

# Mots de retours dans les mots associés aux plans discrets

Matthieu Simonet  
(Sous la direction de Laurent Vuillon)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Combinatoire des mots, dimension 1</b>	<b>2</b>
1.1	Notions élémentaires et notations . . . . .	2
1.2	Mots sturmiens . . . . .	3
1.3	Mots de Rote . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Définitions en 2 dimensions</b>	<b>9</b>
2.1	Mots doubles et plan discret . . . . .	9
2.2	Motif et pointage . . . . .	11
2.3	$I_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Pavage dans les mots sturmiens bidimensionnels</b>	<b>13</b>
3.1	Intervalle du cercle, motifs et direction privilégiée . . . . .	13
3.2	Direction privilégiée, notion de primalité . . . . .	16
3.3	Pavage dans le mot de localisation et dans le mot sturmien . . . . .	17

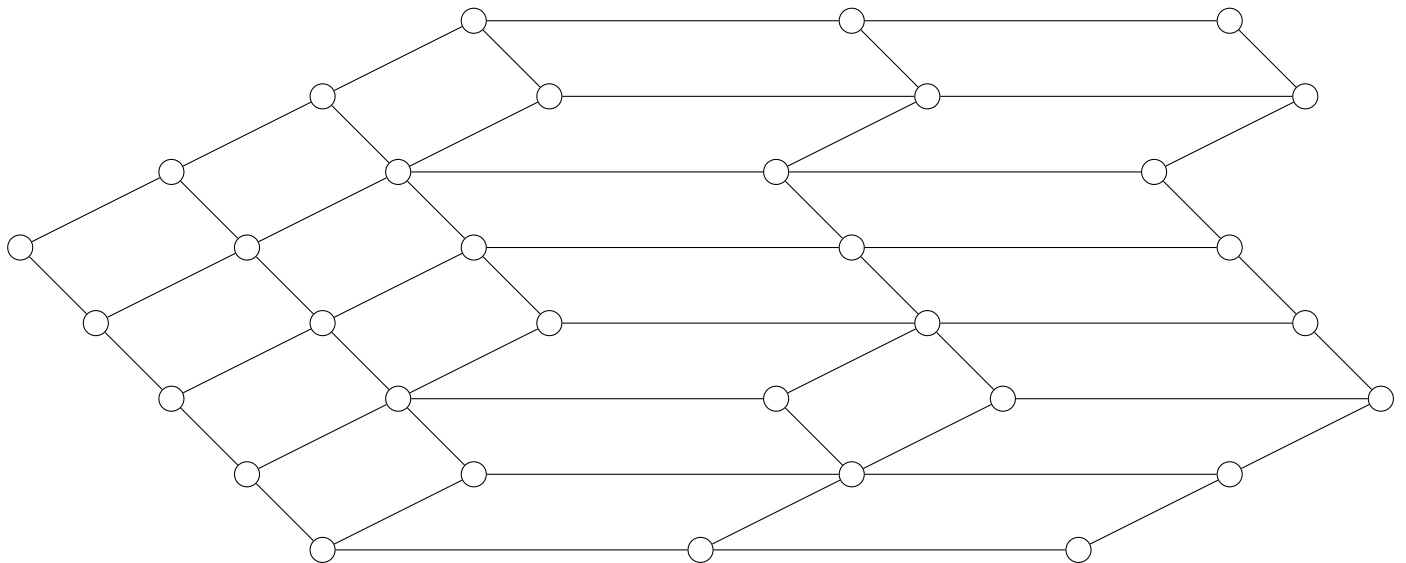


FIGURE 1 – Pavage de plan discret

# Introduction

J'ai effectué ce stage au Laboratoire de mathématiques de l'université de Savoie à Chambéry, sous la direction de M. Laurent Vuillon, professeur à l'Université de Savoie et directeur du laboratoire de mathématiques. En combinatoire des mots et plus précisément dans l'étude des mots unidimensionnels, la notion de mot de retour a joué un rôle important, en particulier dans la caractérisation des mots sturmiens. Ces mots servant de représentation pour les droites discrètes, il est tout naturel de se poser la question d'une caractérisation en dimension supérieure, en particulier dans le cas des plans discrets. En dimension 2, on vient à considérer des mots bidimensionnels. Les notions habituelles doivent donc être adaptées. Nous verrons que le passage à la dimension 2 provoque de vrais problèmes vis à vis de définitions simples en dimension 1.

## 1 Combinatoire des mots, dimension 1

Avant de se lancer dans l'étude de mots bidimensionnels, il est intéressant de revenir sur certains résultats importants pour les mots unidimensionnels.

### 1.1 Notions élémentaires et notations

DÉFINITION 1.1 (ALPHABET ET MONOÏDE LIBRE)

On appelle *alphabet*, tout ensemble fini de symboles (appelés *lettres*). Soit  $\mathcal{A}$  un alphabet, on définit l'ensemble  $\mathcal{A}^*$  des mots finis sur  $\mathcal{A}$ . Muni de la concaténation,  $\mathcal{A}^*$  a une structure de monoïde. On définit aussi respectivement  $\mathcal{A}^\omega$ ,  ${}^\omega\mathcal{A}$  et  ${}^\omega\mathcal{A}^\omega$ , les ensembles des mots infinis, respectivement à droite, à gauche et des deux cotés.

A partir de maintenant,  $\mathcal{A}$  désignera toujours un alphabet et  $w = (w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  un mot bi-infini tel que  $\forall i \in \mathbb{Z} w_i \in \mathcal{A}$ .

DÉFINITION 1.2 (LONGUEUR)

Soit  $v = v_1 \dots v_k$  un mot fini sur  $\mathcal{A}$ , on appelle *longueur* (ou *taille*) de  $v$ , notée  $|v|$ , l'entier  $k$ . De même, si  $a \in \mathcal{A}$ , on note  $|v|_a$  le nombre d'occurrences de  $a$  dans  $v$ , c'est à dire  $\#\{i \in [1, k] \mid v_i = a\}$ . Cette définition peut facilement se prolonger au cas où  $u \in \mathcal{A}^*$ ,  $|v|_u$  représente alors le nombre de fois que  $u$  apparaît comme facteur de  $v$ .

DÉFINITION 1.3 (FACTEUR ET LANGUAGE)

Soit  $v$  un mot fini sur  $\mathcal{A}$ . On dit que  $v = v_1 \dots v_k$  est un *facteur* de  $w$ , noté  $v \prec w$  s'il existe  $l \in \mathbb{Z}$  tel que :

$$\forall i \in [1, k] v_i = w_{l+i}$$

Pour tout entier  $n$ , on note  $\mathcal{L}_n(w)$ , l'ensemble des facteurs de  $w$  de taille  $n$ . On appelle *langage* associé à  $w$ , noté  $\mathcal{L}$ , la réunion de tous les  $\mathcal{L}_n(w)$ . Si de plus,  $w$  est fini à gauche, on dit que  $v$  est un *préfixe* de  $w$  si  $w$  peut s'écrire  $vu$  avec  $u$  un mot sur  $\mathcal{A}$  (éventuellement infini à droite). De même si  $w$  est fini à droite, on dit que  $v$  est un *suffixe* de  $w$  si  $w$  peut s'écrire  $uw$  avec  $u$  un mot sur  $\mathcal{A}$  (éventuellement infini à gauche).

Pour un mot donné, chaque  $\mathcal{L}_n(w)$  est bien évidemment fini, ceci nous permet donc de définir une notion de complexité :

DÉFINITION 1.4 (COMPLEXITÉ)

On appelle *complexité* de  $w$ , la fonction suivante :

$$p_w : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longrightarrow \#\mathcal{L}_n(w)$$

Il est facile de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 1.5

$\exists n \in \mathbb{N} \mid p_w(n) \leq n \Leftrightarrow w$  est ultimement périodique.

Il peut être intéressant d'étudier les mots non ultimement périodiques, de faible complexité. Nous allons en voir deux types : les mots de Sturm et les mots de Rote.

## 1.2 Mots sturmiens

DÉFINITION 1.6 (MOTS STURMIENS)

On dit que  $w$  est un mot sturmien si et seulement si il est de complexité  $p_w(n) = n + 1$  et est non ultimement périodique.

En particulier,  $p_w(1) = 2$ , on travaillera donc dans un alphabet à deux lettres :  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ .

**Exemple :** L'un des mots sturmiens les plus connus est le mot de Fibonacci, obtenu par itération successive de la substitution définie par  $\sigma(0) = 01$  et  $\sigma(1) = 0$ .

$$\text{Fib} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(0) = 0100101001001010 \dots$$

DÉFINITION 1.7 (0-STURMIEN ET 1-STURMIEN)

On dit que  $w$  est 0-sturmien (respectivement 1-sturmien) si et seulement si  $w$  est sturmien et si 00 (respectivement 11) est un facteur de  $w$ .

**Remarque :** un mot sturmien est soit 0-sturmien soit 1-sturmien, et ne peut pas être les deux à la fois. En effet,  $p_w(2) = 3$  donc au moins l'un des deux mots 00 ou 11 est un facteur de  $w$ . S'ils l'étaient tous les deux, l'un des deux mots 01 ou 10 ne seraient pas facteurs de  $w$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que c'est 01 qui n'apparaît pas.  $p_w(1) = 2$  donc il existe  $i \in \mathbb{Z} \mid w_i = 0$  et  $i' \in \mathbb{Z} \mid w_{i'} = 1$ , 01 n'étant pas facteur de  $w$ , on en déduit que  $\forall j \geq i, w_j = 0$  donc en particulier  $i' < i$ . De même, 01 n'étant pas facteur de  $w, \forall j \leq i', w_j = 1$ . Le mot est donc ultimement périodique, ce qui est en contradiction avec la définition de sturmien.

Il existe plusieurs autres façons de caractériser les mots sturmiens. La première fait intervenir une notion combinatoire.

DÉFINITION 1.8 (EQUILIBRÉ)

$w$  est dit équilibré si et seulement si pour tout couple  $(u, v)$  de facteurs de  $w$  de même taille :

$$\left| |u|_1 - |v|_1 \right| \leq 1$$

THÉORÈME 1.9 (PREMIÈRE CARACTÉRISATION [3])

$w$  est sturmien si et seulement si  $w$  est équilibré et non ultimement périodique.

Il est aussi possible d'obtenir des caractérisations géométriques des mots sturmiens.

DÉFINITION 1.10 (DROITE DISCRÈTE)

On appelle droite discrète de pente  $\alpha > 0$ , d'intercept  $\rho \in \mathbb{R}$  et d'épaisseur  $\omega > 0$ , l'ensemble :

$$D_{\alpha, \rho, \omega} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \rho \leq \alpha * y - x < \rho + \omega\}$$

On peut remarquer qu'en choisissant  $\omega = 1 + \alpha$ ,  $D_{\alpha, \rho, \omega}$  (normalité) n'est autre qu'une ligne brisée. Or il est possible de coder toute ligne brisée par un mot binaire bi-infini.

DÉFINITION 1.11 (CODAGE D'UNE LIGNE BRISÉE)

Soit  $D$  une ligne brisée d'origine fixée. On peut coder  $D$  en associant à chaque segment horizontal le symbole 0, et à chaque segment vertical le symbole 1 comme illustré ci-dessous.

Si toute droite discrète normale peut être codée sous forme d'une ligne brisée, c'est le cas de nombreuses courbes discrètes. La question naturelle est donc de savoir s'il est possible de caractériser les mots bi-infinis binaires codant des droites discrètes normales.

THÉORÈME 1.12 (DEUXIÈME CARACTÉRISATION [2])

$w$  code une droite discrète normale de pente irrationnelle si et seulement si  $w$  est sturmien.

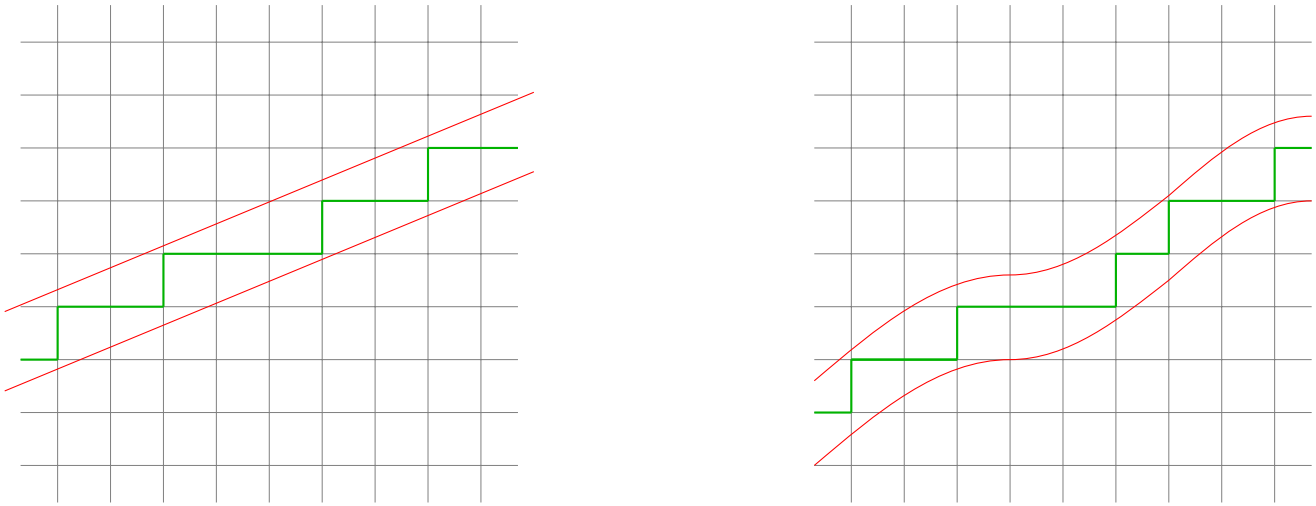


FIGURE 2 – Exemple de droites brisées associées à une droite et à une courbe

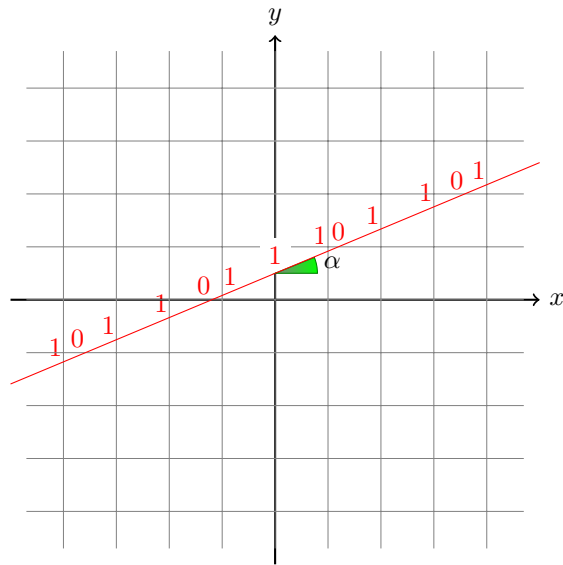


FIGURE 3 – Exemple de droite discrète codée par ...1011011101101...

**Remarque :** Si  $\alpha$  est rationnel, alors le codage de la droite est périodique. Les mots binaires bi-infinis codant des droites discrètes normales sont appelés mots de Christoffel [2]. Dans la suite, on notera  $[\cdot]$  le modulo.

DÉFINITION 1.13 (ROTATION DU CERCLE UNITÉ)

Soit  $U$  le cercle unité identifié à  $[0, 1[$ . On appelle rotation d'angle  $\alpha \in [0, 1[$  sur  $U$ , l'application suivante :

$$R_\alpha : \begin{cases} [0, 1[ & \longrightarrow & [0, 1[ \\ x & \longrightarrow & x + \alpha [1] \end{cases}$$

DÉFINITION 1.14 (CODAGE D'UNE ORBITE)

Soit une rotation du cercle unité  $R_\alpha$ . Soit  $\rho \in [0, 1[$ . On appelle codage de l'orbite de  $\rho$  le mot binaire bi-infini  $u$  suivant :

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{si } R_\alpha^i(\rho) \in [0, 1 - \alpha[ \\ 1 & \text{si } R_\alpha^i(\rho) \in [1 - \alpha, 1[ \end{cases}$$

THÉORÈME 1.15 (TROISIÈME CARACTÉRISATION [4])

$w$  est sturmien si et seulement si il existe deux nombres  $\alpha$  et  $\rho$  dans  $[0, 1[$ , tels que  $\alpha$  soit irrationnel et  $w$  soit le codage de l'orbite de  $\rho$  par la rotation  $R_\alpha$ .

**Remarque :** Si  $\alpha$  est rationnel, le codage de la rotation est périodique.

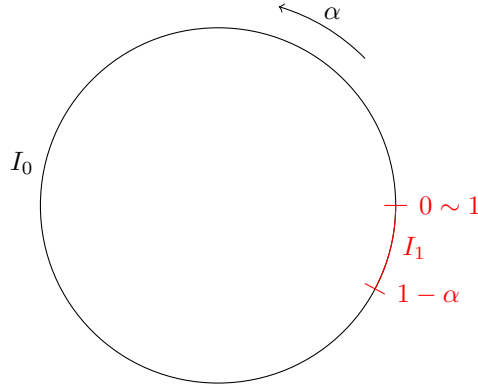


FIGURE 4 – Codage par une rotation

Cette troisième caractérisation est un outil très puissant avec lequel il est facile de travailler. Elle a permis entre autres d'obtenir une autre caractérisation combinatoire des mots sturmiens par l'étude des mots de retour.

DÉFINITION 1.16 (MOT DE RETOUR)

Soit  $v$  un facteur de  $w$ , on appelle mot de retour de  $v$  dans  $w$  tout facteur  $u$  de  $w$  tel que :

- $v$  est un préfixe de  $u$
- $uv$  est un facteur de  $w$
- $|uv|_v = 2$

Les mots de retour de  $v$  dans  $w$  peuvent être lus comme les facteurs de  $w$  commençant par  $v$  et s'arrêtant juste avant une nouvelle occurrence de  $v$ . Ainsi dans le mots 1001010010010001 les mots de retours pour 1 sont 100,10 et 1000.

**Remarque :**  $|uv|_v = 2$  n'est pas, en général, équivalent à  $|u|_v = 1$ . En voici un contre exemple :  $v = 00$  et  $u = 0010$ , on a alors que  $uv = 001000$ ,  $v$  apparaît 3 fois dans  $uv$  (en position 1,4 et 5) alors qu'il n'apparaît qu'une seule fois dans  $u$ .

DÉFINITION 1.17 (MOT UNIFORMÉMENT RÉCURRENT (OU MINIMAL))

Un mot  $w$  est dit uniformément récurrent si tout facteur de  $w$  apparaît une infinité de fois et avec des lacunes bornées.

**Remarque :** On a alors que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que tout facteur de  $w$  de taille  $N$  contient tous les facteurs de taille  $n$  de  $w$ . (Il suffit de prendre par exemple  $N = 2n - 1 + M$  où  $M = \max_{u \in \mathcal{L}_n(w)} \max\{\text{lacunes de } u \text{ dans } w\}$ ).

PROPRIÉTÉ 1.18

Si  $w$  est sturmien alors  $w$  est uniformément récurrent.

En particulier, cela implique que tout facteur  $v$  de  $w$  admet un nombre fini de mots de retour. Mais on peut aller beaucoup plus loin dans la caractérisation des mots sturmiens.

THÉORÈME 1.19 (MORSE HEDLUND [5])

Si  $w$  est 0 – sturmiens, il existe  $n$  tel que 1 admette exactement  $10^n$  et  $10^{n+1}$  comme mots de retour. Les mots de retour de 0 sont 0 et 01.

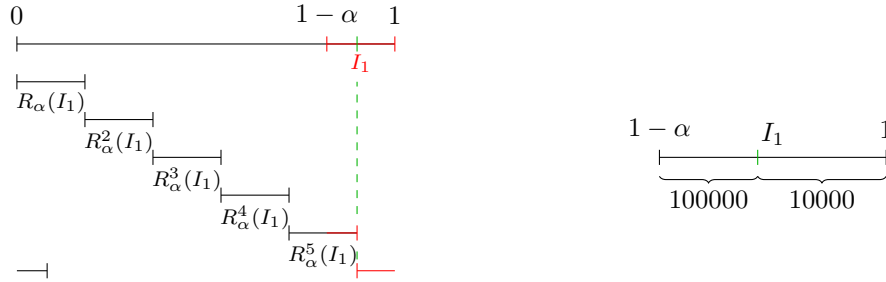


FIGURE 5 – Mot de retour pour 1

Le théorème peut être trivialement adapté au cas des  $1 - \text{sturmiens}$ . La démonstration de ce théorème peut se faire facilement par un dessin en utilisant la caractérisation par une rotation du cercle unité.

Ce dessin nous montre en particulier une représentation de la troisième caractérisation comme un échange d'intervalle, que l'on peut formaliser.

DÉFINITION 1.20 (FONCTION DE PREMIER RETOUR)

On définit la fonction de premier retour associé à la rotation  $R_\alpha$  :

$$f : [1 - \alpha[ \longrightarrow [1 - \alpha[ \\ x \longrightarrow R^n(x) \text{ où } n = \min\{m \in \mathbb{N}^* \mid R^m(x) \in [1 - \alpha[\}$$

Cette fonction procède exactement à l'échange d'intervalle suivant :

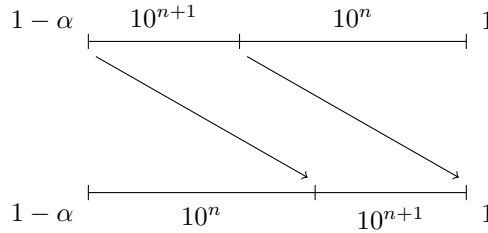


FIGURE 6 – Echange d'intervalles par la fonction de premier retour

Le théorème de Morse Hedlund nous donne donc que 0 et 1 ont exactement 2 mots de retour et que leurs tailles diffèrent exactement de 1 symbole. Il est possible d'obtenir un prolongement de ce résultat aux mots de retour pour un facteur quelconque

THÉORÈME 1.21 (MOTS DE RETOUR DANS LES MOTS STURMIENS [7])

Soient  $w$  un mot bi-infini sturmien,  $v$  un facteur de  $w$ . L'ensemble des mots de retour de  $v$  dans  $w$  est de cardinal 2.

Le but de ce stage a été de chercher un «bon prolongement» de la définition de mots de retour en dimension 2 afin d'obtenir un résultat similaire dans le cadre d'une généralisation des mots sturmiens en dimension 2. (Voir partie 2 et 3)

### 1.3 Mots de Rote

Une autre famille de mots nous sera utile. Il s'agit des mots de complexité  $2n$  uniformément récurrents. Ils ont été étudiés en particulier par Rote ([6]). Dans cet article, il est donné une caractérisation constructive de tous les mots de complexité  $2n$  à partir des graphes de mots.

DÉFINITION 1.22 (GRAPHE DE BRUIJN)

On appelle graphe de Bruijn de taille  $n$ , le graphe orienté à  $2^n$  sommets étiquetés par les mots binaires de taille  $n$  et tels que l'arc  $uv$  existe si on peut écrire  $u = \epsilon_1 u'$  et  $v = v' \epsilon_2$  avec :

- $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  appartiennent à  $\{0, 1\}$
- $u' = v'$

On étiquette alors cette arête par  $\epsilon_1 u' \epsilon_2$ .

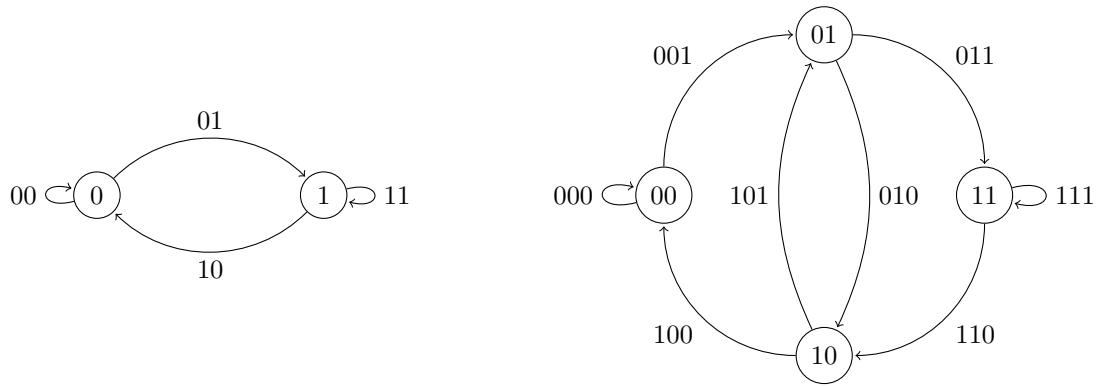


FIGURE 7 – Graphes de Bruijn de taille 1 et 2

DÉFINITION 1.23 (GRAPHE DE MOTS ET SUITES DE GRAPHE DE MOTS)

Un graphe orienté  $G$  est appelé graphe de mots de taille  $n$  si :

- $G$  est un sous-graphe du graphe de Bruijn de taille  $n$
- Tout sommet de  $G$  est à la fois le début et la fin d'une arête.

Soit  $(G_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de graphes, on dit qu'il s'agit d'une suite de graphes de mots si :

- $\forall i \in \mathbb{N}^* G_i$  est un graphe de mots de taille  $i$
- $G_i$  admet une arête étiquetée par  $u$  si et seulement si  $G_{i+1}$  admet un sommet étiqueté par  $u$ .

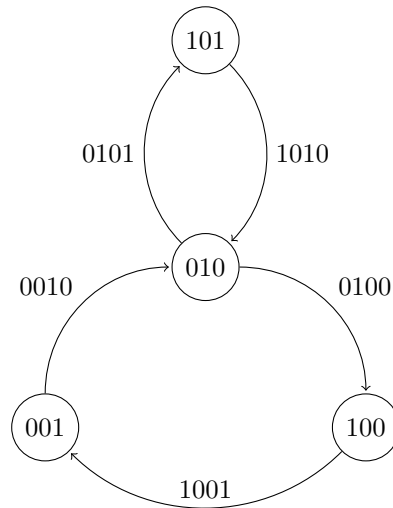


FIGURE 8 – Graphe des facteurs de taille 3 de Fibonacci

DÉFINITION 1.24 (GRAPHE DES FACTEURS (OU GRAPHE DE RAUZY))

Soit  $w$  un mot bi-infini. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on peut construire le graphe de mots  $G_n$  à partir du graphe de Bruijn  $B_n$  de taille  $n$  de la façon suivante :

- Les sommets de  $G_n$  sont les sommets de  $B_n$  étiquetés par un facteur de taille  $n$  de  $w$ .
- Les arêtes de  $G_n$  sont les arêtes de  $B_n$  étiquetées par un facteur de taille  $n + 1$  de  $w$ .

On appelle ce graphe le graphe des facteurs de taille  $n$  de  $w$ . L'ensemble des graphes des facteurs de  $w$  forme une suite de graphes de mots.

**Remarque :** Etant donnée une suite de graphes de mots, il n'est pas forcément possible de trouver un mot  $w$  dont la suite est la suite des graphes de facteurs. Par exemple, on peut regarder ce graphe :

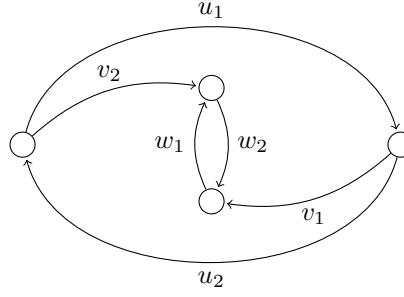


FIGURE 9 – Exemple de graphe de mots ne provenant pas d'un unique mot

Ce graphe provient de l'ensemble des mots de la forme :

- $(u_1 u_2)^\omega$
- ${}^\omega(u_1 u_2) u_1 v_1 (w_1 w_2)^\omega$
- ${}^\omega(u_1 u_2) v_2 (w_2 w_1)^\omega$

Ce graphe ne peut pas être obtenu comme graphe de Rauzy d'un seul mot.

Le principe de la caractérisation repose sur la construction pas à pas d'une suite de graphes de mots en utilisant une transformation sur le graphe des facteurs de taille  $n$  afin de construire celui de taille  $n + 1$ , tout en respectant 2 règles qui assureront que la suite obtenue est bien une suite des graphes de facteurs d'un mot de complexité  $2n$ .

#### DÉFINITION 1.25 (LINE-GRAPHE)

Soit  $G$  un graphe orienté, on définit  $D$ , le line-graphe de  $G$ , de la façon suivante :

- $D$  admet un sommet pour chaque arête de  $G$ .
- Un arc relie  $x$  à  $y$  dans  $D$  si et seulement si l'arête de  $G$  associée à  $x$  se termine au sommet de  $G$  où commence l'arête de  $G$  associée à  $y$ .

#### PROPRIÉTÉ 1.26 (STABILITÉ PAR LE LINE-GRAPHE)

Le line-graphe du graphe de Bruijn de taille  $n$  est le graphe de Bruijn de taille  $n + 1$ . Soit  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de graphes de mots, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$   $G_{n+1}$  est un sous graphe du line-graphe de  $G_n$ .

Afin d'assurer que la suite de graphes de mots que l'on va construire est bien une suite de graphes de facteurs pour un certain mot  $w$ , il nous faut définir une propriété supplémentaire que l'on devra respecter.

#### DÉFINITION 1.27 (PROPRIÉTÉ D'EXTENSIBILITÉ)

Soit  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de graphe de mots.  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifie la propriété d'extensibilité si et seulement si il existe une suite extraite  $(G_\phi(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  et une suite de mots  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  telles que pour tout  $i$  :

- $x_i \in G_\phi(i)$ .
- $x_i$  est un préfixe de  $x_{i+1}$ .
- Tout sommet de  $G_i$  est un facteur de  $x_i$ .

On va maintenant décrire le procédé de construction de la suite de graphes de mots. On veut que  $p(1) = 2$  et  $p(2) = 4$ , le graphe de taille 1 doit donc avoir 2 sommets et 4 arêtes. Il n'y a par conséquent qu'une seule possibilité pour celui-ci :

Le procédé de construction se déroule alors de la façon suivante :

1. On part du graphe complet à 2 sommets avec boucles :  $G_1$
2. Si  $G_n$  est construit, on construit  $D_{n+1}$  comme le line-graphe de  $G_n$
3. On retire des arêtes à  $D_{n+1}$  jusqu'à ce que celui-ci ait exactement  $2(n + 2)$  arêtes en respectant les règles suivantes :
  - Maintenir le graphe fortement connexe
  - Faire en sorte que la suite de graphes obtenue puisse vérifier la propriété d'extensibilité



**Remarques :**

- $G_n$  a par récurrence  $2n$  sommets et  $2(n + 1)$  arêtes.
- La difficulté est de démontrer qu'il est toujours possible de satisfaire les deux règles.
- On peut montre que satisfaire la 2ème règle revient à se fixer deux facteurs de même taille, et à ne jamais couper le plus court chemin les rapprochant.
- Si la 2ème règle peut être ignorée pendant un nombre fini d'étapes, la proposition suivante nous montre que ce n'est pas le cas de la première.

**PROPRIÉTÉ 1.28 (FORTE CONNEXITÉ ET LINE-GRAPHE)**

Soit  $G$  un graphe de mots,  $D$  son line-graphe :

$$G \text{ fortement connexe} \Leftrightarrow D \text{ fortement connexe}$$

**Démonstration :** Supposons que  $G$  est fortement connexe. Soient  $e, f$  deux sommets de  $D$ . Par construction, il existe quatre sommets de  $G$  ( $e_1, e_2, f_1, f_2$ ) (éventuellement égaux), tels que  $e$  provient de  $e_1e_2$  et  $f$  de  $f_1f_2$ .  $G$  étant fortement connexe, il existe un chemin  $e_2v_1 \dots v_k f_1$  allant de  $e_2$  à  $f_1$ . Or par la transformation ce chemin nous donne un chemin  $(e_1e_2)(e_2v_1)(v_1v_2) \dots (v_k f_1)(f_1f_2)$  reliant  $e$  à  $f$ . Donc  $D$  est fortement connexe. Réciproquement supposons que  $D$  est fortement connexe. Soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $G$ . Par définition,  $x$  et  $y$  ne sont pas isolés et il existe deux arêtes de la forme  $xx_1$  et  $y_1y$ . Ces deux arêtes donnent deux sommets dans  $D$  que l'on notera :  $(xx_1)$  et  $(y_1y)$ .  $D$  étant fortement connexe, il existe un chemin reliant ces deux sommets :  $(xx_1)(x_1v_1)(v_1v_2)(v_2v_3) \dots (v_k y)(y_1y)$ . Par construction, ce chemin dans  $D$  provient d'un chemin dans  $G$  reliant  $x$  à  $y$ . Donc  $G$  est fortement connexe.

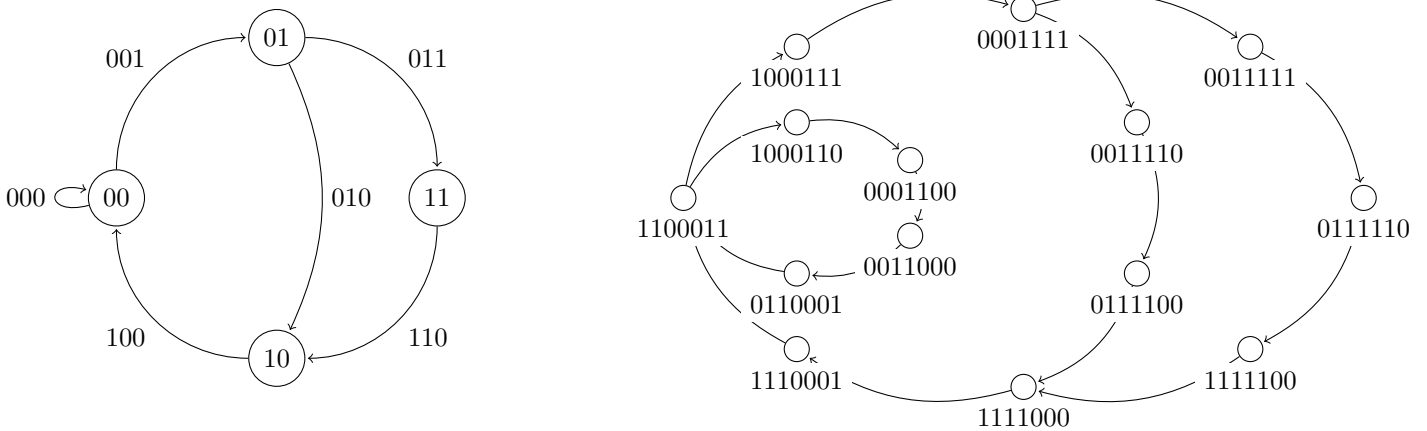


FIGURE 10 – Deux exemples de graphe de Rote de taille 2 et 7.

## 2 Définitions en 2 dimensions

Dans les parties 2 et 3, nous allons étudier une généralisation des mots sturmiens en dimension 2. Nous allons donc avoir besoin de prolonger les définitions usuelles du cas unidimensionnel au cas bidimensionnel.

### 2.1 Mots doubles et plan discret

**DÉFINITION 2.1 (MOT BIDIMENSIONNEL)**

On appelle mot bidimensionnel bi infini dans un alphabet  $\mathcal{A}$  une suite bi infinie  $(U_{(n,m)})_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$  telle que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2, U_{(n,m)} \in \mathcal{A}$$

On peut dès maintenant remarquer une importante différence entre le cas unidimensionnel et le cas bidimensionnel. Il est délicat, ici, de définir une notion de concaténation de mots finis. En effet, il faut déterminer où placer un mot par rapport à l'autre. Un autre problème vient de la définition de facteur. Intuitivement, on peut définir les facteurs rectangulaires :

DÉFINITION 2.2 (FACTEUR RECTANGULAIRE)

Soit  $U_{(n,m)}$  un mot bidimensionnel, on appelle facteur rectangulaire une suite  $: (V_{(i,j)})_{i \in [1,n], j \in [1,m]}$  avec  $n, m \in \mathbb{N}^*$  tel qu'il existe  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $\forall i, j \in [1, n] \times [1, m], V_{i,j} = U_{i+k, j+l}$ .

Ce qui nous permet d'entendre la notion de complexité :

DÉFINITION 2.3 (COMPLEXITÉ)

On appelle complexité d'un mot bi infini bidimensionnel  $U$  la fonction :

$$p_U : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$n, m \longrightarrow \#\{\text{facteur rectangulaire de taille } n, m\}$$

De même que les mots sturmiens en dimension 1 représentaient les droites discrètes, en dimension 2 nous étudierons des plans discrets.

DÉFINITION 2.4 (PLAN DISCRET)

Soit  $S$  l'ensemble des translations entières du cube unité qui intersectent le demi-espace défini par

$$z < -ax - by + c$$

On appelle plan discret (supérieur)  $P$  d'équation  $c = z + ax + by$  la frontière de  $S$

On peut constater qu'une projection de ce plan discret sur un plan donne un pavage de celui-ci par des tuiles de 3 types. On peut ainsi coder un plan discret en associant à chaque point  $(n, m)$  le type de la tuile qui s'y projette. Le théorème central de cette étude est exposé dans [1].

THÉORÈME 2.5 (SYSTÈME DYNAMIQUE ASSOCIÉ À UN PLAN DISCRET)

La suite  $U_{(n,m)}$  obtenue à partir d'un plan discret peut être obtenue par le système dynamique suivant :

- On considère l'intervalle  $[0, 1[$  partitionné en trois intervalles  $I_1, I_2$  et  $I_3$
- $I_3 = [0, \alpha[$  avec  $\alpha = \frac{1}{1+a+b}$
- $I_2 = [\alpha, \alpha + \beta[$  avec  $\beta = \frac{b}{1+a+b}$
- $I_1 = [\alpha + \beta, 1[$
- $U_{n,m} = i \Leftrightarrow n * \alpha + m * \beta + c' [1] \in I_i$  (où  $c'$  est déterminé à partir des conditions initiales)

**Remarque :** Quitte à échanger les coordonnées, on peut imposer que  $|I_1|, |I_2| < 1/2$ .

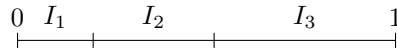


FIGURE 11 – Système dynamique associé à un plan discret

DÉFINITION 2.6 (MOT PÉRIODIQUE)

On dit que  $U_{n,m}$  est périodique si et seulement si il existe un vecteur non nul de périodicité :

$$\exists (k, l) \in \mathbb{Z}^2 - \{0, 0\} \mid U_{n,m} = U_{n+k, m+l}$$

PROPRIÉTÉ 2.7 (MOT PÉRIODIQUE)

Soit  $U_{n,m}$  un mot codant un plan discret.  $U_{n,m}$  est périodique si et seulement si  $1, \alpha$  et  $\beta$  sont rationnellement dépendants.

Par la suite on exclura les cas périodiques. On peut calculer la complexité des mots obtenus :

PROPRIÉTÉ 2.8 (COMPLEXITÉ)

La complexité des mots sturmiens bidimensionnels est  $p(n, m) = n * m + n + m$ .

De plus, il a été démontré que les mots sturmiens bidimensionnels étaient uniformément récurrents. On notera par la suite  $R_\alpha$  la rotation d'angle  $\alpha$ .

## 2.2 Motif et pointage

La notion de facteur rectangulaire n'est pas suffisante pour pouvoir étudier les mots bidimensionnels, il nous faut introduire la notion de motif.

DÉFINITION 2.9 (MOTIF ET CLASSE DE MOTIFS)

On appelle motif dans l'alphabet  $\mathcal{A}$ , un couple  $\mathcal{M} = (M, v)$  où  $M$  est un sous-ensemble borné de  $\mathbb{Z}^2$  et  $v$  un application de  $M$  dans  $\mathcal{A}$  appelée valuation. On appelle classes de motifs les classes d'équivalences sur les motifs pour la relation issue de la translation sur  $\mathbb{Z}^2$ .

On confondra par la suite la notion de motif et de classe de motifs. Cependant, il est important de localiser un motif dans un mot bi infini, et pour cela, on peut décider de rendre spéciale l'une des cases du motifs :

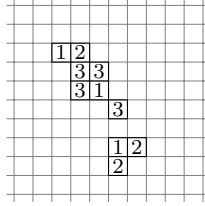


FIGURE 12 – Exemple de motif

DÉFINITION 2.10 (MOTIF POINTÉ)

On appelle motif pointé dans l'alphabet  $\mathcal{A}$ , un triple  $\mathcal{M} = (M, v, p)$  où  $(M, v)$  est un motif dans  $\mathcal{A}$  et  $p$  est un élément de  $\mathbb{Z}^2$  appelé pointeur de  $\mathcal{M}$ . De même, on appelle classes de motifs pointés les classes d'équivalence pour la translation. (le pointeur étant lui aussi translaté).

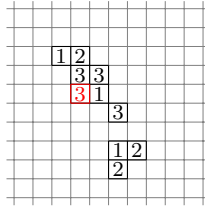


FIGURE 13 – Exemple de motif pointé

Souvent il sera nécessaire de considérer un représentant particulier d'un motif pointé, on définit pour cela un représentant canonique :

DÉFINITION 2.11 (MOTIF CANONIQUE)

Pour toute classe de motifs pointés, il existe un unique représentant tel que son pointeur soit  $(0, 0)$ . On appelle ce motif, le représentant canonique de la classe. Si la classe est notée  $\mathcal{M}$ , on notera le représentant canonique  $\mathcal{M}_0 = (M_0, v_0, (0, 0))$ .

On peut définir la taille d'un motif, analogue de la longueur d'un facteur en dimension 1.

DÉFINITION 2.12 (TAILLE D'UN MOTIF)

On appelle taille d'un motif la valeur :  $|M|$ .

Cette notion est bien sûr invariante par translation. On peut donc parler de taille d'une classe de motifs.

DÉFINITION 2.13 (FACTEUR)

Soit  $\mathcal{M}$  un motif pointé, on dit que  $\mathcal{M}$  est un facteur de  $U_{n,m}$  si et seulement si il existe un représentant  $\mathcal{M}'$  de la classe de  $\mathcal{M}$  tel que :

$$\forall (i, j) \in M' \quad v'(i, j) = U_{i,j}$$

Enfin, nous verrons une propriété de certains motifs :

**DÉFINITION 2.14 (8-CONNEXITÉ)**

Un motif  $\mathcal{M}$  est 8-connexe si et seulement le graphe  $G = (V, E)$  suivant est connexe :

- $V$  est l'ensemble des points de  $M$
- Deux sommets  $(n, m)$  et  $(l, k)$  sont liés si et seulement si  $\max(|n - l|, |m - k|) = 1$ .

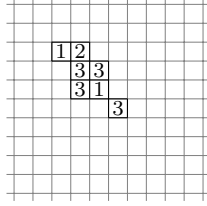


FIGURE 14 – Exemple de motif 8-connexe

### 2.3 $I_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{M})$

Tout comme en dimension 1, on va définir la notion d'ensemble de points associé à un motif dans notre système dynamique :

**DÉFINITION 2.15 (ENSEMBLE DE POINTS ASSOCIÉ À UN MOTIF)**

On appelle ensemble des points associé à un motif  $\mathcal{M}$  l'ensemble des points  $x$  de  $[0, 1[$  tel que :

$$\forall (i, j) \in M_0, R_{i\alpha + j\beta}(x) \in U_{v_0(i, j)}$$

On aura besoin aussi de la notion de sous motif et de prolongement

**DÉFINITION 2.16 (SOUS MOTIF ET PROLONGEMENT)**

Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  deux motifs, on dit que  $\mathcal{M}'$  est un sous motif de  $\mathcal{M}$

- $M' \subset M$
- $\forall (i, j) \in M' v(i, j) = v'(i, j)$

Si de plus les motifs sont pointés, les deux pointeurs doivent être égaux. A l'opposé,  $\mathcal{M}$  est appelé prolongement de  $\mathcal{M}'$ .

**PROPRIÉTÉ 2.17 (INFLUENCE SUR  $I_{\mathcal{M}}$ )**

Soit  $\mathcal{M}'$  un sous motif de  $\mathcal{M}$ . Alors  $I_{\mathcal{M}} \subset I_{\mathcal{M}'}$ .

La définition du pointeur étant arbitraire, il est logique de définir la notion de changement de pointeur et de regarder sa conséquence sur  $I_{\mathcal{M}}$ .

**DÉFINITION 2.18 (CHANGEMENT DE POINTEUR)**

Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  deux classes de motifs pointés. On dit que  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  sont égaux à changement de pointeur près si et seulement si  $(M_0, v_0) = (M'_0, v'_0)$ .

**PROPRIÉTÉ 2.19 (TRANSLATION DE  $I_{\mathcal{M}}$ )**

Si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  sont égaux à changement de pointeur près, alors  $I_{\mathcal{M}}$  et  $I'_{\mathcal{M}}$  sont égaux à une translation de la forme  $n * \alpha + m * \beta [1]$  près, où  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ .

Afin d'étudier la répartition d'un motif dans un mot bi infini, on définit la notion de mot de localisation associé à un motif :

**DÉFINITION 2.20 (ENSEMBLE DE POINTEUR)**

Soit  $\mathcal{M}$  un facteur de  $U_{n, m}$ , on appelle ensemble de pointeurs  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$  dans  $U_{n, m}$  l'ensemble des pointeurs des représentants  $\mathcal{M}'$  de la classe de  $\mathcal{M}$  vérifiant que :

$$\forall (i, j) \in M' v'(i, j) = U_{i, j}$$

En d'autre terme,  $\mathcal{P}(\mathcal{M})$  est l'ensemble des pointeurs des différentes occurrences de  $\mathcal{M}$  dans  $U_{n,m}$ .

DÉFINITION 2.21 (MOT DE LOCALISATION)

Soit  $\mathcal{M}$  un facteur de  $U_{n,m}$ , on appelle mot de localisation de  $\mathcal{M}$  dans  $U_{n,m}$  le mot bi infini, bidimensionnel, binaire  $\mathcal{L}(\mathcal{M})$  défini par :

$$\mathcal{L}(\mathcal{M})_{n,m} = \begin{cases} 1 & \text{si } (n, m) \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce mot à pour but de localiser les pointeurs des différentes occurrences de  $\mathcal{M}$  dans  $U_{n,m}$ .

### 3 Pavage dans les mots sturmiens bidimensionnels

Le but de cette partie est de montrer qu'il est possible, sous certaines conditions raisonnables sur le motif choisi, d'obtenir un pavage en tuiles de retour dans le mot de localisation et de voir comment il induit un pavage en tuiles de retour dans le mot sturmien.

#### 3.1 Intervalle du cercle, motifs et direction privilégiée

Une question naturelle est de se demander à quoi ressemble l'ensemble des points du cercle unité associé à un motif pointé  $\mathcal{M}$ . Pour cela, il nous faut introduire la notion d'intervalle sur le cercle unité ainsi que quelques conventions de représentation.

DÉFINITION 3.1 (INTERVALLE DU CERCLE)

Soit  $U$  le cercle unité et  $p : U \rightarrow [0, 1[$  le plongement usuel. On appelle intervalle du cercle toute image par  $p$  d'un ensemble connexe de  $U$ . Tout intervalle du cercle peut être représenté canoniquement soit par un intervalle de  $[0, 1[$  soit par l'union de deux intervalles de  $[0, 1[$  de la forme  $[0, a[$  et  $[b, 1[$  avec  $0 \leq a \leq b \leq 1$  (Le symbole  $|$  indiquant que l'intervalle peut être ouvert ou fermé). On appelle taille d'un intervalle du cercle, la taille (au sens d'intervalles de  $\mathbb{R}$ ) de sa représentation canonique.

**Remarque :** On utilisera principalement la représentation canonique des intervalles du cercles ou une éventuelle translation (complète ou partielle) de celle-ci par un entier relatif. Par exemple :

$$\underbrace{[0, 1/4[ \cup [3/4, 1[}_{\text{représentation canonique}} \sim \underbrace{[-1/4, 1/4[}_{\text{translation partielle}} \sim \underbrace{[-1, -3/4[ \cup [-1/4, 0[}_{\text{translation complète}}$$

On définit la notion d'intersection et d'union à l'aide des antécédents sur le cercle. Cependant, les résultats usuels sur les intervalles de  $\mathbb{R}$  ne se prolongent pas tous aux intervalles du cercle. En particulier :

PROPRIÉTÉ 3.2 (INTERSECTION DE 2 INTERVALLES DU CERCLES)

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles du cercles, alors l'intersection de  $I$  et de  $J$  est soit un intervalle du cercle, soit l'union de deux intervalles du cercles.

Si  $|I| + |J| < 1$  alors leurs intersections est un intervalle du cercle. (Ceci étant vrai en particulier si  $|I|, |J| < 1/2$ )

Si  $\bigcap_{i \in [1, n]} I_i$  est un intervalle (avec  $|I_1| < 1$ ) alors pour tout intervalle du cercle  $I' \subset I_1$ ,  $\bigcap_{i \in [2, n]} I_i \cap I'$  est un intervalle.

Nous verrons que cette propriété joue un rôle relativement important. Par la suite, on ne précisera pas nécessairement que l'on parle d'intervalle du cercle.

PROPRIÉTÉ 3.3 (REPRÉSENTATION D'UN MOTIF)

L'ensemble des points de  $[0, 1[$  associé à un motif pointé  $\mathcal{M}$  de représentant canonique  $\mathcal{M}_0$  est défini par l'intersection d'intervalles du cercle :

$$I_{\mathcal{M}} = \bigcap_{(i,j) \in \mathcal{M}_0} R_{i*\alpha + j*\beta}^{-1}(I_{v_0(i,j)})$$

où  $I_1 = [0, \alpha[$ ,  $I_2 = [\alpha, \alpha + \beta[$  et  $I_3 = [\alpha + \beta, 1[$

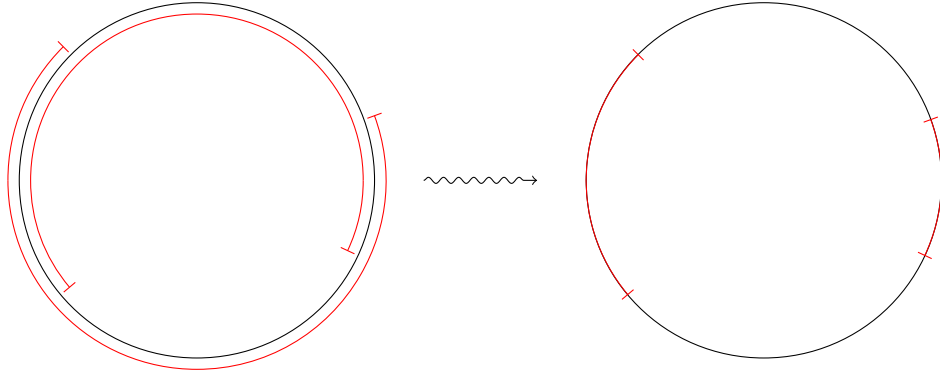


FIGURE 15 – Intersections d'intervalles dont le résultat sont deux intervalles

La proposition 3.2 nous indique donc que l'ensemble  $I_{\mathcal{M}}$  est une union d'intervalles du cercle. Cependant, nous allons voir qu'il est possible, sous certaines conditions sur la notion de motif, d'imposer que  $I_{\mathcal{M}}$  soit un unique intervalle.

Pour cela, rappelons que l'on peut imposer que  $|I_1|, |I_2| < 1/2$ . On peut alors montrer le résultat suivant :

**THÉORÈME 3.4 (MOTIF À INTERVALLE)**

Si  $|I_3| < 1/2$  alors pour tout motif pointé  $\mathcal{M}$ ,  $I_{\mathcal{M}}$  est un intervalle du cercle.

Si  $|I_3| > 1/2$  alors pour tout motif pointé 8–connexe  $\mathcal{M}$ ,  $I_{\mathcal{M}}$  est un intervalle du cercle.

**Démonstration :**

L'idée de cette démonstration est que, dans le premier cas, on peut construire l'intervalle final pas à pas en ne faisant que des intersections d'intervalles de taille  $< 1/2$ . Le deuxième cas est plus technique, il faut remarquer qu'un motif qui ne donnerait pas un intervalle ne peut pas contenir autre chose que des 3. La 8–connexité de se ramener à une construction proche du premier cas. Montrons tout d'abord le résultat suivant :

**LEMME 3.5**

1- Soit  $I_1 \dots I_n$  un ensemble fini d'intervalles du cercle tels que  $|I_i| < 1$ . Si  $I_1 \cap I_2$  et  $\bigcap_{i \in [2, n]} I_i$  est un intervalle alors  $\bigcap_{i \in [1, n]} I_i$  aussi.

2- Soit  $I_1 \dots I_n$  un ensemble fini d'intervalles du cercle tels que  $|I_i| < 1$ . Si  $\forall i > 1 I_1 \cap I_i$  est un intervalle, alors  $\bigcap_{i \in [1, n]} I_i$  est un intervalle.

Le premier résultat est une simple application de la dernière partie de la proposition 3.2. En effet  $I_1 \cap I_2$  est un sous intervalle de  $I_2$  et  $|I_2| < 1$  par hypothèse. Donc si  $\bigcap_{i \in [2, n]} I_i$  est un intervalle,  $\bigcap_{i \in [3, n]} I_i \cap (I_1 \cap I_2)$  aussi. Le second résultat s'obtient facilement par récurrence sur le nombre d'intervalles puis en appliquant le premier point.

Supposons que  $|I_3| < 1/2$ . Alors dans la formule  $I_{\mathcal{M}} = \bigcap_{(i,j) \in M_0} R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_{v_0(i,j)})$  tous les intervalles  $R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_{v_0(i,j)})$  sont de tailles inférieures à  $1/2$  donc d'après 3.2 leurs intersections 2 à 2 sont des intervalles. En appliquant le lemme on en déduit que  $I_{\mathcal{M}}$  est un intervalle.

Supposons que  $|I_3| > 1/2$ . Soit  $\mathcal{M}$  un motif tel que  $I_{\mathcal{M}}$  ne soit pas un intervalle du cercle. On va montrer par l'absurde que  $\forall (i, j) \in M_0, v_0(i, j) = 3$ . Supposons qu'il existe  $(i', j') \in M_0$  tel que  $v_0(i', j') \neq 3$ , montrons par récurrence sur la taille de  $\mathcal{M}_0$  que  $I_{\mathcal{M}}$  est un intervalle du cercle de taille inférieure à  $|I_{v_0(i', j')}|$ . Si  $|M_0| = 1$  alors  $I_{\mathcal{M}} = R_{i'*\alpha+j'*\beta}^{-1}(I_{v_0(i', j')})$ . Si  $|M_0| > 1$ , alors il existe  $(k, l) \in M_0 - (i', j')$  et

$$I_{\mathcal{M}} = I_{(\mathcal{M}_0 - (k, l))} \cap R_{k*\alpha+l*\beta}^{-1}(I_{v_0(k, l)})$$

or par hypothèse de récurrence,  $I_{(\mathcal{M}_0 - (k, l))}$  est un intervalle du cercle de taille inférieure à  $|I_{v_0(i', j')}|$  donc

$$|I_{(\mathcal{M}_0 - (k, l))}| + |R_{k*\alpha+l*\beta}^{-1}(I_{v_0(k, l)})| < |I_{v_0(i', j')}| + |R_{k*\alpha+l*\beta}^{-1}(I_{v_0(k, l)})|$$

or  $v_0(k, l) \in \{1, 2, 3\}$  donc  $|R_{k*\alpha+l*\beta}^{-1}(I_{v_0(k, l)})| \in \{|I_1|, |I_2|, |I_3|\}$ . De même  $v_0(i', j') \in \{1, 2\}$  donc  $|I_{v_0(i', j')}| \in \{|I_1|, |I_2|\}$ . Or on a vu que par construction  $|I_1| + |I_2| + |I_3| = 1$  et par hypothèse,  $|I_3| > 1/2$  donc  $|I_e| + |I'_e| >$

$1 \Rightarrow \epsilon = \epsilon' = 3$  or ici  $v_0(k, l) \neq 3$  donc

$$|I_{(\mathcal{M}_0 - (k, l))}| + |R_{k*\alpha+l*\beta}^{-1}(I_{v_0(k, l)})| < |I_{v_0(i', j')}| + |R_{k*\alpha+l*\beta}^{-1}(I_{v_0(k, l)})| < 1$$

et donc  $I_{\mathcal{M}}$  est bien un intervalle du cercle, de plus il est contenu dans  $I_{(\mathcal{M}_0 - (k, l))}$  donc

$$|I_{\mathcal{M}}| < |I_{(\mathcal{M}_0 - (k, l))}| < |I_{v_0(i', j')}| \text{ (par hypothèse de récurrence)}$$

Considérons maintenant que l'un des motifs  $\mathcal{M}$  de taille minimal parmi les motifs 8–connexes dont l'ensemble des points associé ne soit pas un intervalle. D'après ce qui précède, il ne contient que des 3 et  $|M_0| > 1$  donc il s'écrit :

$$I_{\mathcal{M}} = \bigcap_{(i, j) \in M_0} R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_3)$$

Considérons le graphe  $G = (V, E)$  construit ainsi :

$$\begin{cases} V = M_0 \\ (i_1 j_1)(i_2 j_2) \in E \Leftrightarrow \max(|i_2 - i_1|, |j_2 - j_1|) \leq 1 \end{cases}$$

$M_0$  8–connexe équivaut à  $G$  connexe. On peut montrer qu'il existe alors au moins un sommet de ce graphe tel qu'en enlevant ce sommet, le graphe reste connexe. En effet,  $G$  est connexe équivaut à  $G$  admet un arbre couvrant  $T$ . En enlevant l'une des feuille  $x$  de  $T$ ,  $T - x$  est un arbre couvrant de  $G - x$  et donc  $G - x$  est toujours connexe. Donc il existe un couple  $(i, j)$  dans  $M_0$  tel que  $\mathcal{M}_0 - (i, j)$  est un sous motif connexe de  $\mathcal{M}_0$ . Or par minimalité de  $\mathcal{M}_0$ ,  $I_{\mathcal{M}_0 - (i, j)}$  est un intervalle. Or

$$I_{\mathcal{M}} = I_{\mathcal{M}_0 - (i, j)} \cap R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_3)$$

mais comme  $M_0$  est connexe et  $|M_0| > 1$ ,  $(i, j)$  à un «voisin» :  $(k, l)$  (au sens de la 8–connexité) dans  $\mathcal{M}_0 - (i, j)$ . Montrons par une étude de cas que

$$J = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_3) \cap R_{k*\alpha+l*\beta}^{-1}(I_3) \text{ est un intervalle.}$$

1. Si  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = (\mathbf{i} + \mathbf{1}, \mathbf{j})$  alors  $J = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_3 \cap R_{\alpha}^{-1}(I_3)) = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(J')$ . Or  $J' = [\alpha + \beta, 1[ \cap [2\alpha + \beta, 1 + \alpha[$ .  $\alpha + \beta < 1/2$  donc  $2\alpha + \beta < 1$ ,  $J' = [2\alpha + \beta, 1[$  donc  $J$  est un intervalle.
2. Si  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = (\mathbf{i}, \mathbf{j} + \mathbf{1})$  alors  $J = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_3 \cap R_{\beta}^{-1}(I_3)) = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(J')$ . Or  $J' = [\alpha + \beta, 1[ \cap [\alpha + 2\beta, 1 + \beta[$ .  $\alpha + \beta < 1/2$  donc  $\alpha + 2\beta < 1$ ,  $J' = [\alpha + 2\beta, 1[$  donc  $J$  est un intervalle.
3. Si  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = (\mathbf{i} + \mathbf{1}, \mathbf{j} + \mathbf{1})$  alors  $J = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_3 \cap R_{\alpha+\beta}^{-1}(I_3)) = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(J')$ . Or  $J' = [\alpha + \beta, 1[ \cap [\alpha + 2\beta, 1 + \alpha + \beta[$ .  $\alpha + \beta < 1/2$  donc  $2\alpha + 2\beta < 1$ ,  $J' = [2\alpha + 2\beta, 1[$  donc  $J$  est un intervalle.
4. Si  $(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = (\mathbf{i} + \mathbf{1}, \mathbf{j} - \mathbf{1})$  alors  $J = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_3 \cap R_{\alpha-\beta}^{-1}(I_3)) = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(J')$ . Or  $J' = [\alpha + \beta, 1[ \cap [2\alpha, 1 + \alpha - \beta[$ .  $\alpha < 1/2$  donc  $2\alpha < 1$ ,  $J' = [\max(2\alpha, \alpha + \beta), \min(1, 1 + \alpha - \beta)[$  donc  $J$  est un intervalle.

Les autres cas peuvent être ramenés à ceux-ci en échangeant le rôle de  $(i, j)$  et  $(k, l)$ . Donc, nous avons montré que dans tous les cas :

$$J = R_{i*\alpha+j*\beta}^{-1}(I_3) \cap R_{k*\alpha+l*\beta}^{-1}(I_3) \text{ est un intervalle.}$$

or

$$I_{\mathcal{M}_0 - (i, j)} = R_{k*\alpha+l*\beta}^{-1}(I_3) \cap I_{\mathcal{M}_0 - \{(i, j), (k, l)\}}$$

est un intervalle, donc d'après le lemme,  $I_{\mathcal{M}}$  est un intervalle. Il y a contradiction. Donc il n'existe pas de motif 8–connexe  $\mathcal{M}$  tel que  $I_{\mathcal{M}}$  ne soit pas un intervalle. Ce qui démontre la seconde partie du théorème. ■

En conclusion, nous ne regarderons à partir de maintenant que des motifs 8–connexes, cette nouvelle condition nous permettant d'être sûr que  $I_{\mathcal{M}}$  est bel et bien un intervalle. De plus, par construction on peut en déduire le résultat suivant :

### PROPRIÉTÉ 3.6

Il existe une translation (complète ou partielle) de  $I_{\mathcal{M}}$  qui soit un intervalle de  $\mathbb{R}$  dont les bornes soient des éléments de la forme :  $n - (z_1\alpha + z_2\beta)$  avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ . De plus, la taille de  $I_{\mathcal{M}}$  peut s'écrire sous la forme :

$$|I_{\mathcal{M}}| = |n - (z_1\alpha + z_2\beta)| \text{ avec } n \in \mathbb{N}, z_1, z_2 \in \mathbb{Z} \text{ et } (z_1\alpha + z_2\beta) > 0$$

### DÉFINITION 3.7 (DIRECTION PRIVILÉGIÉE D'UN MOTIF)

Soit  $\mathcal{M}$  un motif tel que  $|I_{\mathcal{M}}| = |n - (z_1\alpha + z_2\beta)|$  avec les conventions précédentes. On appelle direction privilégiée de  $\mathcal{M}$  la valeur :  $d_{\mathcal{M}} = z_1\alpha + z_2\beta$ . On appelle  $n$  le facteur d'extension

**Remarques :** Si  $d_{\mathcal{M}}$  est nul c'est que soit  $I_{\mathcal{M}} = [0, 1[$  (motif vide) soit  $I_{\mathcal{M}} = \emptyset$  (le motif n'est pas présent dans le mot étudié). On considèrera donc toujours que  $\mathcal{M}$  est un facteur du mot étudié, c'est-à-dire que  $d_{\mathcal{M}} \neq 0$ . La direction privilégiée en invariante par changement de pointeur, on peut donc parler de la direction fondamentale d'un motif. De plus on peut remarquer que  $|I_{\mathcal{M}}| = 1 - \{d_{\mathcal{M}}\}$ .

### 3.2 Direction privilégiée, notion de primalité

Considérons maintenant un motif 8-connexe  $\mathcal{M}$ ,  $d_{\mathcal{M}}$  sa direction privilégiée et  $L(\mathcal{M})$  son mot de localisation. On peut remarquer que  $d_{\mathcal{M}}$  correspond «presque» à une direction dans le mot de localisation dans le sens où l'on peut se déplacer dans le mot de localisation en faisant des «sauts» de  $z_1\alpha + z_2\beta$ , ce qui correspond, dans la représentation classique à faire des «sauts» de  $z_1$  lettres vers la droite et  $z_2$  lettres vers le haut. On obtient ainsi des mots bi infinis binaires.

DÉFINITION 3.8 (LIGNE)

Soit  $U_{(n,m)}$  un mot bi infini bidimensionnel, on définit la ligne passant par  $(n, m)$  de direction  $d = z_1\alpha + z_2\beta$  comme le mot bi infini  $V_k = U_{(n+k*z_1, m+k*z_2)}$ .

1	2	3	3	①	2
2	3	3	①	2	3
3	3	①	2	3	3
3	①	2	3	3	①
③	1	2	3	3	3
1	②	3	3	3	3

FIGURE 16 – Exemple de lignes de directions :  $\alpha + \beta$  et  $2\alpha + \beta$

PROPRIÉTÉ 3.9 (MOTS EN DIRECTION PRIVILÉGIÉE)

Les mots bi infinis unidimensionnels obtenus dans le mot de localisation en regardant les lignes de direction privilégiée sont des mots sturmiens

**Remarque :** La direction privilégiée se révèle être la seule direction vérifiant cette propriété.

**Démonstration :**

En regardant dans le mot de localisation dans la direction  $d_{\mathcal{M}}$ , on considère le système dynamique associé à la rotation d'angle  $d_{\mathcal{M}}$  sur  $[0, 1[$  que l'on découpe en deux intervalles :  $I_{\mathcal{M}}$  (de codage 1) et son complémentaire (de codage 0). Or  $|I_{\mathcal{M}}| = 1 - \{d_{\mathcal{M}}\}$ , on est donc dans le cas de la troisième caractérisation des systèmes dynamiques sturmiens. ■

Cette direction joue donc véritablement un rôle spécial pour le motif considéré. Cependant, pour un motif 8-connexe quelconque, le terme de «direction» n'est pas approprié. Considérons par exemple le cas où  $d_{\mathcal{M}} = 2\alpha + 2\beta$ . Le mot de localisation est donc formé de mots sturmiens mais ceux-ci sont emboîtés 2 par 2. Si on considère par exemple les mots sur la droite passant par la lettre en position  $x$  on a 2 mots qui se chevauche :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & (x - 2n(\alpha + \beta)) & \dots & (x - 2(\alpha + \beta))(x + 2(\alpha + \beta)) & \dots & (x + 2n(\alpha + \beta)) & \dots \\ \dots & (x - (2n + 1)(\alpha + \beta)) & \dots & (x - (\alpha + \beta))(x + (\alpha + \beta)) & \dots & (x + (2n + 1)(\alpha + \beta)) & \dots \end{array}$$

1	2	3	3	1	②
2	3	3	1	②	3
3	3	1	②	3	3
3	1	②	3	3	1
3	①	2	3	3	3
①	2	3	3	3	3

FIGURE 17 – Exemple de mots emboîtés  $d_{\mathcal{M}} = 2(\alpha + \beta)$

Dans ce cas, la «direction» à considérer devrait être  $\alpha + \beta$ . De façon générale :



DÉFINITION 3.10 (DIRECTION PRIVILÉGIÉE PREMIÈRE ET MOTIF PREMIER)

Soient  $\mathcal{M}$  un motif,  $d_{\mathcal{M}} = z_1\alpha + z_2\beta$  sa direction privilégiée, on appelle direction privilégiée première de  $\mathcal{M}$ , notée  $\overline{d_{\mathcal{M}}}$  la valeur suivante :

$$\overline{d_{\mathcal{M}}} = \frac{z_1}{d}\alpha + \frac{z_2}{d}\beta \text{ où } d = \text{PGCD}(z_1, z_2)$$

Si  $d_{\mathcal{M}} = \overline{d_{\mathcal{M}}}$  (c'est à dire que  $d = 1$ ) on dit que le motif est premier.

En considérant cette direction, on perd le caractère sturmien des mots considérés. Cependant, deux possibilités s'ouvrent à cette étude pour des motifs généraux. Tout d'abord, le caractère sturmien n'est entièrement nécessaire pour la suite, seule la présence de 2 mots de retour pour 1 est utile. Il est donc possible (quitte à ne plus considérer 1 mais un certain  $1^k$ ) de remarquer cette propriété dans le cas général. Une autre possibilité serait de prouver l'éventuelle existence d'un prolongement du motif en un motif premier. Cette deuxième idée permet d'obtenir des résultats partiels dans des cas particuliers, comme par exemple :

PROPRIÉTÉ 3.11 (PROLONGEMENT PREMIER)

Si  $d_{\mathcal{M}} < 1$  alors  $\mathcal{M}$  peut se prolonger en un motif premier constitué de  $d$  répétitions de  $\mathcal{M}$  successives dans la direction  $\overline{d_{\mathcal{M}}}$ .

En d'autres termes, quand on regarde dans la direction  $\overline{d_{\mathcal{M}}}$ , les 1 arrivent sous la forme de  $1^d$ , passer du motif  $\mathcal{M}$  au motif premier consiste à remplacer  $1^d$  par  $10^{d-1}$ .

Dans le cas général, on se heurte à des résultats délicats, comme par exemple :

PROPRIÉTÉ 3.12 (PROBLÈME DE MAXIMALITÉ)

Soit  $\mathcal{M}$  un motif tel que  $d_{\mathcal{M}} < |\beta - \alpha|$  alors il est possible de prolonger infiniment ce motif sans changer  $I_{\mathcal{M}}$ .

A partir de maintenant, on se placera dans le cadre de motif premier. 1 admet donc deux mots de retour dans la direction  $d_{\mathcal{M}}$  :  $w_1$  et  $w_2$ , le recodage par  $w_1, w_2$  donnant toujours un mot sturmien, on peut supposer que  $w_1w_1$  n'apparaît pas. On a donc le découpage de notre intervalle  $I_{\mathcal{M}}$  en deux sous intervalles  $I_{w_1}$  et  $I_{w_2}$ .  $w_1$  ne se répétant pas cela veut dire que l'application de premier retour pour 1 envoie  $I_{w_1}$  dans  $I_{w_2}$  et donc que  $|I_{w_1}| < |I_{w_2}|$ . On va voir que grâce à ses deux mots de retour, on va pouvoir créer un pavage à 3 tuiles dans le mot de localisation. On peut considérer sans perte de généralité (quitte à changer la rotation d'angle  $d_{\mathcal{M}}$  en la rotation d'angle  $1 - d_{\mathcal{M}}$ ) que  $I_{\mathcal{M}}$  se découpe de la façon suivante :

On notera  $R_{w_1}$  la rotation  $R_{d_{\mathcal{M}}}^{|w_1|}$  et  $R_{w_2}$  la rotation  $R_{d_{\mathcal{M}}}^{|w_2|}$ .

### 3.3 Pavage dans le mot de localisation et dans le mot sturmien

Nous avons vu que  $d_{\mathcal{M}}$  est de la forme  $z_1\alpha + z_2\beta$  avec éventuellement  $z_1$  ou  $z_2$  nul (mais pas les deux simultanément). Cela nous permet de définir la notion de «ligne suivante» :

DÉFINITION 3.13 (LIGNE SUIVANTE)

Soit  $U_{(n,m)}$  un mot bi infini bidimensionnel. Soit  $V_k$  la ligne passant par  $(n, m)$  de direction  $d_{\mathcal{M}}$ . On appelle ligne suivante, la ligne  $V'_k$  de même direction mais passant par :

$$\begin{cases} (n+1, m) & \text{si } |z_1| \geq |z_2| > 0 \text{ ou } z_1 = 0 \\ (n, m+1) & \text{sinon} \end{cases}$$

On appelle direction transverse à  $d_{\mathcal{M}}$ , toute direction envoyant une ligne de direction  $d_{\mathcal{M}}$  sur la ligne suivante et dont l'angle est positif.

Dans la suite, nous allons construire les trois types de tuiles de la façon suivante :  $w_1$  servira de diagonale pour le premier type de tuiles, les deux autres sommets se situant sur la ligne suivante et sur la ligne précédente. Les autres tuiles seront formées de deux  $w_2$  situés sur des lignes voisines.

Afin de démontrer l'existence de tels pavages, on va montrer l'existence d'une direction  $\mu$  comme dans le dessin précédent. On va tout d'abord montrer qu'il existe des directions envoyant toujours le début d'un  $w_1$  sur le début d'un  $w_1$  ou d'un  $w_2$ . Puis on va montrer que parmi ces directions, certaines vérifient toujours que la fin d'un  $w_1$  provient de la fin d'un  $w_1$  ou d'un  $w_2$ . Les directions ainsi trouvées permettront de construire les tuiles de type 1. La construction des autres tuiles sera alors assurée.

PROPRIÉTÉ 3.14 (DIRECTION  $\mu$ , CONDITION 1)

Il existe des directions transverses à  $d_{\mathcal{M}}$  envoyant tout élément de  $I_{w_1}$  sur un élément de  $I_{\mathcal{M}}$

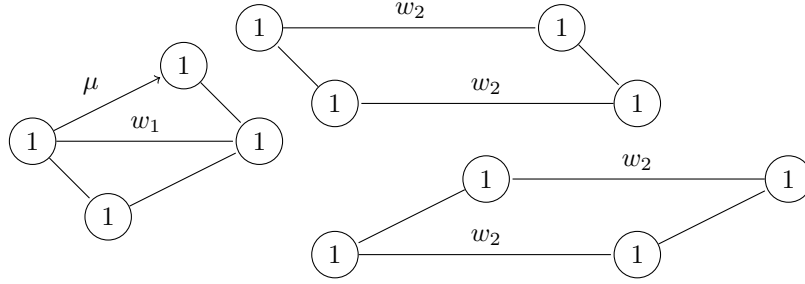


FIGURE 18 – Aspect des 3 types de tuiles

### Démonstration :

Plaçons nous dans le cas où  $|z_1| > |z_2| > 0$  (les autres cas se traitant de la même façon). Soit  $\mathcal{D}_t = \{ \text{partie fractionnaire des angles des directions transverses} \}$ . Alors  $\mathcal{D}_t = \{ \{ (k * z_1 + 1)\alpha + k * z_2\beta \}, k \in \mathbb{Z} \}$ .  $\alpha, \beta$  et 1 étant rationnellement indépendants, cette ensemble est dense dans  $[0, 1[$ . Or une direction transverse  $\mu$  vérifie la propriété si et seulement si elle envoie  $I_{w_1}$  dans  $I_{\mathcal{M}}$ , c'est-à-dire si elle est d'angle positif et si elle envoie la fin de  $I_{w_1}$  avant la fin de  $I_{\mathcal{M}}$ . C'est-à-dire, si elle envoie la fin de  $I_{w_1}$  dans  $I_{w_2}$ . On en déduit que  $\mu$  satisfait la propriété si et seulement si la partie fractionnaire de son angle appartient à  $[0, |I_{w_2}|[$  qui est un intervalle non vide de  $[0, 1[$ . Par densité de  $\mathcal{D}_t$  dans  $[0, 1[$ , de telles directions existent. ■

### PROPRIÉTÉ 3.15 (DIRECTION $\mu$ , CONDITION 2)

Il existe des directions  $\mu$  transverses à  $d_{\mathcal{M}}$  vérifiant la condition 1 et telle que  $R_{-\mu} \circ R_{w_1}(I_{w_1}) \subset I_{\mathcal{M}}$ .

### Démonstration :

On va montrer que cette nouvelle condition est remplie si  $\{\mu\}$  est suffisamment petite. Plus précisément si  $\{\mu\} < 1 - |I_{\mathcal{M}}|$ , ce qui est réalisable car  $|I_{\mathcal{M}}| < 1$  et l'ensemble des parties fractionnaire des angles des directions transverses vérifiant la condition 1 est dense dans  $[0, |I_{w_2}|[$ .

Soit  $\mu$  une direction transverse telle que  $\{\mu\} < 1 - |I_{\mathcal{M}}|$ . Alors  $\mu$  vérifie la condition 1. Montrons qu'elle vérifie aussi la condition 2. Considérons un  $w_1$ , la condition 1 impose que l'on soit dans cette condition :

Chaque  $w_1$  étant «attaché» à un 1 de la ligne suivante, on ne peut être que dans l'une de ses deux configurations.

Il nous faut montrer que dans chacune de ses configurations,  $-\mu$  envoie le 1 après le  $w_1$  sur un 1 de la ligne précédente.

**Cas 1 :**  $A$  désigne le dernier point d'attache d'un  $w_1$  de la ligne précédente. Par construction, il n'y a pas de  $w_1$  entre le point  $A$  et le  $w_1$  considéré. De même, à la ligne précédente, le prochain  $w_1$  après celui attaché en  $A$  est attaché après le  $w_1$  étudié. Donc le  $w_1$  attaché en  $A$  est suivi d'une suite au moins aussi longue de  $w_2$  que la suite de  $w_2$  située entre  $A$  et le  $w_1$  étudié. Il y a donc bien un 1 là où il faut.

**Cas 2 :** Le cas 1 nous permet de compléter notre dessin. Il suffit donc de considérer la situation suivante :

Le résultat pour les autres  $w_1$  sera alors obtenu par itérations successives. Comme aucun des 1 entre les deux  $w_1$  n'est un point d'accroche d'un  $w_1$  (par hypothèse du cas 2),  $B$  est suivi d'une suite au moins aussi grande de  $w_2$  que le  $w_1$  précédent celui étudié.

La question est de savoir si  $C$  est le début d'un  $w_1$  ou d'un  $w_2$ . Montrons que la condition  $\{\mu\} < 1 - |I_{\mathcal{M}}|$  impose bien qu'il s'agit d'un  $w_1$ .  $C$  est un point de  $I_{\mathcal{M}}$ , de plus  $\mu(C)$  est un point de  $I_{w_1}$  donc  $C \in R_{-\mu}(I_{w_1})$ . Or

$$R_{-\mu}(I_{w_1}) \cap I_{w_2} = R_{-\mu}(I_{w_1}) \cap R_{\mu}(I_{w_2})$$

et  $I_{w_1} \cap R_{\mu}(I_{w_2})$  est vide car  $\{\mu\} < 1 - |I_{\mathcal{M}}|$ .

Donc, comme  $I_{\mathcal{M}} = I_{w_1} \cap I_{w_2}$ , on en déduit que  $C \in I_{w_1}$  et donc que l'on a bien un 1 là où on le souhaite.

Ces deux conditions montrent donc que l'on peut trouver  $\mu$  telle que l'on puisse former une tuile de type 1 autour de chaque  $w_1$ . Les autres tuiles se déduisent alors naturellement. ■

Il reste maintenant à voir à quoi correspondent ses pavages dans le mot sturmien. On peut remarquer que les tuiles définies dans le mot de localisation sont «minces», c'est à dire qu'elles n'empiètent qu'au plus sur deux lignes. Quitte à ouvrir les tuiles 2 et 3 en bas (ou en haut), les tuiles sont donc en lien directe avec les mots de retour dans l'intervalle  $I_{\mathcal{M}}$  (dans un alphabet à 3 lettres) pour le système dynamique associé à des rotations d'angles  $|I_{\mathcal{M}}| = 1 - \{d_{\mathcal{M}}\}$ . Nous allons montrer le résultat suivant :

THÉORÈME 3.16 (MOTS DE RETOUR DANS UN MOT STURMIEN BIDIMENSIONNEL)

*Un motif premier 8–connexe, admet 3 ou 4 mots de retour.*

**Démonstration :**

Pour cela, on recode  $U_{(n,m)}$  en mettant un 4 là où est pointé un motif  $\mathcal{M}$ . On obtient alors un système dynamique à 4 intervalles (l'un d'entre eux pouvant être coupé en deux)(sauf cas dégénéré).

Quitte à changer de pointeur pour le motif, on peut placer l'intervalle du 4 de telle sorte qu'aucun des 4 intervalles ne soit coupé en deux. Une étude simple nous montre alors que 4 admet exactement 3 ou 4 mots de retour. Pour comprendre cette étude, on peut par exemple, traiter le cas suivant :

On voit que les images successives de  $I_4$  vont rencontrer les points de jonctions 1 – 2, 2 – 3, 3 – 4. En plaçant les antécédents de ses points sur  $I_4$  on obtient une partition de  $I_4$  en 4 intervalles, chacun correspondant à l'un des mots de retour. Par exemple :

On obtient 3 mots de retour uniquement si  $I_4$  «évite» l'un des points de jonctions. Ceci se produit dans le cas où  $\mathcal{M}$  est un motif tel que (à un changement de pointeur près),  $\exists i \in \{1, 2, 3\} \mid I_i \subset I_{\mathcal{M}}$ . ■

## Conclusion

En conclusion, ce stage m'a permis de me familiariser avec les notions de systèmes dynamiques associés aux plans discrets, aux difficultés combinatoires découlant du passage à la dimension 2. Il m'a aussi permis de démontrer un résultat intéressant. Si le résultat obtenu est encourageant, il reste beaucoup de choses à faire. L'étude par les cellules de Voronoï semble aboutir à une caractérisation à 7 mots de retour, cette étude réduit ce nombre à 4 dans le cas des motifs 8–connexes premiers. La question des motifs non premiers reste encore à traiter. De plus, le but serait d'obtenir une caractérisation à 3 mots de retour, qui permettrait des recodages du même genre que pour les mots sturmiens unidimensionnels.

## Références

- [1] V. Berthe and L. Vuillon. Tilings and rotations : a two-dimensional generalization of Sturmian sequences. *Discrete Math*, 223 :27–53, 2000.
- [2] E.B. Christoffel. Observatio arithmetica. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1873006(1) :148–152, 1873.
- [3] M. Lothaire. *Algebraic combinatorics on words*. Cambridge University Press, 2002.
- [4] M. Morse and G.A. Hedlund. Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, pages 815–866, 1938.
- [5] M. Morse and G.A. Hedlund. Symbolic dynamics II : Sturmian sequences. *Amer. J. Math*, 62 :1–42, 1940.
- [6] G. Rote. Sequences with subword complexity 2.
- [7] L. Vuillon. A characterization of Sturmian words by return words. *European Journal of Combinatorics*, 22(2) :263, 2001.