtenu par Parusiński et Szafraniec disant que la caractéristique d'Euler d'une fibre sur y est égale à la somme des signes d'une famille finie de polynômes en y. Bien que nous soyons consciente que ces études ne sont pas exhaustives, nous espérons trouver une méthode efficace de même que généraliser ce résultat en dimension arbitraire.

* * *

Je voudrais exprimer ma reconnaissance et mes remerciements à M. le Professeur Zbigniew Jelonek qui a inspiré et dirigé la rédaction de cette étude, dont les remarques, conseils, suggestions et encouragements m'ont été précieux dans mon travail.

Je voudrais aussi exprimer ma profonde reconnaissance et mes remerciements à M. le Professeur Krzysztof Kurdyka qui m'a transmis sa passion pour la géométrie réelle et qui m'a soutenu de ses remarques pertinentes.

J'ai également une dette particulière envers le Gouvernement français qui m'ayant octroyé une bourse d'études m'a permis de poursuivre mes recherches au Bourget-du-Lac.

1 Résumé en polonais

Wielomian jednej zmiennej rzeczywistej lub zespolonej jest odwzorowaniem właściwym. Przypomnijmy, że odwzorowanie między przestrzeniami topologicznymi jest właściwe jeśli przeciwobraz każdego zbioru zwartego jest zwarty. W przypadku większej liczby zmiennych ta własność już się nie zachowuje, dla przykładu weźmy odwzorowanie $(x, y) \mapsto (xy, y)$.

Ważne jest zbadanie geometrii zbioru punktów w których odwzorowanie wielomianowe nie jest właściwe. Okazuje się bowiem, że zbiór ten odgrywa istotną rolę w analizie tego typu odwzorowań. Mówimy, że odwzorowanie jest właściwe w punkcie przeciwdziedziny jeśli restrykcja do przeciwobrazu pewnego otwartego otoczenia tego punkty jest właściwa. W przypadku przestrzeni euklidesowych brak tej własności w badanym punkcie wyraża się równoważnie przez istnienie ciągu punktów w dziedzinie rozbieżnego do nieskończoności i takiego, że jego wartości zmierzają do badanego punktu. Zbiór punktów niewłasciwości odwzorowania będziemy zatem nazywać *zbiorem asymptotycznym* tego odwzorowania.

Choć wydaje się naturalnym zbadanie własności tego zbioru dla odwzorowań wielomianowych, dopiero na początku lat 90 Zbigniew Jelonek rozpoczął intensywne badania geometrii zbioru asymptotycznego. W pierwszej pracy [J1], poświęconej tej tematyce, Jelonek wykazał, że zbiór asymptotyczny dla odwzorowań wielomianowych $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dominujących, to znaczy takich, że ich obrazy są gęste w przeciwdziedzinie, jest hiperpowierzchnią. W następnej pracy [J2] uogólnił swój rezultat do przypadku dowolnych rozmaitości afinicznych określonych nad ciałem liczb zespolonych. Co więcej, wykazał, że dla odwzorowań wielomianowych o prawie wszystkich włóknach skończonych, takie odwzorowania nazywamy generycznie skończonymi, określonych na n-wymiarowej semiafinicznej rozmaitości X (to znaczy takiej, że istnieje odwzorowanie wielomianowe dominujące i właściwe $\phi : X \to \mathbb{C}^n$) oraz takiej, że jest zdominowana przez $\mathbb{C}^n$ zbiór asymptotyczny jest $\mathbb{C}$-prostokreślną rozmaitością wymiaru $n-1$. Przez rozmaitość $\mathbb{C}$-prostokreślną wymiaru k rozumiemy taką rozmaitość X która jest zdominowana przez cylinder postaci $\mathbb{C} \times R$, gdzie R jest pewną rozmaitością afiniczną wymiaru $k - 1$, lub równoważnie, że przez każdy punkt tej rozmaitości przechodzi krzywa parametryczna zawarta w X. Zbiór punktów niewłaściwości odwzorowania wielomianowego $f : X \to Y$ nazywamy zbiorem Jelonka odwzorowania f i oznaczamy przez J_f.

Właściwość odwzorowania w języku algebraicznym wyraża się przez skończoność odwzorowania. Przypomnijmy, że odwzorowanie dominujące $f : X \to Y$ indukuje w naturalny sposób rozszerzenie pomiędzy pierścieniami współrzędnych:

$$f^* : \mathbb{K}[Y] \ni g \mapsto g \circ f \in \mathbb{K}[X]. \tag{1.1}$$

Mówimy, że odwzorowanie f jest skończone jeśli rozszerzenie (1.1) jest całkowite. Zbiór Jelonka odwzorowania f nad dowolnym ciałem algebraicznie domkniętym definiujemy jako zbiór tych punktów $y \in Y$, dla których nie istnieje otoczenie otwarte w topologii Zariskiego U takie by zawężenie f do przeciwobrazu zbioru U było skończone. Jelonek, w pracy [J3], udowodnił, że w przypadku odwzorowania generycznie skończonego jego zbiór jest hiperpowierzchnią.

W przypadku rzeczywistym geometria tego zbioru jest znacznie bogatsza. Zbiór ten, jak wykazał Jelonek w pracy [J4], jest $\mathbb{R}$-prostokreślny, w tym sensie, że przez każdy punkt tego zbioru przechodzi krzywa parametryczna zawarta w tym zbiorze. Jednak zbiór ten nie jest stałego wymiaru. Dokładniej, Jelonek podał metodę konstrukcji odwzorowania

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tak by zbiór asymptotyczny był wymiaru k, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą zawartą w przedziale $[1, n-1]$.

Dzięki znajomości geometrii zbioru asymptotycznego Jelonek oraz Kurdyka w elegancki sposób, w pracy [JK], oszacowali liczbę punktów bifurkacji wielomianu n zmiennych zespolonych jak i rzeczywistych.

Dzięki nieograniczoności składowych zbioru asymptotycznego można rozwiązać problem Gamboa, mianowicie można wykazać, że nie istnieje suriektywne odwzorowanie wielomianowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \setminus B$, gdzie B oznacza domkniętą kulę jednostkową w $\mathbb{R}^n$.

Jelonek postawił pytanie dotyczące hipotezy jakobianowej (to jest problemu, czy odwzorowanie wielomianowe $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o stałym jakobianie jest dyfeomorfizmem wielomianowym):
„*Czy odwzorowanie wielomianowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o jakobianie stale różnym od zera i takim, że kowymiar zbioru J_f wynosi co najmniej 2 jest bijekcją?*"
Jeśli odpowiedź na to pytanie jest pozytywna w przypadku $n = 2k$, to pociąga ona za sobą prawdziwość hipotezy jakobianowej dla odwzorowań $\mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$.

Celem tej pracy jest odpowiedź na pytanie Profesora Jelonka czy zbiór J_f dla odwzorowania generycznie skończonego $f : X \to Y$ pomiędzy dowolnymi przestrzeniami afinicznymi określonymi nad ciałem algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$ jest $\mathbb{K}$-prostokreślny oraz czy jeśli dołożymy założenie, że odwzorowanie f jest rozdzielcze, to czy zbiór J_f jest $\mathbb{K}$-prostokreślnie rozdzielczy? Przypomnijmy, że odwzorowanie jest rozdzielcze, jeśli indukowane przez niego rozszerzenie ciał ułamków (1.1) jest rozdzielcze, to znaczy, że każdy element ciała $\mathbb{K}(X)$ jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu unitarnego o współczynnikach z ciała $f^*\mathbb{K}(Y)$. Odpowiedź na pierwsze pytanie jest pozytywna, jest ona treścią twierdzenia 3.3.3. Dowód tego twierdzenia składa się z dwóch etapów. W pierwszym, redukujemy problem do przypadku dwuwymiarowego, w drugim, korzystając z przedstawienia zbioru Jelonka jako rzutu brzegu wykresu odwzorowania f (propozycja 3.3.1) oraz własności dopełnień rozmaitości otwartych w zawierających ich rozmaitościach pokazujemy, że zbiór Jelonka dla odwzorowania generycznie skończonego $\mathbb{K}^2 \to Y$ składa się z krzywych parametrycznych. Własności wspomnianych dopełnień badamy w paragrafie pierwszym rozdziału trzeciego. W następnym paragrafie podajemy opis rozmaitości $\mathbb{K}$-prostokreślnej (twierdzenie 3.2.2).

Paragrafy czwarty i piąty rozdziału trzeciego poświęcone są odpowiedzi na pytanie o rozdzielczą prostokreślność. Najpierw badamy własności odwzorowań rozdzielczych, podajemy kryterium na rozdzielczość odwzorowania w języku derywacji (propozycja 3.4.2) oraz pokazujemy, że dowolne odwzorowanie wielomianowe możemy rozszerzyć do odwzorowania rozdzielczego (propozycja 3.4.4). W ostatnim paragrafie, korzystając z rezultatów Kollára z pracy [K1] pokazujemy, że istnieją takie odwzorowania rozdzielcze, dla których zbiór Jelonka nie jest rozdzielczo $\mathbb{K}$-prostokreślny. Zauważmy, że pytanie o rozdzielczą prostokreślność w przypadku zespolonym nie ma sensu gdyż wszystkie odwzorowania wtedy są rozdzielcze.

Czwarty rozdział poświęcony jest podaniu efektywnej metody na wyznaczenie równań zbioru Jelonka dla dowolnego generycznie skończonego odwzorowania wielomianowego między rozmaitościami afinicznymi. Używając baz Gröbnera przedstawiamy algorytm, który wyznacza ideał szukanego zbioru. Rozdział ten jest częścią artykułu [S].

W drugiej części pracy staramy się znaleźć analogiczny algorytm dla odwzorowań wielomianowych rzeczywistych. W tym przypadku, zaproponowana metoda dla odwzorowań nad ciałami algebraicznie domkniętymi nie funkcjonuje. Proponujemy zatem inny sposób patrzenia na zbiór asymptotyczny. Przy pomocy funkcji algebraicznie konstruowalnych, to jest takich, które przedstawiają się jako sumy znaków skończonej rodziny wielomianów podajemy opis zbioru Jelonka (twierdzenie 6.0.2) dla odwzorowań wielomianowych na płaszczyźnie. Bezpośrednio z tego twierdzenia zauważamy, że jeśli liczba punktów we włóknach nad pewnym zbiorem otwartym, odwzorowania o skończonych włóknach, jest stała to odwzorowania w tym zbiorze jest właściwe.

Dzięki twierdzeniom Coste'a i Kurdyki [CK2] oraz Parusińskiego i Szafrańca [PS] zaproponowany opis zbioru Jelonka pozwala na wyznaczenie efektywne tego zbioru w przypadku generycznym. Badania w tym kierunku nie zostały jeszcze zakończone. Ponieważ sam rezultat wydaje nam się interesujący i daje kryterium na sprawdzanie czy odwzorowanie jest właściwe w punkcie w zależności od zmiany liczby punktów we włóknach w otoczeniu badanego punktu, zdecydowaliśmy przedstawić go w pracy, szkicując jedynie w jaki sposób wyobrażamy sobie jego zastosowanie do efektywnego wyznaczenia równań i nierówności opisujących zbiór asymptotyczny.

Partie I

Dans le monde algébriquement clos

2 Préliminaires

Dans cette partie nous étudions le comportement d'une application polynomiale entre des variétés affines définies sur un corps algébriquement clos. Tout d'abord, nous établissons la notation et précisons la terminologie. Nous rappelons également les résultats classiques d'algèbre et de géométrie qui nous serviront dans notre travail sans nous soucier des preuves qu'on peut trouver facilement dans les livres de Hartshorne [H1], Lang [L], Mumford [Mu] et Shafarevich [Sh].

2.1 Notation et terminologie

Nous allons travailler sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos de caractéristique quelconque.
$\mathbb{A}^n$ désigne l'espace affine de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$,
$\mathbb{P}^n$ désigne l'espace projectif de dimension n.
$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ - l'anneau des polynômes en n variables.
Un ensemble algébrique de $\mathbb{K}^n$ est une intersection finie $\bigcap f_i^{-1}(0)$, où f_i est un polynôme en n variables.
La topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n$ est définie par les compléments d'ensembles algébriques.
$V(I)$ désigne l'ensemble des zéros d'idéal $I \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$,
$I(X)$ l'idéal de l'ensemble algébrique X.
$\mathbb{K}[X]$ désigne un anneau de coordonnées d'ensemble X.
Une variété affine est isomorphe à un sous-ensemble clos de $\mathbb{A}^n$, un sous-ensemble ouvert d'une variété affine est appellé une variété quasi-affine.
Une variété projective est isomorphe à un ensemble algébrique de $\mathbb{P}^n$, un sous-ensemble ouvert de variété projective est appellé une variété quasi-projective.
Une variété algébrique est une variété soit affine, soit quasi-affine, soit projective, soit quasi-projective.
Par dimension d'une variété quasi-projective irréductible nous entendons un degré transcendant de corps $K(X)$.
Nous dirons qu'une application polynomiale entre deux variétés $f : X \to Y$ est dominante si et seulement si l'image de la variété X par f est dense dans la variété Y.
On va dire que l'application f est génériquement finie si et seulement s'il existe un ouvert de Zariski $U \subset X$ tel que pour chaque $x \in U$, les fibres $f^{-1}(f(x))$ sont finies.
Nous dirons qu'une application polynomiale $f : X \to Y$ entre variétés affines est finie si et seulement si l'extension associée des anneaux de coordonnées $f^*(\mathbb{K}[Y]) \subset \mathbb{K}[X]$ par un homomorphisme naturel $f^* : \mathbb{K}[Y] \ni g \mapsto g \circ f \in \mathbb{K}[X]$ est intégre. Dans la suite, nous désignerons par $\mathbb{K}(f)$ le corps $f^*\mathbb{K}(Y)$.
Nous dirons que l'application $f : X \to Y$ entre deux variétés quelconques est finie s'il existe un recouvrement affine ouvert $\{V_i\}$ de Y tel que $f^{-1}(V_i)$ est affine pour tout i, et toutes les restrictions $f_{|f^{-1}(V_i)} : f^{-1}(V_i) \to V_i$ sont finies.
Une application quasi-finie est une application telle que toutes ses fibres sont finies.
On dit qu'une application est affine si l'image réciproque par cette application de chaque ensemble affine est aussi affine.

On dit qu'une application $f : X \to Y$ entre des variétés quasi-projectives est algébriquement propre si f se factorise par une immersion close de X dans un produit $Z \times Y$, où Z est un ensemble projectif, et par une projection de $Z \times Y$ sur Y.
Une courbe paramétrique γ dans une variété X est l'image d'une application polynomiale non constante $\gamma : \mathbb{K} \to X$.

2.2 Algèbre

Soit $p \subset R$ un idéal premier dans un anneau R, rappelons que la hauteur de p est donnée par la formule:

$$\operatorname{ht} p := \max\{k \mid p_0 \subsetneq \ldots \subsetneq p_k = p\},$$

où p_i sont des idéaux premiers de R. Par R_p nous désignons la localisation de l'anneau R en l'idéal p.

Lemme 2.2.1 *Soit R un anneau noethérien normal, alors* $\bigcap_{\operatorname{ht} p = 1} R_p = R$.

Lemme 2.2.2 *Soient A, B des anneaux intègres, tels que $B = A[x_1, \ldots, x_n]$ et l'extension de corps $A_0 \subset B_0$ soit fini. Supposons aussi que A soit un anneau normal. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *B est un A-module de type fini,*
2. *si $P_i \in A_0[t]$ est le polynôme minimal de x_i sur A_0, alors $P_i \in A[t]$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

2.3 Géométrie

Théorème 2.3.1 *Toute courbe est birationnellement équivalente à une courbe plane ne possèdent que des points doubles comme points singuliers.*

Théorème 2.3.2 *Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif entre deux variétés irréductibles affines. Alors*

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim Y$$

pour tout $y \in Y$, en plus, l'égalité est satisfaite sur un ouvert $U \subset Y$.

Théorème 2.3.3 (Élimination des points de l'indétermination) *Soit $\phi : S \to X$ une application rationnelle entre une surface (projective) S et une variété projective X. Alors, il existe une surface $\tilde{S}$, et deux morphismes, $\pi = \pi_m \circ \ldots \circ \pi_1 : \tilde{S} \to S$ étant une composition d'éclatements π_i, et $\Phi : \tilde{S} \to X$, tels que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ S \arrow[r, "\phi"] & X. \end{tikzcd}$$

Théorème 2.3.4 (Zariski's Main Theorem) *Soit X une variété irréductible, soit Y une variété irréductible et normale. Soit $\phi : X \to Y$ un morphisme birationnel, algébriquement propre, alors pour tout point $y \in Y$, la fibre $\phi^{-1}(y)$ est connexe.*

Théorème 2.3.5 (Zariski Main Theorem en version de Grothendieck) *Soit $f : X \to Y$ une application quasi-finie entre des variétés affines irréductibles. Alors, il existe une variété affine V telle que X est une partie ouverte dense de V, et une application finie $F : V \to Y$ telle que $F_{|X} = f$.*

Théorème 2.3.6 (Factorisation de Stein) *Soient X, Y des variétés irréductibles, où X est normale. Soit $f : X \to Y$ un morphisme algébriquement propre et dominant, alors ils existent une variété normale V, un morphisme surjectif $g : X \to V$ et un morphisme fini $h : V \to Y$ tels que toutes les fibres de g sont connexes et f se factorise par $f = h \circ g$.*

Observation 2.3.1 *Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ des morphismes entre des variétés affines irréductibles, tels que $g \circ f$ soit algébriquement propre, alors f est aussi algébriquement propre.*

Observation 2.3.2 *Toute application finie est affine.*

Nous aurons aussi besoin d'un théorème à la Hartogs sur l'existence d'un prolongement d'une application. Le lemme que nous allons présenter est une version algébrique du théorème classique de Hartogs. Nous proposons une preuve très facile car nous n'en avons pas la trouvé dans la literature proposée.

Lemme 2.3.1 (Hartogs) *Soit X une variété normale et soit $Y \subset X$ une sous-variété de codimension au moins égale à 2. Si $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \setminus Y \to \mathbb{K}^n$ est une application régulière, alors il existe une application $F : X \to \mathbb{K}^n$ telle que la restriction $F_{|X \setminus Y}$ est égale à f.*

Démonstration. Nous pouvons supposer que X est une variété affine, car on va raisonner localement. Soit $p \subset \mathbb{K}[X]$ un idéal de hauteur 1. On va démontrer, que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ une composante f_i de l'application f appartient à $\mathbb{K}[X]_p$. Comme Y est une sous-variété de codimension au moins égale à 2, il existe un point lisse $v \in V(p) \setminus Y$. Par l'hypothèse f_i est régulière en $X \setminus Y$, alors dans un point $v \in V(p) \setminus Y$ nous avons une présentation $f_i = \dfrac{a_i}{b_i}$, où $a_i, b_i \in \mathbb{K}[X \setminus Y]$ et $b_i(v) \neq 0$, c'est-à-dire que $f_i \in \mathbb{K}[X]_p$ pour tout i car $\mathbb{K}(X)_v = \mathbb{K}(X \setminus Y)_v$. Du lemme 2.2.1 on conclut que $f_i \in \mathbb{K}[X] = \bigcap_{\mathrm{ht} p = 1} \mathbb{K}[X]_p$ et, en effet f est régulière en X. C'est qu'il fallait démontrer. $\square$

3 Géométrie de l'ensemble de Jelonek

Dans ce chapitre nous donnons des propriétés géométriques de l'ensemble de Jelonek, c'est-à-dire de l'ensemble des points en lesquels l'application polynomiale dominante n'est pas finie. Notre résultat principal dit que cet ensemble forme une sous-variété $\mathbb{K}$-réglée. On démontre aussi que dans le cas de caractéristique positive, l'ensemble de Jelonek d'une application séparable n'est pas forcément une variété séparablement $\mathbb{K}$-réglée.

3.1 Complément d'une variété

Ce paragraphe est consacré à l'analyse de la forme du complément d'une sous-variété dense dans une variété ambiante. Au début nous rappelons une proposition disant que le complement d'une variété affine dans une variété projective est connexe. Ensuite nous rappelons une definition de variété semi-affine ayant été proposée par Jelonek dans l'article [J2] qui généralise la classe de variétés affines. Nous terminons nos considerations en démontrant que le complement de l'espace $\mathbb{K}^2$ qui fait une partie dense et ouverte dans une surface ne consiste que de courbes paramétriques disjointes.

Proposition 3.1.1 *Soit X une variété projective irréductible de dimension plus grande que 1. Alors pour toute variété V affine, ouverte et dense dans X, le complément $X \setminus V$ forme une hypersurface connexe dans la variété X.*

Pour la preuve voir ([H2], corollary 6.2. p. 72). □

Définition 3.1.1 *On dit qu'une variété X est semi-affine s'il existe une variété affine W et un morphisme algébriquement propre dominant $\varphi : X \to W$. Ou bien, en équivalent, s'il existe un morphisme algébriquement propre dominant $\Phi : X \to \mathbb{K}^n$ pour quelque $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque 3.1.1 Toute variété affine est bien évidemment une variété semi-affine, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple une surface obtenue d'un éclatement de $\mathbb{K}^2$ en un point n'est pas affine tandis qu'elle est semi-affine.

Dans la preuve du théorème principal nous aurons besoin de la proposition suivante, qui a été remarquée par Jelonek ([J2], lemme 4.5). En effet, cette observation est une généralisation de la proposition citée tout à l'heure dans le cas d'une variété semi-affine.

Proposition 3.1.2 (Jelonek) *Soit X une variété irréductible, complète de dimension plus grande que* 1. *Soit $Y \subset X$ une sous-variété ouverte, semi-affine. Alors, l'ensemble $X \setminus Y$ est connexe.*

Démonstration. Nous présentons ici la preuve de Jelonek qui a été faite dans le cas complexe et qui est aussi valable en caractéristique quelconque.

Au début voyons qu'en prenant des normalisations de variétés X et Y, nous pouvons les supposer normales. Puisque la variété Y est semi-affine il existe un morphisme propre $\varphi : Y \to \mathbb{K}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Nous avons une extension rationnelle $\Phi : X \to \mathbb{P}^n$ de l'application φ. Ainsi les projections $p : \overline{graph(\Phi)} \to X$ et $q : \overline{graph(\Phi)} \to \mathbb{P}^n$ sont des morphismes. Par la factorisation de Stein il existe une variété V, et ils existent des applications régulières h et g telles que:

1. l'application $h : V \to \mathbb{P}^n$ est finie,
2. l'application $g : \overline{graph(\Phi)} \to V$ est algébriquement propre,
3. toute fibre de g est connexe.

Bien entendu, nous pouvons sans perte de généralité supposer que $\overline{graph(\Phi)}$ est normal. Ainsi, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\overline{graph(\Phi)} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "q"] & V \arrow[d, "h"] \\
X \arrow[r, "\Phi"] & \mathbb{P}^n \\[-20pt]
\cup & \cup \\[-20pt]
Y \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{K}^n.
\end{tikzcd}$$

Alors,

$$X \setminus Y = p(g^{-1}(h^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{K}^n))). \tag{3.1}$$

Puisque l'application finie est affine (l'observation 2.3.2), l'ensemble $h^{-1}(\mathbb{K}^n)$ est une variété affine comme l'image réciproque de $\mathbb{K}^n$ par une application finie. Ainsi, grâce à la proposition 3.1.1 l'ensemble

$$h^{-1}(\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{K}^n) = V \setminus h^{-1}(\mathbb{K}^n)$$

est connexe. En conséquence son image réciproque par l'application g est connexe, et cela montre avec l'égalité (3.1) que $X \setminus Y$ est connexe. $\square$

Nous aurons besoin encore d'une proposition sur la dimension du complement d'une variété. D'abord rappelons une definition.

Définition 3.1.2 *Une compactifiction d'une application dominante $f : X \to Y$ entre deux varietétés algébrique c'est une application $\hat{f} : \overline{X} \to Y$ où $\overline{X}$ est une variété telle que:*

1. *$\hat{f}$ est propre,*
2. *$X \subset \overline{X}$ est dense,*
3. *$\hat{f}_{|X} = f$.*

Proposition 3.1.3 *Soit W une variété irréductible. Supposons que $X \subset W$ est une sous-variété affine propre dense et ouverte dans W. Alors l'ensemble $Y = W \setminus X$ forme une variété de codimension pure égal à 1.*

Démonstration. Tout d'abord remarquons qu'en prenant des normalisations de variétés X et W nous pouvons les supposer normales. Nous raisonnerons par l'absurde. Supposons alors, qu'il existe une composante de Y de codimension plus grande que 1. Par l'élimination de toutes les composantes de codimension 1 nous pouvons supposer que $\operatorname{codim}_W Y \geq 2$. Considérons un morphisme propre

$$\iota : W \setminus Y = X \ni x \longrightarrow x \in X.$$

Par le lemme 2.3.1 de Hartogs, il existe une extension de ι à la variété W, dit $\bar{\iota} : W \to X$. Désignons par $\hat{\iota}$ une compactification de $\bar{\iota}$, c'est-à-dire $\hat{\iota} : \overline{W} \to X$. Par la definition $\hat{\iota}$ est propre, et par le théorème 2.3.4 c'est un morphisme à fibres connexes. D'autre part, la fibre sur un point x de $\hat{\iota}(\overline{W} \setminus X)$ n'est pas connexe ce qui contredit la remarque précédente. $\square$

Proposition 3.1.4 *Soit X une surface irréductible semi-affine et normale, telle que $\mathbb{K}^2$ soit une partie propre de X. Alors $X \setminus \mathbb{K}^2$ est une union finie de courbes paramétriques disjointes.*

Démonstration. Grâce à la proposition précédente $X \setminus \mathbb{K}^2$ forme une union finie de courbes Γ_i. Nous démontrerons que toute composante connexe se présente comme une image par une application rationnelle définie sur $\mathbb{K}$. Soit $\overline{X}$ une adhérence projective de la surface X. Posons

$$\iota : \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) - \to \overline{X}$$

une extension naturelle de l'inclusion $\mathbb{K}^2 \subset X$. Bien entendu, ι est une application rationnelle. Remarquons que ι ne peut pas être régulière, car on aurait l'égalité

$$\iota(\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus \mathbb{K}^2) = \overline{X} \setminus X,$$

et en conséquence $X = \mathbb{K}^2$. Alors ι admet un nombre fini de points de l'indétermination. Par la résolution des points de l'indétermination, il existe une variété Y et un morphisme régulier $\phi : Y \to \overline{X}$ tel que le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \arrow[r, "\iota"] & \overline{X} \end{tikzcd}$$

est commutatif, où π est une composition des éclatements aux centres en tous les points de l'indétermination. Ces centres sont situés bien évidemment à l'infini. Soit

$$Z := E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_m$$

un arbre provenant de π, où E_0 désigne une ligne à l'infini, et E_i désigne un diviseur exceptionnel pour $i \in \{1, \ldots, m\}$. Grâce à des propriétés d'un éclatement les conditions suivantes sont remplies immédiatement:

1. $E_i \cong \mathbb{P}^1$ pour chaque $i \in \{0, \ldots, m\}$.
2. L'arbre Z est une variété connexe.
3. Pour chaque couple d'indices distinctes $0 \leq i, j \leq n$ soit $E_i \cap E_j$ est vide, soit $E_i \cap E_j$ consiste en un seul point.
4. Pour trois indices distinctes i, j, k l'intersection $E_i \cap E_j \cap E_k$ est vide.
5. Il n'existe aucune chaîne de diviseurs $E_{i_1}, \ldots, E_{i_s}$, tel que $E_{i_k} \cap E_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ pour $1 \leq k \leq s-1$ et en même temps $E_{i_1} \cap E_{i_s} \neq \emptyset$.

Par le Zariski's Main Theorem toutes les fibres d'un morphisme ϕ sont connexes. De la proposition 3.1.1 l'ensemble $\overline{X} \setminus X$ est connexe, alors l'image réciproque

$$W := \phi^{-1}(\overline{X} \setminus X)$$

est une sous-variété connexe. Supposons qu'il existe un point $x \in \Gamma_i \cap \Gamma_j$ pour certaines i, j différents entre eux. En changeant la numération de diviseurs E_i nous pouvons supposer que Γ_i est une image de $E_i \setminus W$ par ϕ. Alors ils existent des points $y_i, y_j \in \phi^{-1}(x)$ tels que $y_i \in E_i \setminus W$ et $y_j \in E_j \setminus W$. Par la construction, la fibre $\phi^{-1}(x)$ est connexe, alors il existe une courbe liant le point y_i avec le point y_j. D'un autre côté, les diviseurs E_i et E_j se rencontrent dans un point de la variété W. En conséquence, il existe une chaîne dans l'arbre Z ce qu'est en contradiction avec la condition 5 au-dessus. Alors nous venons de démontrer que l'image réciproque $\phi^{-1}(\Gamma_i) \subset Z$ rencontre la variété W seulement dans un seul point w. C'est-à-dire que $\Gamma_i = \phi(\mathbb{P}^1 \setminus \{w\}) \cong \phi(\mathbb{K})$. $\square$

3.2 Sur une variété $\mathbb{K}$-réglée

Dans ce paragraphe, nous présentons une définition de variété $\mathbb{K}$-réglée. Au début nous proposons une version d'un théorème de Baire.

Théorème 3.2.1 (Théorème de Baire pour la topologie de Zariski)
Soit $\mathbb{K}$ un corps indénombrable. Soit $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n$ une famille d'ensembles ouverts dans la topologie de Zariski. Alors, $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} U_i$ est un ensemble dense.

Démonstration. On procéde par la récurrence sur n.
Soit $n = 1$, alors il existe un ensemble S au plus dénombrable tel que $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} U_i = \mathbb{K} \setminus S$. En conséquence $\overline{\mathbb{K} \setminus S}^Z = \mathbb{K}$.
Soit $n \geq 2$, et supposons que le théorème est vrai pour tout $k < n$. Bien évidemment, il suffit de considérer seulement des ensembles U_i de la base de la topologie de Zariski. Supposons alors que l'ensemble U_i est de la forme $\{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } f_i(x) \neq 0\}$ et désignons un tel ensemble par U_{f_i}, où $f_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Posons $U := \bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} U_{f_i}$. Pour constater que l'ensemble U est dense nous allons démontrer, que pour tout ensemble ouvert V l'intersection $V \cap U$ est non vide. Encore, il est suffisant de considérer seulement des ensembles de la forme $V = \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } g(x) \neq 0\}$ pour un polynôme $g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Alors l'inégalité $V \cap U \neq \emptyset$ est équivalente avec une hypothèse que pour toute famille $\mathcal{F} = \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de polynômes en n variables l'intersection $\bigcap\limits_{f_i\in\mathcal{F}} U_{f_i}$ est non vide. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ telle que $\bigcap\limits_{f_i\in\mathcal{F}} U_{f_i} = \emptyset$. Alors pour tout $x \in \mathbb{K}^n$ il existe un polynôme $f_i \in \mathcal{F}$ tel que

$$f_i(x) = 0. \tag{3.2}$$

Comme le corps $\mathbb{K}$ est indénombrable, il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que $f_{i|\{x_1=c\}} \not\equiv 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Par l'hypothèse de la récurrence il existe un point $y \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a $f_i(c, y) \neq 0$. Cela est en contradiction avec l'égalité (3.2). $\square$

Théorème 3.2.2 (Affine caractérisation d'une variété $\mathbb{K}$-réglée) *Soit X une variété affine irréductible de dimension n. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. *Pour tout $x \in X$ il existe un morphisme $\varphi : \mathbb{K} \to X$ non-constant, tel que $\varphi(0) = x$.*
2. *Il existe un sous-ensemble ouvert $V \subset X$, tel que pour tout $x \in V$ il existe un morphisme $\varphi : \mathbb{K} \to X$ non-constant, et $\varphi(0) = x$.*
3. *Il existe une variété R de dimension égale à $n-1$, et un morphisme dominant $\phi : \mathbb{K} \times R \to X$.*

C'est une version dans le cas général correspondante à celle de Jelonek sur une variété $\mathbb{C}$-réglée ([J2]). En effet, ce théorème est une version affine correspondante à celle de la caractérisation d'une variété réglée (Cf. [K2], proposition IV.1.3).

Dans la preuve de l'implication $2 \Rightarrow 3$ nous suivons au début l'idée de Jelonek, cependant nous devons substituer son passage à la limite dans la construction d'une courbe par d'autres outils. La preuve de l'implication $3 \Rightarrow 1$ exige aussi des techniques différentes que celles proposées par Jelonek.

Démonstration. Par l'hypothèse, nous pouvons supposer que $X \subset \mathbb{A}^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

L'implication $1 \Rightarrow 2$ est triviale.

Preuve de l'implication $2 \Rightarrow 3$: Considérons un ensemble

$$S_d = \{\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{A}^m \text{ tel que } \deg \varphi = d\}.$$

Toute composante φ_i de $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ est un polynôme en une variable de la forme $\sum_{j=0}^{d} a_j^i t^j$. Alors, à tout morphisme $\varphi \in S_d$ il correspond exactement un point

$$(a_0^1, \ldots, a_d^1, \ldots, a_0^m, \ldots, a_d^m) \in (\mathbb{K}^{d+1})^m \setminus (\mathbb{K}^d \times \{0\})^m.$$

Alors, l'ensemble S_d est une variété quasi-projective. Posons maintenant

$$\mathcal{S}_d := \{\varphi \in S_d \text{ tel que } \varphi(\mathbb{K}) \subset X\},$$

c'est une sous-variété close dans S_d. Prenons un morphisme

$$F_d : \mathbb{K} \times \mathcal{S}_d \ni (t, \varphi) \longrightarrow \varphi(t) \in X.$$

L'ensemble $X_d := F_d(\mathbb{K} \times \mathcal{S}_d)$ est constructible comme l'image d'un ensemble algébrique. Par l'hypothèse

$$X \subset \bigcup_{d \geq 1} X_d.$$

Alors, grâce au théorème de Baire pour la topologie de Zariski, il existe un entier d tel que $\overline{X}_d = X$. Alors, pour ce d le morphisme $F_d : \mathbb{K} \times \mathcal{S}_d \to X$ est dominant. Soit Y une composante irréductible affine et lisse de $\mathcal{S}_d$ telle que la restriction

$$\phi := F_{d|\mathbb{K} \times Y} : \mathbb{K} \times Y \longrightarrow X$$

et toujours dominante. Soit $\iota : Y \to \mathbb{A}^N$ une immersion, où $N \in \mathbb{N}$, dans ce qui suit nous identifions Y avec son image $\iota(Y)$ dans $\mathbb{A}^N$. Soit $\pi : \mathbb{K} \times Y \to Y$ une projection. Désignons par F la fibre générique de l'application ϕ. Par la construction, F ne contient aucune droite de la forme $\mathbb{K} \times \{y\}$, $y \in Y$. Alors

$$\dim \pi(F) = \dim F = \dim Y + 1 - n. \tag{3.3}$$

Soit L un sous-espace générique linéaire de $\mathbb{A}^N$ de dimension égale à $N + n - \dim Y - 1$ tel que l'ensemble $L \cap \pi(F)$ est fini. Soit R une composante irréductible de l'intersection $L \cap Y$ passante par $\pi(F)$. Remarquons que

$$\dim R = \dim Y - \dim F = n - 1.$$

Cela montre que

$$\dim \mathbb{K} \times R = \dim X. \tag{3.4}$$

Par la construction, la restriction

$$\phi_{|\mathbb{K}\times R} : \mathbb{K} \times R \longrightarrow X$$

possède une fibre finie. Alors grâce à l'égalité 3.4 la restriction considérée de ϕ est dominante. Ce qu'il fallait démontrer.

Preuve de l'implication $3 \Rightarrow 1$: Au début supposons que X est une surface, alors R est une courbe. En diminuant R, si nécessaire, on peut supposer que pour tout $a \in R$ l'image $\phi(\mathbb{K} \times \{a\})$ est une courbe.

Si un point x appartient à l'image $\phi(\mathbb{K} \times R)$ posons $(a, y) \in \phi^{-1}(x)$. Il est bien évident que le morphisme

$$\varphi : \mathbb{K} \ni t \mapsto \phi(t + a, y) \in X$$

décrit une courbe paramétrique passante par le point x.

Supposons maintenant, que $x \in X \setminus \phi(\mathbb{K} \times R)$. Soit

$$\overline{\phi} : \mathbb{P}^1 \times \overline{R} \longrightarrow \overline{X}$$

une projectivisation de l'application ϕ. Remarquons que tous les points $a_1, \ldots, a_k$ de l'indétermination de l'application $\overline{\phi}$ font partie de l'ensemble

$$H := (\{\infty\} \times \overline{R}) \cup (\mathbb{P}^1 \times (\overline{R} \setminus R)).$$

Il existe alors, un nombre fini d'éclatements $\pi_1, \ldots, \pi_m$ tel que le diagramme suivant de la résolution de l'irrégularité de l'application $\overline{\phi}$ est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ \mathbb{P}^1 \times \overline{R} \arrow[r, "\overline{\phi}"] & \overline{X} \end{tikzcd}$$

où Φ est un morphisme, et $\pi = \pi_1 \circ \ldots \circ \pi_m$. Soit $T \subset Y$ un arbre de cette résolution. Nous entendons par l'arbre T une union des diviseurs exceptionnels avec une transformation propre de H c'est-à-dire $T = \pi^{-1}(H)$. Désignons par W l'image réciproque $\Phi^{-1}(\overline{X} \setminus X)$. Sous cette notation nous avons

$$X \setminus \phi(\mathbb{K} \times R) \subset \Phi(T \setminus W).$$

Remarquons que W, grâce à la proposition 3.1.2, est connexe car $W = Y \setminus \Phi^{-1}(X)$ et $\Phi^{-1}(X)$ est semi-affine puisque tout morphisme d'une variété complete est propre. Soit $E \subset T$ une courbe irréductible. Alors en utilisant le même argument que dans la preuve du lemme 3.1.4 nous concluons que $W \cap E$ ne consiste que d'un seul point, dit w. Ainsi $x \in \Phi(\mathbb{P}^1 \setminus \{w\})$ ce qui montre l'implication $3 \Rightarrow 1$ en cas $\dim X = 2$.

Supposons maintenant que $\dim X = n$. Soit $\gamma \subset X$ une courbe irréductible passant par un point $x \in X$, telle que $\gamma \setminus \{x\} \subset \phi(\mathbb{K} \times R)$. Celle-ci on peut toujours trouver car ϕ est dominant. Soit $C \subset \phi^{-1}(\gamma)$ une courbe telle que la restriction $\phi_{|C} : C \to \gamma$ est dominante. Posons $\Gamma := p_2(C)$, où $p_2 : \mathbb{K} \times R \to R$ est une projection.

Si $\dim \Gamma = 0$, alors $C \subset \mathbb{K} \times \{r_1, \ldots, r_k\}$, où $r_i \in R$ est un point pour $i = 1, \ldots k$. Il existe donc un point r_i tel que $\gamma = \phi_{|\mathbb{K} \times \{r_i\}}(\mathbb{K} \times \{r_i\})$, alors γ est une courbe paramétrique passant par x.

Si Γ est une courbe dans R, remarquons que nous pouvons supposer que la restriction

$$\tilde{\phi} := \phi_{|\mathbb{K} \times \Gamma} : \mathbb{K} \times \Gamma \longrightarrow \overline{\phi(\mathbb{K} \times \Gamma)}$$

est un morphisme dominant d'un cylindre à un sous-ensemble affine de X de dimension 2 (ici, nous entendons par $\overline{\phi(\mathbb{K} \times \Gamma)}$ l'adhérence de Zariski dans X). En effet, si $\dim \overline{\phi(\mathbb{K} \times \Gamma)} = 1$ il existe une courbe paramétrique $\phi : (\mathbb{K} \times a) \to \gamma$ passante par un point x. Nous pouvons maintenemant répéter la preuve pour $\dim X = 2$.

Nous terminons ce paragraphe en posant la définition suivante.

Définition 3.2.1 *Soit X une variété affine irréductible vérifiant les conditions équivalentes du Théorème 3.2.2, alors on dit que la variété X est $\mathbb{K}$-réglée.*

3.3 Ensemble de Jelonek

Dans ce paragraphe nous présentons notre résultat principal disant que pour toute application polynomiale génériquement finie entre des variétés affines l'ensemble de Jelonek forme une sous-variété $\mathbb{K}$-réglée. Rappelons au début la définition introduite par Jelonek dans un article [J3].

Soient X, Y des variétés affines irréductibles.

Définition 3.3.1 *On dit qu'une application dominante polynomiale $f : X \to Y$ est finie en un point $y \in Y$ s'il existe un voisinage ouvert de Zariski $U \subset Y$ tel que la restriction $f_{|f^{-1}(u)} : f^{-1}(U) \to U$ est finie. L'ensemble des points en lesquels l'application polynomiale f n'est pas finie nous appellerons l'ensemble de Jelonek de l'application f. Nous désignerons cet ensemble par J_f.*

Dans le cas complexe cette définition est équivalente à celle de l'ensemble de points en lesquels l'application n'est pas propre (topologiquement), c'est-à-dire l'ensemble

$$J_f^T := Y \setminus \{y \in Y \text{ tel que } f^{-1}(\overline{U}) \text{ est borné pour certain voisinage ouvert } U \ni y\}.$$

En effet, supposons pour l'instant que $X, Y \subset \mathbb{C}^N$. Tout d'abord rappelons que $f : X \to Y$ est finie si et seulement si f est topologiquement propre et toutes les fibres de f sont finies. Soit $y \in Y$ tel que $y \notin J_f^T$. Par le résultat de Jelonek [J1] l'ensemble J_f^T est une hypersurface close. Alors, $U := Y \setminus J_f^T$ est un voisinage ouvert de point y. Par la définition la restriction

$$\tilde{f} := f_{|f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \longrightarrow U$$

est une application propre, et toutes les fibres de $\tilde{f}$ sont finies. Alors l'application $\tilde{f}$ est finie en point y. Ce qui montre l'inclusion

$$J_f \subset J_f^T.$$

L'inclusion réciproque est une conséquence de l'observation que toute application finie est topologiquement propre.

Nous commençons des études de la géométrie d'une application polynomiale par présentant un théorème sur l'existence d'une extension quasi-finie d'une application polynomiale.

Théorème 3.3.1 (Jelonek) *Soit X une variété affine de dimension égale au plus à n. Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble clos. Alors, pour chaque application quasi-finie $f : Z \to \mathbb{K}^n$ il existe une extension $F : X \to \mathbb{K}^n$ quasi-finie.*

Démonstration. Nous suivons l'idée de Jelonek, ([J2], théorème 5.4).
Soit $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$, et $g_1, \ldots, g_k$ des générateurs d'idéal $I(Z) \subset \mathbb{K}[X]$. Posons

$$G_x = (g_1x_1, \ldots, g_1x_m, \ldots, g_kx_1, \ldots, g_kx_m) : X \longrightarrow \mathbb{K}^{km}.$$

Désignons par $\tilde{f} : X \to \mathbb{K}^n$ une extension polynomiale de f, et ensuite posons

$$G = (\tilde{f}, g_1, \ldots, g_k, G_x) : X \longrightarrow \mathbb{K}^{n+k+km}.$$

Hors de l'ensemble Z l'application G est une injection, en plus

$$G(Z) \subset \mathbb{K}^n \times \{0, \ldots, 0\}. \tag{3.5}$$

Désignons par Π_∞ un hyperplan à l'infini de l'espace $\mathbb{P}^{n+k+km}$. Choisissons un sous-espace linéaire $L \subset \Pi_\infty$ de dimension égale à $k + km - 1$ telle que

$$1.)\quad \overline{Z} \cap L = \emptyset, \qquad 2).\quad L \cap \overline{\mathbb{K}^n \times \{0, \ldots, 0\}} = \emptyset. \tag{3.6}$$

Soit

$$\pi_L : \mathbb{P}^{n+k+km} \to \overline{\mathbb{K}^n \times \{0, \ldots, 0\}}$$

une projection dans la direction de l'espace L. Alors, parce que L ne rencontre pas l'ensemble $\overline{Z}$, la restriction de π_L à $\overline{G(X)}$ est finie. Enfin l'application

$$F = (\pi_{L|\overline{G(X)}}) \circ G$$

vérifie les conditions du théorème. □

Dans l'article [J3] Jelonek a déjà démontré que l'ensemble de Jelonek forme une hypersurface. Nous présenterons sa preuve pour le confort du lecteur.

Théorème 3.3.2 (Jelonek) *Soit X une variété de dimension égale à n. Soit $f : X \to \mathbb{K}^n$ une application géneriquement finie. Supposons que l'ensemble de Jelonek de f n'est pas vide, alors J_f forme une variété de dimension pure égale à $n-1$.*

Démonstration. Soient $x_1, \dots x_r$ des coordonnées de la variété X. Soit

$$x_i^{n_i} + \sum_{k=1}^{n_i} a_k^i(f) x_i^{n_i-k} = 0, \qquad i = 1, \dots, r \tag{3.7}$$

l'équation minimale de x_i sur le corps $\mathbb{K}(f_1, \dots, f_n) \subset \mathbb{K}(X)$. Désignons par $B(a_k^i)$ un ensemble de pôles de la fonction rationnelle a_k^i. On montrera que l'ensemble de Jelonek J_f est égal à l'ensemble $S := \bigcup_{i,k} B(a_k^i)$, où la somme est prise par tous les indices possibles i et k.

Au début supposons que l'ensemble S est vide. Alors, l'extension

$$\mathbb{K}[f_1, \dots, f_n] \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r] = \mathbb{K}[X]$$

est intégrale, et par la définition l'application f est finie, en conséquence l'ensemble de Jelonek est vide. Si S est non vide, désignons par h un polynôme qui définit S. Remarquons que

1.) $\mathbb{K}[X \setminus f^{-1}(S)] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r][h(f)^{-1}]$ 2.) $\mathbb{K}[\mathbb{K}^n \setminus S] = \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n][h^{-1}]$.

Alors

$$f^*\mathbb{K}[\mathbb{K}^n \setminus S] = \mathbb{K}[f_1, \dots, f_n][h(f)^{-1}].$$

Bien sûr toutes les fonctions a_k^i sont régulières sur la variété $\mathbb{K}^n \setminus S$ alors des coordonnées x_i sont intégrales sur l'anneau $f^*\mathbb{K}[\mathbb{K}^n \setminus S]$, et comme l'élément $h(f^{-1})$ est aussi intégral ainsi l'extension suivante

$$f^*\mathbb{K}[\mathbb{K}^n \setminus S] \subset \mathbb{K}[X \setminus f^{-1}(S)]$$

est intégrale. Alors, en tout point $y \in \mathbb{K}^n \setminus S$, l'application f est finie ce qui montre l'inclusion $J_f \subset S$.

Pour voir l'inclusion réciproque, supposons que l'application f est finie en un point $y \in \mathbb{K}^n$. Alors il existe un voisinage affine ouvert U tel que l'extension $f^*\mathbb{K}[U] \subset \mathbb{K}[f^{-1}(U)]$ est intégrale. Nous pouvons supposer que U est de la forme suivante:

$$U = \mathbb{K}^n \setminus \{x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } g(x) = 0\}$$

pour un polynôme g. Alors, par le lemme 2.2.2 appliqué à $A = \mathbb{K}[f_1, \dots, f_n]$, tous les coefficients des équations minimales (3.7) appartiennent à l'anneau $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_n][g(f)^{-1}]$. En conséquence toutes les fonctions $a_k^i \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n][g^{-1}]$ sont régulières en U, c'est-à-dire U fait partie de $\mathbb{K}^n \setminus S$. Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Nous avons une présentation très utile suivante d'un ensemble de Jelonek.

Proposition 3.3.1 *Soient $X \subset \mathbb{K}^n, Y \subset \mathbb{K}^m$ des variétés affines irréductibles. Alors l'ensemble de Jelonek d'une application polynomiale dominante $f : X \to Y$ se présente sous la forme:*

$$J_f = \pi(\overline{graph(f)} \setminus graph(f)),$$

où $\pi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{K}^m \to Y$ est une projection naturelle, et par $\overline{graph(f)}$ nous entendons une adhérence projective en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{K}^m$.

Démonstration. Tout d'abord notons, qu'en prenant des normalisations nous pouvons supposer que X et Y sont normales.

Supposons que l'application f soit finie en un point y, alors il existe un voisinge ouvert U du point y tel que la restriction

$$f_{|f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \longrightarrow U$$

est un morphisme algébriquement propre. Soit $S := \pi^{-1}(U) \cap \overline{\mathrm{graph}(f)}$. La restriction de la projection

$$\pi_{|S} : S \longrightarrow U$$

est aussi algébriquement propre. Nous avons ainsi un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dr, "\pi"] & \\
f^{-1}(U) \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"] & & U
\end{tikzcd}$$

où g est une application du graphe, c'est-à-dire $g(x) = (x, f(x))$. Par l'observation 2.3.1 l'application g est propre, ainsi g est close. Alors, $\overline{g(f^{-1}(U))} = S$ car l'ensemble $g(f^{-1}(U))$ fait une partie dense dans S. Ce qui montre que le point y n'appartient pas à l'ensemble $\pi(\overline{\mathrm{graph}(f)} \setminus \mathrm{graph}(f))$, en conséquence

$$\pi(\overline{\mathrm{graph}(f)} \setminus \mathrm{graph}(f)) \subset J_f. \tag{3.8}$$

Réciproquement, si le point y n'appartient pas à l'image par la projection de l'ensemble $\overline{\mathrm{graph}(f)} \setminus \mathrm{graph}(f)$, il suffit de prendre comme un voisinage ouvert de Zariski du point y l'ensemble U de la forme

$$U = Y \setminus \pi(\overline{\mathrm{graph}(f)} \setminus \mathrm{graph}(f)),$$

en lequel la restriction $f_{|f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$ est finie. Exactement, c'est une conséquence des observations suivantes. L'inclusion $\pi^{-1}(U) \cap \overline{\mathrm{graph}(f)} \subset \mathrm{graph}(f)$ nous assure que la restriction $\tilde{\pi} : \pi^{-1}(U) \cap \overline{\mathrm{graph}(f)} \to U$ est algébriquement propre. En plus, toutes les fibres de $\tilde{\pi}$ sont finies. Comme l'application g est un isomorphisme entre des ensembles $\pi^{-1}(U) \cap \overline{\mathrm{graph}(f)}$ and $f^{-1}(U)$, elle est aussi finie, alors f est finie en le point Y ce qui montre l'inclusion réciproque à (3.8). $\square$

On termine par notre théorème principal.

Théorème 3.3.3 *Soit $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application génériquement finie. Alors soit l'ensemble de Jelonek J_f est une variété $\mathbb{K}$-réglée de dimension pure égal à $n-1$ soit c'est un ensemble vide.*

Le théorème 3.3.2 dit que l'ensemble de Jelonek forme une variété de dimension $n - 1$. Il nous reste alors, de démontrer que cet ensemble est $\mathbb{K}$-réglé. Au début, nous allons démontrer un cas spécial.

Lemme 3.3.1 *Soit V une variété affine, telle que $\mathbb{K}^2 \subset V$ est un sous-ensemble ouvert et dense. Soit $f : V \to \mathbb{K}^m$ une application géneriquement finie. Alors soit l'ensemble de Jelonek J_f est une union des courbes paramétriques, soit c'est un ensemble vide.*

Démonstration. Nous avons vu que l'ensemble de Jelonek est égal à l'image d'ensemble $Y = \overline{\operatorname{graph}(f)} \setminus \operatorname{graph}(f) \subset \mathbb{P}^2(V) \times \mathbb{K}^m$ sous la projection canonique $\pi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$ (proposition 3.3.1). Grâce à la proposition 3.1.4, l'ensemble Y est $\mathbb{K}$-réglé car graph(f) est isomorphique avec la variété V dans laquelle une copie d'espace $\mathbb{K}^2$ fait une partie dense et ouverte. En conséquence J_f est une union des courbes paramétriques car par le théorème 3.3.2 $\dim J_f = 1$. □

Pour la preuve de la situation générale nous aurons besoin encore d'un lemme auxiliaire.

Lemme 3.3.2 *Soit γ une courbe irréductible. Alors il existe un nombre fini des points $x_1, \ldots, x_k \in \gamma$ tel qu'il existe une immersion $\iota : (\gamma \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}) \to \mathbb{K}^2$ telle que son image dans $\mathbb{K}^2$ est un ensemble clos.*

Démonstration. Soit $\varphi : \gamma \to \mathbb{K}^2$ un morphisme birationnel du théorème 2.3.1. Soit $(x_1, y_1) \ldots, (x_k, y_k)$ tous les points singuliers de $\varphi(\gamma)$. Par changement des coordonnées, nous pouvons supposer que $y_i \neq 0$ pour tout i. Posons

$$S := \varphi^{-1}(\varphi(\gamma) \cap V((x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k))).$$

Ensuite prenons une application $f : \mathbb{K}^2 \ni (x, y) \to (x, (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k)y) \in \mathbb{K}^2$, et remarquons que l'application $\iota = f^{-1} \circ \varphi : \gamma \setminus S \to \mathbb{K}^2$ est une immersion close. □

Preuve du théorème 3.3.3. Soit $y \in J_f$ un point, on va démontrer qu'il existe une courbe paramétrique dans l'ensemble J_f passant par ce point. Tout d'abord nous prenons, comme d'habitude, une factorisation de l'application f par l'application du graphe

$$g : \mathbb{K}^n \ni x \longrightarrow (x, f(x)) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m$$

et de la projection canonique π en restriction sur $\overline{\operatorname{graph}(f)} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{K}^m$, c'est-à-dire $f = \pi \circ g$. Soit $z = (x, y)$ un point appartenant à la fibre $\pi^{-1}(y)$ tel que $z \in \overline{\operatorname{graph}(f)} \setminus \operatorname{graph}(f)$. Soit Γ une courbe faisant partie du graphe de l'application f telle que $z \in \overline{\Gamma}$. Désignons par γ une image de la courbe Γ par la projection sur $\mathbb{K}^n$. Par le lemme auxiliaire il existe un ensemble fini de points $x_1, \ldots, x_k$ faisant partie de la courbe γ, tel qu'il existe une immersion

$$\iota : (\gamma \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}) \longrightarrow \mathbb{K}^2.$$

Désignons par $\tilde{\gamma}$ une courbe $\gamma \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$. Grâce au théorème 3.3.1, il existe une extension quasi-finie $\phi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^n$ de l'application $\iota^{-1} : \iota(\tilde{\gamma}) \to \gamma$. On déduit de la version de Grothendieck du Zariski's Main Theorem l'existence d'une variété affine V telle que $\mathbb{K}^2 \subset V$ est un sous-ensemble dense, et l'existence d'une application finie $\Phi : V \to \mathbb{K}^n$ telle que $\Phi_{|\mathbb{K}^2} = \phi$. Posons maintenant $\varphi := f \circ \Phi$. On voit que f n'est pas finie le long de la courbe γ, alors pour tout voisinage ouvert U du point y l'application f n'est pas finie en l'ensemble $\Phi(\varphi^{-1}(U)) \subset f^{-1}(U)$. Pour tout sous-ensemble $U \subset \mathbb{K}^m$ on a

$$\varphi_{|\varphi^{-1}(U)} = f_{|f^{-1}(U)} \circ \Phi_{|\varphi^{-1}(U)},$$

alors $y \in J_\varphi$. Ainsi, grâce au Lemme 3.3.1, il existe une courbe paramétrique l dans J_φ passant par un point y. Il nous reste à montrer qu'en effet cette courbe fait partie de J_f.

Pour se convaincre, remarquons que $J_\varphi \subset J_f$. Exactement, soit $u \in \mathbb{K}^m \setminus J_f$, ainsi il existe un voisinage affine ouvert U du point u tel que

$$f_{|f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \longrightarrow U$$

est une application finie, alors $\varphi_{|\varphi^{-1}(U)}$ comme une composition d'applications finies est aussi finie. En conséquence $J_\varphi \subset J_f$, ce qui montre que $y \in l \subset J_\varphi \subset J_f$. $\square$

3.4 Sur l'application séparable

Ce paragraphe aborde l'étude d'une application séparable à l'aide de dérivations. Au début, nous rappelons le résultat classique qui caractérise l'extension séparable dans un langage de dérivations (Cf. [L], proposition X.7.7). Inspiré par ce résultat, nous démontrons que pour qu'une application polynomiale f génériquement finie soit séparable il faut et il suffit qu'il existe un point lisse en lequel la dérivée de f est un isomorphisme. A la fin nous remarquons que toute application polynomiale $f : X \to \mathbb{A}^m$ définie sur une sous-variété affine propre $X \subset V$ d'une variété irréductible de dimension égale au plus à m admet une prolongation à une application séparable définie sur V. La terminologie vient du livre de Lang ([L]).

Rappelons qu'un élément c est séparable sur un corps E si son polynôme minimal ne possède que des racines simples. Nous avons la définition suivante d'une extension séparable.

Définition 3.4.1 *On dit qu'une extension algébrique des corps $E \subset F$ est séparable si tout élément $c \in F$ est une racine simple de son polynôme minimal de dépendance algébrique sur E.*

La famille des extensions algébriques séparables des corps constituent une classe distinguée, c'est-à-dire une classe $\mathcal{W}$ pour laquelle les conditions suivantes sont remplies:

1. Soient $E \subset F \subset G$ des extensions. Alors, une extension $E \subset G$ appartenant à $\mathcal{W}$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset G$ appartiennent à $\mathcal{W}$.
2. Soient $E \subset F$ une extension appartient à $\mathcal{W}$, et $E \subset G$ une extension quelconque. Alors, $G \subset FG$ appartient à $\mathcal{W}$.
3. Si des extensions $E \subset F$ et $E \subset G$ appartiennent à $\mathcal{W}$, alors $E \subset FG$ appartient à $\mathcal{W}$.

La propriété d'être une extension séparable est assez forte. Par exemple, pour chaque extension séparable des corps $E \subset F$ il existe un élément primitif, c'est-à-dire un élément $c \in F$ tel que $E(c) = F$, voir par exemple ([L], théorème VII.6.14).

Nous avons une définition naturelle d'une application séparable.

Définition 3.4.2 *Soient X, Y des variétés affines. Nous disons qu'une application dominante $f : X \to Y$ est séparable si l'extension de corps $f^*(\mathbb{K}(Y)) \subset \mathbb{K}(X)$ donnée par f est séparable.*

Pour mieux comprendre les propriétés géométriques des applications séparables nous rappelons une liaison entre des dérivations et des extensions séparables. Nous commencerons par la définition d'une dérivation.

Définition 3.4.3 *Soit R un anneau. On dit qu'une application $D : R \to R$ est une dérivation de R si pour tout $x, y \in R$ on a:*

1. $D(x + y) = Dx + Dy,$
2. $D(xy) = xDy + yDx.$

Si $S \subset R$ est une sous-structure telle que $D_{|S} = 0$ on dit que la dérivation D est triviale sur S.

La proposition suivante, nous donne une caractérisation d'une extension séparable en terme de dérivations.

Proposition 3.4.1 *Soit $E \subset F$ une extension de corps finement engendrée. Alors l'extension $E \subset F$ est algébrique et séparable si et seulement si toute dérivation de F triviale sur E est triviale partout.*

Pour la preuve voir: ([L], proposition X.7.7).

Nous avons une généralisation immédiate de la proposition précédente qui nous permet de vérifier si l'application polynomiale $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ est séparable en terme de son jacobien. Plus exactement, nous avons la variante suivante de la proposition X.7.8 de [L].

Proposition 3.4.2 *Une application polynomiale dominante $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ est séparable si et seulement si $Jac(f) \neq 0$.*

Démonstration. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées de l'espace $\mathbb{A}^n$. On va vérifier, en utilisant la proposition précédente, quand l'extension $\mathbb{K}(f) \subset \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ est algébriquement séparable. Posons pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ un polynôme

$$F_i(X) := f_i(X) - f_i(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}(f)[X].$$

Soit D une dérivation de $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ triviale sur $\mathbb{K}(f)$.

Des égalités $DF_i = 0$ forme un système linéaire en variables Dx_j:

$$F := \{0 = DF_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} Dx_j, i = 1, \ldots, n\}.$$

Si $Jac(f) \neq 0$ alors, le système F est non-singulier et, en conséquence, il admet une seule solution $Dx_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$. Ce qui montre, grâce à la proposition 3.4.1, que l'extension $\mathbb{K}(f) \subset \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ est séparable.

Supposons maintenant que $Jac(f) = 0$. Selon cette hypothèse le système F admet plusieurs solutions non triviales. En choisissent une telle on obtient une dérivation triviale sur $\mathbb{K}(f)$ et non triviale sur $\mathbb{K}(x_1, \ldots x_n)$. En conséquence l'application f n'est pas séparable. □

Dans le cas arbitraire nous avons la condition suivante équivalente à la séparabilité d'une application polynomiale.

Proposition 3.4.3 *Soient X, Y des variétés affines. Alors une application polynomiale dominante, génériquement finie $f : X \to Y$ est séparable si et seulement s'il existe un point lisse $x \in X$ tel que la derivée*

$$d_x f : T_x X \longrightarrow T_{f(x)} Y$$

et un isomorphisme.

Démonstration. Par l'hypothèse sur f, l'extension $\mathbb{K}(f) \subset \mathbb{K}(X)$ est algébriquement finie. Désignons par $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées de X, c'est-à-dire $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, et supposons que Y fait une partie de l'espace $\mathbb{A}^m$, ainsi $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Supposons maintenant que f est séparable. Alors, grâce au théorème sur l'existence d'un élément primitif, il existe $c \in \mathbb{K}(X)$ tel que

$$\mathbb{K}(f, c) = \mathbb{K}(X). \tag{3.9}$$

Désignons par Z le spectre premier de l'anneaux $\mathbb{K}[f, c]$. On peut identifier Z comme une sous-variété irréductible de $Y \times \mathbb{K}$ birationelle à X par une application φ induite de l'égalité (3.9), c'est-à-dire

$$\varphi : X \ni x \mapsto (f(x), c(x)) \in Z.$$

En plus Z est décrit par un polynôme irréductible de la forme:

$$Q(f, t) = t^k + a_1(f)t^{k-1} + \cdots + a_k(f), \tag{3.10}$$

où $a_i \in \mathbb{K}(f)$ et $Q(f, c) = 0$. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} T_x X \arrow[r, "{(df, dc)}"] \arrow[dr, "df"'] & T_{\varphi(x)} Z \arrow[d] \\ & T_{f(x)} Y. \end{tikzcd}$$

Grâce à la séparabilité, l'équation (3.10) n'admet pas de racines multiplies, alors $\frac{\partial Q}{\partial t} \neq 0$. En conséquence $d_z c$ s'écrit sous la forme:

$$d_z c = -\frac{\sum_i \frac{\partial Q}{\partial f_i} d_z f_i}{\frac{\partial Q}{\partial t}},$$

cela signifie que dc fait partie de l'espace engendré par df_i, $i = 1, \ldots, m$ sur un ensemble ouvert, en conséquence df est un isomorphisme sur un ensemble ouvert non-vide.

Pour la réciproque, supposons qu'il existe un point lisse $x \in X$ tel que $d_x f$ est un isomorphisme. Considérons des espaces cotangeantes $T_x^* X$ et $T_{f(x)}^* Y$ pour lesquels, par l'hypothèse, l'application

$$df^* : T_{f(x)}^* Y \ni d\alpha \mapsto d(\alpha \circ f) \in T_x^* X$$

est un isomorphisme. Ainsi

$$< dx_1, \ldots, dx_n > = < df_1, \ldots, df_m >, \tag{3.11}$$

ici par $< a, \ldots, b >$ nous notons l'espace engendré par $a, \ldots, b$. Soit $h \in \mathbb{K}(X)$, alors

$$\operatorname{grad} h = \sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{grad} f_i, \tag{3.12}$$

où $\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$. Supposons maintenant que D est une dérivation triviale sur $\mathbb{K}(f)$. Les égalités (3.11) et (3.12) montrent que

$$Dh = (\operatorname{grad} h | Dx) = \sum a_i (\operatorname{grad} f_i | Dx) = 0,$$

où $(|)$ désigne un produit scalaire et Dx un vecteur $(Dx_1, \ldots, Dx_n)$. C'est qu'il fallait démontrer. □

Nous terminons ce paragraphe en présentant l'observation suivante sur des extensions des applications.

Proposition 3.4.4 *Soit $V \subset \mathbb{A}^N$ une variété affine irréductible de dimension n. Soit $X \subset V$ une sous-variété propre, et $f : X \to \mathbb{A}^m$ une application polynomiale, où $n \leq m$. Alors, il existe une application séparable $F : V \to \mathbb{A}^m$ telle que $F_{|X} = f$. En plus, si l'application f est finie on peut trouver une extension F aussi finie.*

Démonstration. Soient $x_1, \ldots, x_n$ des coordonnées d'une variété V. Soit $(g_1, \ldots, g_k)$ un idéal de la variété X. Soit $\tilde{f}$ une extension polynomiale de l'application f à V. Considérons ensuite l'application

$$\phi = (\tilde{f}, g_1, \ldots, g_k, g_i\pi_j)_{(i,j)} : V \longrightarrow \mathbb{A}^{m+k+kn},$$

où $\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j$. L'application ϕ est birationelle sur image car on peux calculer des indeterminées x_i à l'aide de fonctions g_j. En conséquence ϕ est séparable. Soit $y \in \phi(V)$ un point lisse. Désignons par $\mathcal{V}$ une sous-espace de $\mathbb{A}^{m+k+kn}$ de dimension $k + kn$ telle que:

1. l'intersection $\mathcal{V} \cap T_y\phi(V)$ est transversale,

2. l'intersection $\overline{\mathcal{V}} \cap \overline{\phi(V)} \cap \Pi_\infty$ est vide, où Π_∞ désigne un hyperplan à l'infini.

Posons $\pi : \mathbb{A}^{m+n+kn} \to \mathbb{A}^m$ la projection dans la direction du sous-espace $\mathcal{V}$. Grâce à la proposition précédente une restriction $p_2 := \pi_{|\phi(V)}$ est une application séparable. Alors $F = p_2 \circ \phi$ est l'application séparable que nous avons cherchée, en effet $F_{|X} = f$ et, comme la composition des applications séparables, est aussi séparable.

Remarquons à la fin, que si f est une application finie nous pouvons légèrement modifier la construction de l'application ϕ. Dans ce cas, l'extension $\mathbb{K}[f] \subset \mathbb{K}[X]$ est intégrale. Soit

$$h_i(x_i) = x_i^{s_i} + x_i^{s_i - 1}u_{i1} + \cdots + u_{is_i}$$

un polynôme de la dépendance intégrale de x_i sur $\mathbb{K}[f]$ pour $i = 1, \ldots, n$. Considérons maintenant une application

$$\phi = (\tilde{f}, g_1, \ldots, g_k, g_i\pi_j, h_1 \circ \pi_1, \ldots, h_n \circ \pi_n)_{(i,j)},$$

qui par la construction est finie. Nous pouvons choisir un sous-espace $\mathcal{V}$ comme dans la première partie de la preuve pour obtenir une projection $p_2 : \phi(V) \to \mathbb{A}^m$ séparable et finie. Alors, comme une composition des applications finies, $F := p_2 \circ \phi$ est aussi finie. □

Définition 3.4.4 *On dit qu'une variété affine irréductible X de dimension égale à n est séparablement $\mathbb{K}$-réglée s'ils existent une variété R de dimension $n - 1$ et un morphisme $\phi : \mathbb{K} \times R \to X$ séparable et dominant.*

3.5 Contre-exemple

La caractéristique positive fait naître une question naturelle, si l'ensemble de Jelonek d'une application séparable forme toujours une variété séparablement $\mathbb{K}$-réglée. Cette question est triviale dans le cas complexe, parce que dans se cas toutes les applications polynomiale sont séparables. Ainsi ce problème est important pour diverses applications. Si la conjecture soit vraie, on pourrait généraliser directement plusieurs résultats de cas complexe dans lesquels on utilise la propriété de l'ensemble de Jelonek d'être séparablement $\mathbb{K}$-réglé.

Malheureusement la réponse est négative. C'est-à-dire il existe une application séparable pour laquelle la variété asymptotique n'est pas séparablement dominée par un cylindre. Inspiré par des méthodes de Kollár et Jelonek nous décrirons une construction d'un tel exemple.

Dans l'article [K1] Kollár a démontré le résultat suivant:

Théorème 3.5.1 *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p. Alors la surface $Z \subset \mathbb{K}^3$ définié par une équation $z^p - g(x, y) = 0$ n'est pas séparablement $\mathbb{K}$-réglée pour un polynôme g suffisamment arbitraire.*

Remarquons que Z ainsi définie est une surface rationelle, car on peut prendre une paramétrisation

$$\phi : \mathbb{K}^2 \ni (u, v) \longmapsto (u^p, v^p, \sqrt[p]{g(u^p, v^p)}) \in Z,$$

en conséquence elle est $\mathbb{K}$-réglée.

Pour trouver un exemple il nous ne reste que de construire une application séparable génériquement finie $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ telle que $J_f = Z$. Posons

$$W = \{(u, v, w) \in \mathbb{K}^3 \text{ tels que } w^2 - uv - 1 = 0\}$$

et désignons par V l'ensemble $\mathbb{K} \times W$. Il existe une immersion

$$\iota : \mathbb{K}^3 \ni (x, y, z) \longrightarrow (z, x(2 + xy), y, 1 + xy) \in V.$$

Grâce à la construction, l'ensemble $X = V \setminus \iota(\mathbb{K}^3)$ est isomorphe avec l'espace $\mathbb{K}^2$. Alors, il existe une application dominante $\varphi : X \to Z$. En utilisant la proposition 3.4.4 nous pouvons trouver une extension séparable d'application φ, dit $\Phi : V \to \mathbb{K}^3$. Posons maintenant $f := \Phi \circ \iota$, définie ainsi f est séparable et $J_f = Z$.

4 Algorithme effectif

4.1 Rappels sur des bases de Gröbner

Ici, nous rappelons seulement des définitions et des propriétés de la théorie des bases de Gröbner qui nous serviront dans des calculs.

Dans la suite nous dénotons par $\mathbb{A}_i^n$ une partie affine de $\mathbb{P}^n$ telle que $x_i \neq 0$.

Soit „ $<$ ” un ordre strict défini en $\mathbb{N}^n$ admettant des propriétés:

1. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}, \;\; 0 < \alpha$
2. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n, \quad \text{si } \alpha < \beta \;\text{ alors }\; \alpha + \gamma < \beta + \gamma.$

Soit $P = \sum a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ un polynôme. Posons

$$Gdeg(P) := max\{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid a_\alpha \neq 0\},$$

on définit par

$$inP := a_{Gdeg(P)} x^{Gdeg(P)}$$

la forme initiale d'un polynôme P. Sous cette notation nous avons la définition suivante:

Définition 4.1.1 *Soit I un idéal. Un sous-ensemble fini $B \subset I$ s'appelle une base de Gröbner de l'idéal I si l'ensemble $\{inP \mid P \in B\}$ engendre l'idéal engendré par toutes les formes initiales de l'idéal I.*

Remarquons que toute base de Gröbner d'un idéal I fait aussi un ensemble de générateurs de I. Il existe des algorithmes arithmétiques simples qui calculent des bases de Gröbner. Malheureusement la complexité de ces algorithmes empêche de faire de calculs lorsqu'on considère un grand nombre de variables.

Dans notre procédure nous utiliserons les ordres suivants:

1. l'ordre lexicographique:

   $\alpha <_L \beta$ si et seulement si $\alpha_k = \beta_k$ pour $k < l$ et $\alpha_l < \beta_l$,

2. l'ordre inverse-lexicographique gradué:

   $\alpha <_G \beta$ si et seulement si:
   soit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \beta_i$,
   soit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ et $\alpha_l = \beta_l$ pour $l > k$ et $\alpha_k > \beta_k$.

3. l'ordre inverse-lexicographique gradué et séparé en $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$:

   $(\alpha, \beta) <_{SG} (\gamma, \delta)$ si et seulement si $\alpha <_G \gamma$ ou $(\alpha = \gamma$ et $\beta <_G \delta)$.

4.2 Algorithme

Dans ce paragraphe nous donnerons une méthode effective pour trouver des équations de l'ensemble de Jelonek.

Théorème 4.2.1 *Il existe un algorithme effectif:*

INPUT*:*

- $\diamond$ *$I(X)$ un idéal d'une variété affine $X \subset \mathbb{A}^n$,*
- $\diamond$ *$f = (f_1, \ldots, f_m) : X \to Y \subset \mathbb{A}^m$ une application polynomiale dominante.*

OUTPUT*: $I(J_f)$ un idéal d'un ensemble de Jelonek de f.*

Nous démontrerons ce théorème par la suite des observations.

Observation 4.2.1

1. *L'idéal d'un ensemble*

$$graph(f) = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = y\} \subset X \times Y$$

est d'une forme $(I(X), f_1 - y_1, \ldots, f_m - y_m) = I$, où $I(X)$ désigne l'idéal d'un ensemble X.

2. *Si on considère en $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^m$ l'ordre inverse-lexicographique gradué et séparé, alors la base de Gröbner B_x de l'idéal de l'adhérence projective de l'ensemble $graph(f)$ en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ est une homogénéisation (respectivement à des variables x_i) de la base de Gröbner B de l'idéal I.*

3. *L'idéal de l'ensemble $\overline{graph(f)} \setminus graph(f)$ est engendré par (B_x, x_{n+1}).*

Démonstration. 1. Comme l'ensemble graph(f) est isomorphe à la variété X il suffit de remarquer que l'anneau $\mathbb{K}[X][y_1, \ldots, y_m]/(f_1 - y_1, \ldots, f_m - y_m)$ est isomorphe à l'anneau des coordonnées $\mathbb{K}[X]$.

2. Remarquons, que grâce à l'ordre inverse - lexicographique, pour tout $P \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ nous avons $inP = inP_x$, où $P_x \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]$ est une homogénéisation d'un polynôme P. Exactement, si $P = inP + \sum a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, alors

$$P_x = inP + \sum a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{d-|\alpha|},$$

ici $d = \deg P$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, alors tout de suite de la définition de l'ordre inverse - lexicographique gradué nous avons l'égalité $inP_x = inP$. La homogénéisation des variables x de $P \in \mathbb{K}[x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n]$ par x_{n+1} ne change pas de dégré de P par rapport aux variables y car nous considérons l'ordre separé. Alors nous avons toujours l'égalité

$$inP = inP_x$$

pour tous les polynômes dans les anneaux considerés. Cela signifie que la base de Gröbner de l'idéal $I(\overline{\text{graph}(f)})$ est de la forme suivante:

$$B_x = \{P_x | P \in B\}.$$

3. La dernière égalité nous dit aussi, qu'en effet

$$I(\overline{\mathrm{graph}(f)} \setminus \mathrm{graph}(f)) = rad < (B_x, x_{n+1}) > . \quad \square$$

Observation 4.2.2 *Soit $V \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ un sous-ensemble algébrique. Soit B la base de Gröbner de son idéal $I(V)$ par rapport à l'ordre lexicographique. Soit $\pi : \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^m$ une projection naturelle. Alors*

1. *$I(\pi(V)) = I(V) \cap \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$,*
2. *$B_\pi := B \cap \mathbb{K}[y_1, \ldots, y_m]$ forme une base de Gröbner de l'idéal $I(\pi(V))$ par rapport à l'ordre lexicographique.*

Démonstration. 1. La première observation vient directement de la définition d'un idéal d'un ensemble.

2. Pour la deuxième, désignons par G une base de Gröbner de I par rapport à l'ordre lexicographique. Remarquons que, si $I \subset R[X_1, \ldots, X_n]$ est un idéal tel que

$$I_k := I \cap R[X_k, \ldots, X_n] \neq \{0\},$$

alors l'ensemble $G_k := G \cap R[X_k, \ldots, X_n]$ est une base de Gröbner de l'idéal I_k. Exactement, si $Q \in I_k$, alors il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_s \in G$ tels que $Q = \sum_{i=1}^{s} W_i P_i$ et $Gdeg(W_i P_i) \leq_L GdegQ$, cela montre que $P_i \in G_k$ pour $i \in \{1 \ldots, s\}$. $\square$

Observation 4.2.3 *Soit I_i un idéal radical pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $\{f_1^i, \ldots, f_{s_i}^i\}$ une base de I_i. Alors*

$$I := I_1 \cap \ldots \cap I_n = rad(f_{j_1}^1 \cdots f_{j_n}^n),$$

où $j_i \in \{1, \ldots, s_i\}$.

Démonstration. Remarquons que, grâce à la récurrence, il suffit de démontrer cette observation en cas $n = 2$. En ce cas on a immédiatement

$$V((f_1, \ldots, f_k) \cap (g_1, \ldots, g_l)) = V((f_i g_j)),$$

ce qui justifie l'observation. $\square$

Preuve du théorème 4.2.1. Remarquons que grâce à la Proposition 3.3.1, l'ensemble J_f forme une union des images de l'ensemble $\overline{\mathrm{graph}(f)} \setminus \mathrm{graph}(f)$ par la projection des partes affines. Notamment

$$J_f = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_i(\overline{\mathrm{graph}(f)} \setminus \mathrm{graph}(f)),$$

où $\pi_i = \pi_{|\mathbb{A}_i^n \times \mathbb{A}^m}$ est une restriction de la projection. Maintenant, pour obtenir des équations de l'ensemble de Jelonek, nous avons une procédure:

1. Déterminer la base de Gröbner par rapport à l'ordre lexicographique gradué et séparé de l'idéal $(I(X), f_1 - y_1, \ldots, f_m - y_m)$.
2. Déterminer la base de Gröbner d'idéal d'ensemble $\overline{\mathrm{graph}(f)} \setminus \mathrm{graph}(f)$, comme dans la proposition 4.2.1.

3. Déterminer des bases de Gröbner B_{π_i} (où $i = 1, \ldots, n$) des idéaux $I(\pi_i(S))$, comme dans la proposition 4.2.2.

Finalement, nous obtenons l'égalité $J_f = \bigcup_{i=1}^n V(B_{\pi_i})$, où $V(B_{\pi_i})$ est un ensemble de zéros d'idéal engendré par B_{π_i}. Il nous manque seulement de savoir comment déterminer la base de Gröbner d'un radical. Heureusement, il existe un algorithme „RADICAL" qui le fait. Cet algorithme est presenté par exemple dans le livre sur les bases de Gröbner [BWe]. Alors, grâce à la proposition 4.2.3 nous pouvons donner des équations de l'ensemble J_f, et en plus nous pouvons calculer la base de Gröbner de l'idéal de cet ensemble. □

Example 4.2.1 Soit $X = \{z^2 + xy - 1 = 0\}$ et $Y = \mathbb{C}^2$, considérons l'application

$$f : X \ni (x, y, z) \longrightarrow (x - z, y + z) \in Y.$$

La base de Gröbner par rapport à l'ordre séparé gradué de son graphe est de la forme:

$$\{xy + z^2 - 1, x - z - u, y + z - v, -uz + vz + uv - 1\}.$$

Après la homogénéisation par t accordée aux variables x, y, z nous obtenons une base de l'idéal de $\overline{\mathrm{graph}(f)} \setminus \mathrm{graph}(f)$ sous la forme:

$$\{xy + z^2 - t^2, x - z - ut, y + z - vt, -uz + vz + uvt - t, t\}.$$

Maintenant nous calculons la base de Gröbner par rapport à l'ordre lexicographique dans toutes les parties affines:

- ◇ pour $x = 1$ nous avons $B_{\pi_1} = \{y + 1, z - 1, t, u - v\} \cap \mathbb{K}[u, v] = \{u - v\}$,
- ◇ pour $y = 1$ nous avons $B_{\pi_2} = \{x + 1, z + 1, t, u - v\} \cap \mathbb{K}[u, v] = \{u - v\}$,
- ◇ pour $z = 1$ nous avons $B_{\pi_3} = \{x - 1, y + 1, t, u - v\} \cap \mathbb{K}[u, v] = \{u - v\}$.

Alors l'ensemble de Jelonek de l'application f est de la forme $J_f = \{u - v = 0\}$.

Remarquons à la fin que la théorème 4.2.1 donne une méthode effective pour vérifier si l'application est finie. Notamment, l'application polynomiale dominante $f : X \to Y$ est finie si et seulement si l'ensemble J_f est un ensemble vide. Alors l'application f est finie si et seulement s'il existe au moins un non-zéro élément $a_i \in \mathbb{K}$ dans chaque base de Gröbner B_{π_i}, $i = 1, \ldots, n$.

Partie II

Dans le monde réel

Dans le cas réel l'ensemble de Jelonek forme un ensemble semi-algébrique, c'est-à-dire un ensemble défini par des équations et des inégalités polynomiales. La géométrie de cet ensemble est plus riche que celle considerée sur un corps algébriquement clos. Notamment dans la situation réelle l'ensemble de Jelonek admet des composantes de dimension variée tandis que dans l'autre cas il forme toujours une hypersurface, voir le théorème 6.0.1. Bien évidemment, la variété asymptotique d'une application polynomiale réelle f fait partie de la variété asymptotique de la complexification de f. Pour obtenir une description de l'ensemble de Jelonek dans le cas réel nous ne pouvons plus utiliser la méthode proposée dans le chapitre précédent, car la procédure ne marche que dans le cas algébriquement clos. Ici, nous proposons de regarder le problème de détermination de la variété asymptotique en utilisant des méthodes topologiques. Ensuite, nous donnons la description de l'ensemble de Jelonek en terme de fonctions algébriquement constructibles. Cette méthode permet d'obtenir la description effective dans le cas générique.

5 Topologie d'une application polynomiale

5.1 Revêtements

Rappelons la définition d'un revêtement. Soient X, Y des espaces topologiques séparées. On dit que l'application $f : X \to Y$ est un revêtement si pour tout point $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert $V \subset Y$ de y tel que $f^{-1}(V)$ est une union disjointe des ouverts U_i satisfaisant la condition suivante

pour tout i la restriction $f_{|U_i} : U_i \to V$ est un homéomorphisme.

On dit que le revêtement $f : X \to Y$ est fini si toutes les fibres de f sont finies.

Observation 5.1.1 *Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme local des espaces topologiques séparées, tel que $\sharp f^{-1}(y) = k$ pour tout $y \in Y$. Alors f est un revêtement fini.*

Démonstration. Soit $y \in Y$, posons $\{x_1, \dots, x_k\} = f^{-1}(y)$. Choisissons $V_1, \dots, V_k$ des voisinages ouverts disjoints des points $x_1, \dots, x_k$ tels que la restriction

$$f_{|V_i} : V_i \longrightarrow f(V_i)$$

est un homéomorphisme pour chaque i. Or, l'ensemble $W := \bigcap_{i=1}^{k} f(V_i)$ est un voisinage ouvert de y. Ainsi $W_i := f^{-1}(W) \cap V_i$ est un voisinage ouvert de x_i pour chaque i. Pour W et W_i définis ainsi, on obtient directement $f(W_i) = W$ et $f^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ ce qui montre que f est un revêtement. □

Nous avons aussi une caractérisation d'un revêtement dans un langage d'application propre:

Observation 5.1.2 *Soit $f : X \to Y$ une fonction entre deux espaces séparés. Alors, f est un homéomorphisme local propre si et seulement si f est un revêtement fini.*

Pour la preuve voir l'observation p.78 dans [Ł]. □

Directement des observations précédentes on a le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.1 *Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme local entre deux espaces localement compacts. Si le nombre de points en toute fibre est fini et constant, alors la fonction f est propre.*

5.2 Fonctions constructibles et link

Nous rappelons ici la notation des fonctions algébriquement constructibles qui ont été introduites par McCrory et Parusiński dans les travaux [MP1] et [MP2]. Nous rappelons également des propriétés d'un link qui était étudié par Coste et Kurdyka [CK1]. Ces notions nous serviront dans la description de l'ensemble de Jelonek dans le cas réel. Tous ce que concerne des propriétés de fonctions constructibles de même qu'un link vient des articles [MP1] et [CK1] et [CK2].

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble algébrique réel. Dans la suite nous notons par $S(x, \varepsilon)$ une sphère centré en $x \in X$ et de rayon ε, et par S^k une sphère unitaire de dimension k. Il y a un résultat de topologie des ensembles semi-algébriques disant que pour suffisamment petit ε le type topologique de l'intersection $S(x, \varepsilon) \cap X$ est invariant (voir [AK]). L'intersection $S(x, \varepsilon) \cap X$ est notée par $lk(x, X)$ et est appelée *le link de point x dans l'ensemble X*. Si $Y \subset X$ est compact, il existe une fonction $h : X \to [0, +\infty)$ semi-algébrique, continue et propre telle que $h^{-1}(0) = Y$. Ainsi, pour suffisamment petit δ le type topologique de $h^{-1}(\delta)$ ne dépend ni de δ ni de choix de la fonction h. On note $lk(Y, X) := h^{-1}(\delta)$, et on dit *le link de Y dans X*. Remarquons, que si $f : X \to Z$ est une application semi-algébrique propre et continue, et $W \subset Z$ est un sous-ensemble compact, alors directement de la définition d'un link on a l'égalité

$$lk(f^{-1}(W), X) = f^{-1}(lk(W, Z)). \tag{5.1}$$

Exactement, soit $h : Z \to \mathbb{R}$ la fonction qui définit un link $lk(W, Z)$. La composition $h \circ f : X \to \mathbb{R}$ est propre semi-algébrique et continue, alors

$$lk(f^{-1}(W), X) = (h \circ f)^{-1}(\delta) = f^{-1}(lk(W, Z)).$$

Dans la suite on va noter la fonction caractéristique d'un ensemble X par $\mathbf{1}_X$, c'est-à-dire

$$\mathbf{1}_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit qu'une fonction $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est *constructible* s'il existe une présentation suivante:

$$\varphi = \sum m_i \mathbf{1}_{X_i}, \tag{5.2}$$

où la somme est finie, $X_i \subset X$ est un sous-ensemble semi-algébrique pour tout i et $m_i \in \mathbb{Z}$. La présentation n'est pas unique, mais on peut toujours choisir X_i fermé, et en plus, si le support de φ est compact, alors on peut trouver pour la présentation X_i aussi compact. L'ensemble de toutes les fonctions constructibles sur X forme un anneau avec l'addition et la multiplication usuelles.

Pour une fonction constructible $\varphi = \sum m_i \mathbf{1}_{X_i}$ ayant le support compact on pose la définition suivante de *l'intégrale d'Euler de* φ:

$$\int \varphi = \sum m_i \chi(X_i),$$

où $\chi(X_i)$ est une caractéristique d'Euler. Or, grâce à l'additivité de la caractéristique d'Euler et le fait que des ensembles semi-algébriques admettent une triangulation, la définition d'intégrale d'Euler ne dépend pas du choix de X_i. Pour un sous-ensemble semi-algébrique $Y \subset X$ tel que $Y \cap \operatorname{supp} \varphi$ est compact on va noter par $\int_Y \varphi$ l'intégrale d'Euler de la restriction de φ sur Y. Le lemme suivant permet de poser une définition de l'intégrale d'Euler d'une fonction constructible quelconque. Désignons par B_R une boule fermée de rayon R et au centre en 0.

Lemme 5.2.1 *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble semi-algébrique. Alors, pour R suffisamment grand, l'intersection $X \cap B_R$ est un rétract par déformation de X.*

Pour la preuve voir par exemple [PS]. Ainsi, comme $\operatorname{supp}(\varphi \mathbf{1}_{B_R})$ est compact, *l'intégrale d'Euler* d'une fonction constructible φ, donné par la formule:

$$\int \varphi = \int \varphi \mathbf{1}_{B_R},$$

où R est suffisamment grand, est bien défini. On voit, que

$$\int \mathbf{1}_X = \chi(X \cap B_R) = \chi(X). \tag{5.3}$$

L'intégrale d'Euler possède une propriété de Fubini, en effet nous avons un théorème à la Fubini pour calculer l'intégrale, voir [V].

Théorème 5.2.1 (à la Fubini) *Soit $f : X \to Y$ une application régulière d'ensembles semi-algébriques fermés. Soit $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ une fonction constructible. Alors*

$$\int_X \varphi = \int_Y \int_{f^{-1}(y)} \varphi. \tag{5.4}$$

C'est une conséquence du fait que la caractéristique d'Euler est multiplicative c'est-à-dire $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$ et du fait que l'application polynomiale est localement une fibration.

On a deux opérations très importantes sur des fonctions constructibles, un link, et une image directe, lesquelles nous rappellerons.

Définition 5.2.1 *Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble semi-algébrique, et $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ une fonction constructible. Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on appelle la fonction suivante*

$$\Lambda\varphi(x) = \int_{S(x,\varepsilon)} \varphi$$

le link de la fonction φ.

Remarque. Bien entendu, dans la définition d'un link d'une fonction constructible le nombre ε dépend du point x.

Directement de la définition on voit que Λ est un opérateur linéaire. Remarquons aussi, que si $\varphi = \sum m_i \mathbf{1}_{X_i}$, alors $\Lambda\varphi(x) = \sum m_i \chi(lk(x, X_i))$. Cette observation, en effet, justifie la définition.

Comme $\chi(S^k) = 1+(-1)^k$, alors pour un ensemble algébrique lisse X, le link de sa fonction caractéristique est donné par la formule:

$$\Lambda\mathbf{1}_X = \begin{cases} 0 & \text{si } \dim Z \in 2\mathbb{Z}, \\ 2 \cdot \mathbf{1}_X & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soient $Y \subset X$ des simplexes, $\dim X = k$, désignons par X^k la face de X de dimension k, et par ∂X l'union des faces de dimension plus petite que k. Alors, $\Lambda\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_{\partial X} + \mathbf{1}_{X^k} - \mathbf{1}^{k-1}_{X^k}$, en conséquence

$$\int_Y \Lambda\mathbf{1}_X = \begin{cases} \chi(Y) = 1 & \text{si } Y \subsetneq X, \\ 0 & \text{si Y=X} \end{cases} = \chi(lk(Y, X)).$$

Sachant que des ensembles semi-algébriques sont triangulables, l'égalité au-dessus montre l'observation suivante.

Observation 5.2.1 *Soient X, Y des ensembles semi-algébriques fermés, et Y compact, alors*

$$\chi(lk(Y, X)) = \int_Y \Lambda\mathbf{1}_X. \tag{5.5}$$

Nous rappellerons maintenant la deuxième opération importante sur des fonctions constructibles, l'image directe d'une fonction constructible.

Définition 5.2.2 *Soit $f : X \to Y$ une fonction semi-algébrique entre des ensembles algébriques. Si la restriction $f_{|\operatorname{supp}\varphi}$ est propre on définit l'image directe de φ par la formule*

$$f_*\varphi(y) = \int_{f^{-1}(y)} \varphi.$$

Soit $f : X \to Z$ une fonction semi-algébrique propre entre des ensembles semi-algébriques fermés. Alors

$$f_*(\Lambda\mathbf{1}_X)(z) \overset{\text{def}}{=} \int_{f^{-1}(z)} \Lambda\mathbf{1}_X \overset{(5.5)}{=} \chi(lk(f^{-1}(z), X) \overset{(5.1)}{=} \chi(f^{-1}(lk(z, Z)) \overset{(5.3)}{=} \int_{f^{-1}(lk(z,Z))} \mathbf{1}_X \overset{(5.4)}{=}$$
$$\int_{lk(z,Z)} \left(\int_{f^{-1}(z)} \mathbf{1}_X \right) \overset{\text{def}}{=} \int_{lk(z,Z)} f_*\mathbf{1}_1 \overset{\text{def}}{=} \Lambda(f_*1_X)(z).$$

Ce qui montre que les opérations du link et de l'image directe sont entre elles commutatives, c'est-à-dire

$$f_*\Lambda = \Lambda f_*. \tag{5.6}$$

Comme l'image d'ensemble algébrique n'est pas forcément algébrique, la définition de fonction algébriquement constructible demande une modification de la définition. Parusiński et McCrory ont introduit la définition suivante. On dit que la fonction constructible

$\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est *algébriquement constructible* s'il existe un nombre fini des fonctions régulieres et propres $f_i : Z_i \to X$ des ensembles algébriques Z_i, tel que

$$\varphi = \sum m_i f_{i*} \mathbf{1}_{Z_i},$$

où $m_i \in \mathbb{Z}$. Grâce à une telle définition, des fonctions algébriquement constructibles sont préservés sous des opérations du link et de l'image directe, ainsi ces opérations sont commutatives entre elles.

Nous avons une très jolie caractérisation d'une fonction algébriquement constructible.

Théorème 5.2.2 (Parusiński - Szafraniec) *Soit $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ une fonction algébriquement constructible d'ensemble algébrique. Alors, il existe une famille finie de polynômes $g_i \in \mathbb{R}[X]$ telle que*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} g_i(x).$$

Remarque 5.2.1 Remarquons que pour un polynôme g la fonction sgn$g(x)$ est algébriquement constructible. Pour le voir, il suffit de considérer un ensemble

$$Z := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \text{ tel que } t^2 = g(x)\}$$

et la projection $\pi : X \times \mathbb{R} \to X$. Maintenant sgn$g(x) = \pi_* \mathbf{1}_Z - \mathbf{1}_X$.

Le dernier fait important dans nos considérations est un théorème élégant qui donne la description de la caractéristique d'Euler d'une fibre d'une application polynomiale en terme des signes des polynômes.

Théorème 5.2.3 (Coste - Kurdyka) *Soit $F : X \to Y$ une fonction polynomiale des ensembles algébriques. Alors, il existe une famille finie des polynômes $g_i \in \mathbb{R}[Y]$ telle que pour tout $y \in F(X)$ on a égalité*

$$\chi(F^{-1}(y)) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} g_i(y). \tag{5.7}$$

5.3 Link local

Nous introduisons ici une fonction constructible, qui contrôle un comportement des germes de fonctions polynomiales sous une petite déformation.

Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application polynomiale des ensembles algébriques. Désignons par

$$\varphi_F : \mathbb{R}^n \ni y \longrightarrow \chi(F^{-1}(y)) \in \mathbb{Z}$$

la fonction, qui grâce aux théorèmes 5.2.3 et 5.2.2 est algébriquement constructible. Si toutes les fibres de F sont finies, alors pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ il existe un voisinage ouvert U_a de a tel que la fibre $(F_{|U_a})^{-1}(F(a))$ de la restriction de F à U_a consiste que de point a. Nous pouvons poser une définition.

Définition 5.3.1 *Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application polynomiale à fibres finies. Avec la notation ci-dessus, on appelle le nombre*

$$\lambda(a) = \Lambda(\varphi_{F_{|U_a}})(F(a))$$

le link local en a de la fonction F.

Bien entendu, en tout point régulier a de l'application F, nous avons l'égalité $\lambda(a) = \chi(S^{n-1})$, où par un point régulier nous entendons le point en lequel la dérivée est du rang maximal. C'est une conséquence du fait que dans ce cas, la fonction F en point a est un difféomorphisme local. Si l'on considère le cas $n = 2$ on peut montrer qu'en effet le link local n'est différent de zéro que sur un ensemble fini. Pour le voir, désignons par Σ_F l'ensemble de points critiques de l'application F, c'est-à-dire l'ensemble de points a vérifient l'équation $Jac(F)(a) = 0$. Ensuite, désignons par $\operatorname{Reg}\Sigma_F$ l'ensemble de points réguliers de Σ_F. Supposons, que l'ensemble de points critiques n'est pas fini et considérons $g := F_{|\operatorname{Reg}\Sigma_F}$ la restriction de F à $\operatorname{Reg}\Sigma_F$. Soit

$$A := \{x \in \operatorname{Reg}\Sigma_F \text{ tel que } \operatorname{rank} d_x g = 0\}.$$

Bien entendu, l'ensemble A est fini car toutes les fibres de F sont finies. Posons

$$\Gamma_F := \operatorname{Reg}\Sigma_F \setminus A.$$

Ainsi défini l'ensemble Γ_F est une variété lisse de dimension 1. En conséquence l'ensemble $S(F) := \Sigma_F \setminus \Gamma_F$ est fini. Si l'ensemble de points critiques est fini on pose $S(F) = \Sigma_F$. Nous avons la propriété suivante d'un link local.

Lemme 5.3.1 *Soit $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application polynomiale à fibres finies, alors en tout point $a \in \mathbb{R}^2 \setminus S(F)$ le link local vérifie $\lambda(a) = 0$.*

Pour la preuve nous aurons besoin d'un lemme auxiliaire.

Lemme 5.3.2 *Soit $a \in \Gamma_F$. Alors, après des changements analytiques de variables aux voisinages des points a et $F(a)$, l'application F s'écrit localement sous la forme:*

$$F(v, w) = (v, w^k H(v, w)), \tag{5.8}$$

où H est une fonction analytique telle que $H(0, 0) > 0$, et $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration du lemme 5.3.1. En effet, nous avons déjà vu qu'en un point régulier le link local s'annule. Supposons maintenant, que le point a fait partie de l'ensemble Γ_F. Alors grâce au lemme auxiliaire on sait qu'après un changement de variables, F s'écrit sous la forme (5.8) dans un voisinage de 0, ainsi pour suffisamment petit ε la fonction φ_F est donnée par la formule

$$\varphi_F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si soit } k \text{ non paire soit } y = 0, \\ 2 & \text{si } k \text{ paire et } y > 0 \\ 0 & \text{si } k \text{ paire et } y < 0, \end{cases} \tag{5.9}$$

où des points (x, y) vérifient $||(x, y)|| \leq \varepsilon$. Ce qui montre que $\lambda(a) = \Lambda(\varphi_F)(0, 0) = 0$. Bien entendu, ici nous considérons le germe de F.

Il nous reste à démontrer le lemme auxiliaire.

Démonstration du Lemme 5.3.2. Sans perte de généralité on peut supposer que $a = (0,0)$ et $F(a) = (0,0)$. Soit (x,y) un système de coordonnées linéaires en 0. Par l'hypothèse l'ensemble de points critiques dans un voisinage de a, est une variété lisse de dimension 1, alors nous pouvons supposer que localement il est égal à la droite $y = 0$. Aussi par l'hypothèse on sait que le rang de la dérivée de F en 0 est égal à 1. Alors, nous pouvons admettre que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne s'annule pas en 0. Ainsi, l'application

$$z : W \ni (x,y) \to (f(x,y), y) \in \mathbb{R}^2$$

est un difféomorphisme dans un voisinage W de 0. En conséquence

$$F(z^{-1}(v,w)) = (v, h(v,w)),$$

où h est une fonction analytique. Dans la suite nous identifions F avec la composition $F \circ z^{-1}$. Ainsi $Jac(F) = \frac{\partial h}{\partial w}$. Comme nous avons remarqué au début, $Jac(F) = 0$ si et seulement si $w = 0$. Alors, du théorème de Hadamard h est de la forme:

$$h(v,w) = w^k H(v,w),$$

où $k \geq 2$ et $H(v,0) \not\equiv 0$. Comme F est finie, la fonction H n'est pas divisible par v ce qui montre que $H(0,0) \neq 0$. Par changement d'orientation nous pouvons supposer que $H(0,0) > 0$, en conséquence cette inégalité est satisfaite dans un voisinage de 0. $\square$

6 Description de l'ensemble de Jelonek

Dans ce paragraphe nous démontrons un théorème qui donne une description de l'ensemble de Jelonek à l'aide de fonctions constructibles. Rappelons au début que l'ensemble de Jelonek d'une application polynomiale $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est donné par la formule:

$$J_F = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \text{ tel que } \lim_{k\to\infty} |x_k| = \infty \text{ et } \lim_{k\to\infty} F(x_k) = y\}.$$

Dans un article [J4] Jelonek a démontré que l'ensemble asymptotique d'une application polynomiale non-constante n'admet pas des points isolés. En effet, il a obtenu le résultat suivant:

Théorème 6.0.1 (Jelonek) *Pour une application polynomiale $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ non constante la dimension de toute composante connexe de l'ensemble de Jelonek est au moins égal à 1. En plus, pour tout $x \in J_f$ il existe une application polynomiale $\phi : \mathbb{R} \to J_f$ non constante, telle que $\phi(0) = x$.*

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application polynomiale. Grâce aux théorèmes 5.2.2 et 5.2.3 la fonction

$$\varphi_F : \mathbb{R}^2 \ni y \mapsto \chi(F^{-1}(y)) \in \mathbb{Z}$$

est algébriquement constructible. Ainsi, son link $\Lambda\varphi_F$ est constructible, pour une abréviation nous le désignerons Λ_F. Nous avons la description suivante de l'ensemble de Jelonek.

Théorème 6.0.2 *Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction polynomiale à fibres finies. Alors, avec la notation ci-dessus:*

$$J_F = \operatorname{supp} \Lambda_F.$$

Démonstration. La preuve consiste de deux étapes. Dans la première, nous démontrons que les ensembles J_F et $\operatorname{supp} \Lambda_F$ coïncident à l'exception d'un nombre fini de points. Dans la deuxième on montre que l'ensemble $\operatorname{supp} \Lambda_F$ est fermé. Enfin, sachant que les deux ensembles considérés n'admettent pas des points isolés on conclut qu'ils sont égaux.

Tout d'abord remarquons, que si toutes les fibres sont finies, alors $\chi(F^{-1}(y)) = \sharp F^{-1}(y)$. Désignons par C_0 l'adhérence de l'ensemble de valeurs critiques de l'application F. Soient $g_1, \ldots, g_m$ des polynômes vérifiant l'égalité (5.7) du théorème 5.2.3 pour la fonction φ_F. Posons

$$C_i := \{y \in \mathbb{R}^2 \mid g_i(y) = 0\}, \quad Z := \bigcup_{i=0}^{m} C_i \quad \text{et} \quad \tilde{C}_i := C_i \setminus \bigcup_{j\neq i} C_j.$$

Le complément $\mathbb{R}^2 \setminus Z$ est une union disjointe des ouverts U_j en lesquels la fonction φ_F est constante, dit égal à k_j. Comme $\chi(S(y,\varepsilon)) = 0$, alors grâce à la définition $\Lambda\varphi_{F|U_j} \equiv 0$ pour tout j. Ce qui montre que $\operatorname{supp} \Lambda_F \subset Z$. Du corollaire 5.1.1, nous savons que la restriction de F à $F^{-1}(U_j)$ est propre, car le nombre de points dans toute fibre est constant et F est un homéomorphisme local en $F^{-1}(U_j)$. Ainsi $J_F \subset Z$. Comme les ensembles J_F et $\operatorname{supp} \Lambda_F$ font partie de Z il suffit de considérer que des points appartenant à Z.

Soit $y \in \tilde{C}_i$ et posons $\{t_1, \ldots, t_k\} := F^{-1}(y)$. Choisissons des voisinages ouverts V_i de points t_i suffisamment petits pour que $V_i \cap V_j = \emptyset$ pour $i \neq j$. Ensuite posons $V := \bigcup_{i=1}^k V_i$.

Supposons maintenant que y est un point régulier d'une variété $\tilde{C}_i$ et qu'il ne fait pas partie de l'image de $S(F)$ par F. Alors du lemme 5.3.1:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \lambda(t_i) = \Lambda_{F_{|V}}. \tag{6.1}$$

Soient U_s et U_t tels que $y \in \overline{U}_s \cap \overline{U}_t$. Sachant que l'ensemble $S(F)$ est fini la dernière égalité montre que

$$0 \geq 2k - (k_s + k_t) = \Lambda_F(y). \tag{6.2}$$

1. Si $\Lambda_F(y) = 0$, alors $k_s + k_t = 2k$. Dans ce cas l'égalité (6.1) montre que toutes les fibres suffisamment proches de $F^{-1}(y)$ sont contenues dans V. En conséquence F est propre en y.

2. Si $y \in \operatorname{supp} \Lambda_F$ alors $k_s + k_t > 2k$. L'égalité (6.1) montre qu'il existe une suite $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^2$, telle que

(1) $x_n \notin V$ pour $n \in \mathbb{N}$,

(2) $F(x_n) \in S(y, \frac{1}{n})$.

En raisonnant par l'absurde, supposons que la suite $\{x_n\}$ est bornée. Ainsi il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ convergeant à x. Comme F est continuée, alors $F(x_n) \to F(x) = y$, mais par l'hypothèse sur V_i, $F^{-1}(y) \subset V$ au contraire que $x_n \notin V$. En conséquence, $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$, c'est-à-dire y fait partie de l'ensemble de Jelonek.

Cela montre qu'en dehors d'un ensemble fini les ensembles J_F et $\operatorname{supp} \Lambda_F$ coïncident car

$$\bigcup_{i=0}^{m} \operatorname{Sing} \tilde{C}_i \cup (Z \setminus \bigcup_{i=0}^{m} \tilde{C}_i)$$

est fini.

Pour que la preuve soit complète il nous ne manque que de vérifier si l'ensemble $\operatorname{supp} \Lambda_F$ est fermé. En effet, soit $y \in \overline{\operatorname{supp} \Lambda_F}$. En renommant éventuellement des ensembles U_i nous pouvons supposer que $U_1, \dots, U_r$ en restricton à une suffisement petite boule $B(y, \epsilon)$ au centre en y forment tous les composantes connexes de l'ensemble $(\mathbb{R} \setminus Z) \cap B(y, \epsilon)$ telles que $y \in \overline{U}_i \cap B(y, \epsilon)$, $i \in \{1, \dots, r\}$. Désignons par $C_{ij} := \overline{U}_i \cap \overline{U}_j \setminus \{y\}$, ainsi par la permutation, nous pouvons supposer que $j = i + 1$. Bien évidemment, sur tous les points d'une courbe C_{ii+1} le nombre de points dans une fibre de F est constant, dit égale a l_i. Alors, comme nous avons déjà démontré (6.2) on a des inégalités

$$k_i + k_{i+1} \geq 2l_i \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq r, \tag{6.3}$$

où k_i désigne le nombre des points dans la fibre sur un point de l'ensemble U_i, avec une convention, que $U_{r+1} = U_1$.

D'autre part, le link de φ_F en y vérifie

$$\Lambda_F(y) = l_1 + \ldots + l_r - (k_1 + \ldots + k_r).$$

Si $y \in \overline{\operatorname{supp} \Lambda_F}$, alors il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $k_i + k_{i+1} > 2l_i$. Ainsi, en sommant des inégalités (6.3) nous obtiendrons que

$$k_1 + \ldots + k_r > l_1 + \ldots + l_r$$

ce qui montre que $\Lambda_F(y) < 0$, en conséquence y fait partie de l'ensemble $\operatorname{supp}\Lambda_F$ alors cet ensemble est fermé.

Remarquons à la fin que le support du link considéré n'admet pas des points isolés. Pour le voir, supposons que y est un point isolé de $\tilde{C}_i$, alors il existe j tel que pour suffisamment petit ε la sphère $S(y, \varepsilon)$ est contenue dans U_j. Ce qui montre que $\Lambda_F(y) = 0$ et en conséquence $\operatorname{supp}\Lambda_F$ n'a pas de points isolés. Aussi l'application F est propre en y, car $J_F \subset Z$ et grâce au théorème 6.0.1 l'ensemble de Jelonek ne possède pas de points isolés.

Sachant que des ensembles J_F et $\operatorname{supp}\Lambda_F$ coïncident à l'exception d'un ensemble fini, qu'ils sont fermés et n'admettent pas des points isolés on conclut qu'ils sont les mêmes. Ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remarquons que grâce à ce théorème nous obtenons immédiatement un corollaire important.

Corollaire 6.0.1 *L'application polynomiale $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à fibres finies est propre en un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ si le nombre de points en toute fibre de U est constant.*

Remarquons aussi qu'ayant la description du théorème 6.0.2 pour obtenir l'algorithme effectif il ne nous manque que de savoir déterminer des polynômes g_i du théorème 5.2.3 et de calculer le link de la fonction $\operatorname{sgn} g_i$. Grâce à la remarque 5.2.1 et l'égalité 5.6 nous avons

$$\Lambda \operatorname{sgn} g = \pi_* \Lambda \mathbf{1}_Z - \Lambda \mathbf{1}_X. \tag{6.4}$$

Pour trouver des polynômes g_i dans la formule du théorème 5.2.3 on peut utiliser une méthode de Hermite laquelle nous rappellerons.

7 Méthode de Hermite

La réponse à la question de combien il y a de racines différentes d'un polynôme réel en une variable est bien connue depuis cent ans. Ce problème était résolu par Sturm. Étonnement le cas général paraît être un peu oublié tandis que Hermite dans l'article [He1] donna déjà la réponse dans le cas des deux courbes. Plus exactement, en introduisant une forme quadratique il sut combien de différents points communs possédaient deux courbes planes sans composantes communes. En effet, on peut utiliser sa méthode pour résoudre le problème suivant. Étant donnés des polynômes $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que l'ensemble algébrique complexe $V(f_1, \ldots, f_n) \subset \mathbb{C}^n$ est fini, trouver le nombre des points réels x dans $\mathbb{R}^n$ satisfaisant des conditions:

1. $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 0$,
2. $g_1(x) > 0, \ldots, g_k(x) > 0$,

où $g_1, \ldots, g_k \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ sont des polynômes quelconques.

Dans ce paragraphe nous présenterons une esquisse d'une belle méthode de Hermite dans la version de Basu, Pollack et Roy du livre [BPR].

Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble algébrique définit par des polynômes $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, tel que l'ensemble complexe $V := V(f_1, \ldots, f_n) \subset \mathbb{C}^n$ est fini. Désignons par $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes réels sur W, ensuite par $\overline{\mathcal{A}}$ une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_n)$, qui grâce à la finitude de l'ensemble V forme une espace vectorielle de la dimension finie sur $\mathbb{C}$. Remarquons, que en effet, l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$ c'est une complexification de $\mathcal{A}$. Ainsi, posons

$$m := \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{A} = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{A}} = \sum_{x \in V} \mu(x),$$

où $\mu(x_i)$ désigne la multiplicité de zéro x_i dans V, c'est-à-dire $\mu(x) = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{A}}_x$, ici $\bar{A}_x$ désigne une localisation de $\overline{\mathcal{A}}$ dans un point x. Tout élément $f \in \mathcal{A}$ définit un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire $A_f : \mathcal{A} \ni t \to ft \in \mathcal{A}$, désignons par $tr(A_f)$ la trace de l'application A_f. Soient $x_1, \ldots, x_k$ tous les points faisant partie de l'ensemble V, on montre que le polynôme caractéristique de A_f est de la forme:

$$P_f(T) = (T - f(x_1))^{\mu(x_1)} \cdot \ \ldots \ \cdot (T - f(x_k))^{\mu(x_k)}, \tag{7.1}$$

et la trace d'application A_f se présente sous la forme:

$$tr(A_f) = \mu(x_1)f(x_1) + \ldots + \mu(x_k)f(x_k). \tag{7.2}$$

En effet, comme l'ensemble V est fini, alors

$$\overline{\mathcal{A}} \simeq \overline{\mathcal{A}}_{x_1} \times \ldots \times \overline{\mathcal{A}}_{x_k}. \tag{7.3}$$

En plus, pour tout élément $f \in \overline{\mathcal{A}}$ et pour tout x_i l'espace $\overline{\mathcal{A}}_{x_i}$ est invariant par rapport à l'application A_f, c'est-à-dire $A_f(\overline{\mathcal{A}}_{x_i}) \subset \overline{\mathcal{A}}_{x_i}$. Aussi, on montre que la restriction de A_f à $\overline{\mathcal{A}}_{x_i}$ possède exactement une valeur propre égale à $f(x_i)$, et sa multiplicité est égale à $\mu(x_i)$. Ce qui justifie (7.1) et (7.2).

Ensuite, pour $g \in \mathcal{A}$, on définit une forme symétrique bilinéaire:

$$T_g : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (f, h) \longrightarrow tr(A_{gfh}) \in \mathbb{R}.$$

On montre que la signature de la forme quadratique

$$H : \mathcal{A} \ni f \longrightarrow tr(A_{f^2}) \in \mathbb{R} \tag{7.4}$$

compte le nombre des points faisant partie de W.

Pour le voir choisissons un élément $a \in \mathcal{A}$ tel que la restriction de la fonction a à l'ensemble V est injective. Celui-ci existe et alors des éléments $1, a, \ldots, a^{k-1}$ sont linéairement indépendants car $h_1(x_i) + h_2 a(x_i) + \ldots + h_k a^{k-1}(x_i) = 0,\ i = 1, \ldots, k$ c'est un système lineaire non singulier.

Soit

$$b_1 = 1,\ b_2 = a, \ldots, b_k = a^{k-1},\ b_{k+1}, \ldots, b_m$$

la base linéaire de l'espace $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$. Alors, $f \in \mathcal{A}$ s'écrit sous la forme $f = \varphi_1 b_1 + \ldots + \varphi_m b_m$. Ainsi, de l'égalité (7.2) $H(f)$ est donné par

$$H(f) = \mu(x_1)(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j b_j(x_1))^2 + \ldots + \mu(x_k)(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j b_j(x_k))^2.$$

Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b_2(x_1) & \ldots & b_m(x_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & b_2(x_k) & \ldots & b_m(x_k) \end{pmatrix},$$

son minor principal est un déterminant de Van der Monde, alors des lignes de M sont indépendantes sur $\mathbb{C}$. Il est évident que

$$H(f) = [\varphi_1, \ldots, \varphi_k] M^\top \begin{bmatrix} \mu(x_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu(x_k) \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{bmatrix},$$

alors $\operatorname{rank} H(f) = k$. Pour compter la signature de $H(f)$ considérons x et $\overline{x}$ des zéros conjugués de V. Soit r_j une partie réelle, et s_j une partie imaginaire de b_j, ainsi

$$b_j(x) = r_j(x) + i s_j(x).$$

Alors

$$\mu(x)(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j b_j(x))^2 + \mu(\overline{x})(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j b_j(\overline{x}))^2 = \mu(x) 2 \left((\sum_{j=1}^{m} r_j(x)\varphi_j)^2 - (\sum_{j=1}^{m} s_j(x)\varphi_j)^2 \right).$$

En conséquence la matrice de la forme quadratique H peut se diagonaliser à la forme

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mu(x_1) & & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & & \\ & & \mu(x_l) & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & -2 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & 2 & \\ & & & & & & & -2 \end{pmatrix},$$

où $x_1, \ldots, x_l$ désignent tous les points réels de V, et toute paire $(2, -2)$ correspond à une paire de zéros conjugués. Ce qui montre que la signature de H est égale au nombre de points faisant partie de l'ensemble W.

En effet, ce résultat est un cas particulier du théorème suivant [BW].

Théorème 7.0.3 *Soit $I \subset \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ un idéal tel que l'ensemble algébrique complexe $V(I)$ est fini. Soit $g \in \mathcal{A}$. Alors,*

$$\mathrm{signature}(T_g) = \sharp\{x \in W \mid g(x) > 0\} - \sharp\{x \in W \mid g(x) < 0\},$$

où W est un ensemble algébrique réel de zéros de l'idéal I.

Remarque 7.0.1 Ayant donné $(f_1, \ldots, f_n)$ un système 0-dimensionel on peut calculer effectivement le nombre de points décrites par des polynômes f_i.

En effet chaque pas de la procédure décrite est effectif car pour obtenir la matrice de multiplication il suffit de connaître la base de l'espace $\overline{\mathcal{A}}$ qu'on peut obtenir en utilisant la base de Gröbner d'idéal $I(V)$.

Pour conclure, nous pouvons remarquer que pour calculer le nombre de points dans la fibre d'une application polynomiale $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à fibres finies on utilise une méthode de Hermite pour le système $(f_1 - y_1, f_2 - y_2) \subset \mathbb{R}[y_1, y_2][x_1, x_2]$. En ce cas des coefficients de matrice $\mathcal{H}$ appartiennent à l'algèbre de fractions rationnelles en variables y_1, y_2. Donc la signature de la forme quadratique se présente, après avoir multiplié par la plus petite commune multiplicité de dénominateurs de coefficients en diagonale, comme la somme de signes de certains polynômes. Bien entendu cette procédure ne marche que dans le cas générique. Pour obtenir une méthode effective qui marche toujours il faut être plus prudent. On peut par exemple essayer de passer par la stratification et présenter le nombre de points dans la fibre par une somme de polynômes sur toute strate, ensuite coller tous ces polynômes à la manière décrite dans [PS]. Pour l'instant la complexité de cette procédure paraît trop grande. Alors nous avons décidé seulement de la signaler pour donner un autre point de vue sur le problème de détermination effective de l'ensemble de Jelonek.

8 Bibliographie

[AK] S. Akbulut et H. King *The topology of real algebraic sets.* Enseign. Math. **29** (1983), 221-261

[BPR] S. Basu, R. Pollack et M.-F.Roy *Algorithms in real algebraic geometry.* (*livre en préparation*)

[BWe] T. Becker et V. Weispfenning *Gröbner Bases. A computational Approach to Commutative Algebra.* Springer Verlag (1998)

[BW] E. Becker et T. Wörmann *On the trace formula for quadratic forms and some applications.* Recent Advances in Real Algebraic Geometry and Quadratic Forms, Contemporary Mathematics, **155** (1994), 271-291

[BR] R.Benedetti et J.-J. Risler *Real algebraic and semi-algebraic sets.* Hermann éditeurs des sciences et des arts (1990)

[CK1] M. Coste et K. Kurdyka *On the link of a stratum in a real algebraic set.* Topology **31** (1992), No. 2, 323-336.

[CK2] M. Coste et K. Kurdyka *Le discriminant d'un morphisme de variétés algébriques réelles.* Topology **37** No. 2 (1998), 393-399

[H1] R. Hartshorne *Algebraic Geometry.* Springer Verlag 1977

[H2] R. Hartshorne *Ample subvarieties of algebraic varieties.* L.N. Vol. **156** Springer-Verlag 1970

[He1] C. Hermite *Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équation simultanées.* Oeuvres de Charles Hermite, Tome 3, 1969, 1-34

[J1] Z. Jelonek *The set of points at which a polynomial map is not proper.* Ann. Polon. Math. **LVIII.3** (1993), 259-266

[J2] Z. Jelonek *Testing sets for properness of polynomial mappings.* Math. Ann.**315** (1999), 1-35

[J3] Z. Jelonek *Topological characterization of finite mappings.* Bull. Acad. Polon. Sci. Math. (*à apparaître*)

[J4] Z. Jelonek *Geometry of real polynomial mappings.* Math. Z. **239** (2002), 321-333

[J5] Z. Jelonek *A Solution of the problem of Van den Essen and Shpilrain.* J. of Pure & Appl. Algebra **137** (1999), 49-55

[JK] Z. Jelonek et K. Kurdyka *On asymptotic critical values of a complex polynomial.* Reine Andegawende für Mathematik (*à apparaître*)

[K1] J. Kollár *Nonrational hypersurfaces.* Jour. of A.M.S. **8**, No. 1 (1995), 241-249

[K2] J. Kollár *Rational curves on algebraic varieties.* Springer Verlag1996

[L] S. Lang *Algebra.* PWN 1973 (*en polonais*)

[Ł] S. Łojasiewicz *Introduction to complex analytic geometry.* Birkhäuser 1991

[MP1] J. McCrory et A. Parusiński *Algebraically constructible functions.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup 4^e série, **30** (1997), 527-552

[MP2] J. McCrory et A. Parusiński *Complex monodromy and the topology of real algebraic sets.* Comp. Math. **106** (1997), 527-552

[Mi] J. Milnor *Singular points of complex hypersurfaces.* Mir 1971 (*en russe*)

[Mu] D. Mumford *The red book of varieties and Schemes.* L.N. **1358** (2nd. ed.) Springer Verlag 1999

[PP] F. Pauer et M. Pfeifhofer *The theory of Gröbner Bases.* L'Enseignement Mathématique **34** (1998), 215-232

[PS] A. Parusiński et Z. Szafraniec *Algebraically constructible functions and signs of polynomials.* manuscripta math. **93** (1997), 443-456

[Sh] I.R. Shafarevich *Basic algebraic geometry.* Nauka 1988 (*en russe*)

[S] A. Stasica *An effective description of the Jelonek set.* J. Pure & Appl. Alg. **169** (2002), 321-326

[V] O. Y. Viro *Some integral calculus based on Euler characteristic.* L.N. **1346** Topology and Geometry - Rohlin Seminar 1988