Université de Savoie Année 07/08

Géométrie et topologie 2 : MATH803

Stéphane Simon

Table des matières

1 Points critiques d'application

1.1 Théorème du rang constant

Dans le cas linéaire le résultat suivant est bien connu :

Proposition 1.1.1 Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors A est équivalente à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dém. : en TD.

Lorsque l'on s'intéresse aux applications différentiables on a l'analogue en supposant le rang de l'application constant.

On notera $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^m, 0$ une application définie sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ telle que $f(0) = 0$. Si $g : U_a \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(a) \to \mathbb{R}^m$ alors $f(h) = g(a+h) - g(a)$ est définie sur un voisinage de 0, vérifie $f(0) = 0$, a même régularité et même rang que g.

Définition 1.1.1 Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et $\rho : X \to \mathbb{R}$ une application. L'application ρ est *semi-continue inférieurement* (resp. *supérieurement*) en x_0 si pour tout $a \in \mathbb{R}$ tel que $a < \rho(x_0)$ (resp. $\rho(x_0) < a$) l'ensemble $\{x \in X : a < \rho(x)\}$ (resp. $\{x \in X : \rho(x) < a\}$) est un voisinage de x_0. L'application ρ est *semi-continue* sur X si elle l'est en tout point de X.

Remarque 1.1.1 La terminologie « inférieurement » vient du fait que si $a < \rho(x_0)$ alors $a < \rho(x)$ pour x dans un voisinage de x_0.

Proposition 1.1.2 ρ est semi-continue inférieurement ssi $\forall a \in \mathbb{R} : \rho^{-1}(]a, +\infty[)$ (resp. $\rho^{-1}(]\infty, a]))$ est ouvert (resp. fermé) dans X.

On a une propriété analogue pour une application semi-continue supérieurement.

Exemple 1.1.1 Soit f une fonction semi-continue inférieurement sur un espace (quasi)-compact non vide X. Alors il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x)$.

Proposition 1.1.3 Soient U un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^{k \geqslant 1}$. Le rang de f ($\mathrm{rg}_x f := \mathrm{rg}\,(df(x))$) est semi-continu inférieurement.

Dém. : en effet, si f est de rang r_0 en 0 alors le plus grand mineur non nul de $Jf(0)$ est d'ordre r_0. Comme ce mineur est continu, il reste non nul sur un voisinage de 0. Donc si $a < r_0$ alors $a < \mathrm{rg}_x f$ sur un voisinage de 0.

On dit aussi plus simplement que le rang d'une application ($C^{k \geqslant 1}$) ne peut qu'augmenter au voisinage d'un point.

Corollaire 1.1.1 Si le rang d'une application $C^{k \geqslant 1}$ est maximal (*i.e.* égal à $\min(m, n)$) en un point alors il est constant sur un voisinage de ce point.

Théorème 1.1.1 (du rang constant) Soit $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^m, 0$ une application de classe $C^{k \geqslant 1}$ et de rang constant r ($\leqslant \min(m, n)$). Alors il existe des difféomorphismes C^k, $\varphi : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ et $\psi : \mathbb{R}^m, 0 \to \mathbb{R}^m, 0$ tels que pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ suffisamment voisin de 0 :

$$\psi \circ f \circ \varphi(x) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Dém. : comme f est de rang r, on peut supposer sans perte de généralité que le mineur $|(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(0))_{1 \leqslant i,j \leqslant r}| \neq 0$.

Considérons $\tilde{\varphi}(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x), x_{r+1}, \ldots, x_n)$ défini sur un voisinage de 0. Alors la matrice jacobienne de $\tilde{\varphi}$ (triangulaire par blocs) est inversible en 0. D'après le théorème d'inversion locale, $\tilde{\varphi}$ est un difféomorphisme local de classe C^k ; notons φ sa réciproque. Alors on a :

$$f \circ \varphi(x) = (x_1, \ldots, x_r, g_{r+1}(x), \ldots, g_m(x)).$$

avec $g_i = f_i \circ \varphi$ pour $r+1 \leqslant i \leqslant m$.

Comme la composition par un difféomorphisme ne change pas le rang, le rang de $f \circ \varphi$ est encore r. Cela signifie que $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{r+1 \leqslant i \leqslant m \\ r+1 \leqslant j \leqslant n}} = 0$ (sinon le rang serait au moins $r+1$). Dès lors, les $(g_i)_{r+1 \leqslant i \leqslant m}$ dépendent uniquement des variables $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$. Il vient :

$$f \circ \varphi(x) = (x_1, \ldots, x_r, \tilde{g}_{r+1}(x_1, \ldots, x_r), \ldots, \tilde{g}_m(x_1, \ldots, x_r)).$$

Posons enfin, $\psi(y) = (y_1, \ldots, y_r, y_{r+1} - \tilde{g}_{r+1}(y_1, \ldots, y_r), \ldots, y_m - \tilde{g}_m(y_1, \ldots, y_r))$. On vérifie que ψ est C^k et que sa différentielle en 0 est inversible. Alors si x est suffisamment voisin de 0, en notant $\underline{x}_r = (x_1, \ldots, x_r)$ on obtient :

$$\psi \circ f \circ \varphi(x) = \psi(\underline{x}_r, \tilde{g}_{r+1}(\underline{x}_r) - \tilde{g}_{r+1}(\underline{x}_r), \ldots, \tilde{g}_m(\underline{x}_r) - \tilde{g}_m(\underline{x}_r)) = (\underline{x}_r, \underline{0}).$$

D'où le résultat.

Définition 1.1.2 Une application $C^{k \geqslant 1}$ de rang constant est une *subimmersion*.

Remarque 1.1.2 Cas particuliers *fondamentaux* :

1. *Submersion* : $r = m \leqslant n$. L'application f « se lit » localement comme la projection canonique $\pi_m : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$, $\pi_m(x) = (x_1, \ldots, x_m)$.
2. *Immersion* : $r = n \leqslant m$. L'application f « se lit » localement comme l'injection canonique $j_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, $j_n(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.

Exemple 1.1.2

1. Submersion $\big(\det(A+H) = \det(A) + tr(co(A)H) + O(H^2)\big)$.
2. Immersion $\Big(\gamma(t) = (\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{t(t^2-1)}{t^2+1})$ pour $t \in]-\infty, 1[$ est injective et $\operatorname{Im}\gamma$ est fermé$\Big)$.
3. (a) Difféomorphisme $\varphi : A \in GL_n(\mathbb{K}) \overset{C^\omega}{\mapsto} A^{-1}, d\varphi(A).H = -A^{-1}HA^{-1}$ (commenter $GL(E)$ ouvert si E Banach ; $GL_n(\mathbb{K})$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

   (b) $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ & z & \mapsto & z^2 \end{array}$ (*revêtement à 2 feuillets*).
4. Si f est une submersion (resp. immersion) C^1 et si h a une dérivée suffisamment petite alors $f + h$ est encore une submersion (resp. immersion).

Corollaire 1.1.2 Soit $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^m, 0$ une submersion de classe $C^{k \geqslant 1}$. Alors f est ouverte.

Proposition 1.1.4

1. Une subimmersion injective est une immersion (injective).
2. Une submersion injective (resp. bijective) est un difféomorphisme sur son image *ouverte* (resp. global).

Corollaire 1.1.3 Soit $f : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}^m, 0$ une submersion de classe $C^{k \geqslant 1}$. Alors les niveaux de f sont « difféomorphes » à des (ouverts de) sous-espaces affines de codimension m.

Dém. : en effet, le théorème de « redressement » précédent signifie que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & \pi_m & \\ \mathbb{R}^n, 0 & \rightarrow & \mathbb{R}^m, 0 \\ \varphi \downarrow & \circlearrowleft & \uparrow \psi \\ \mathbb{R}^n, 0 & \rightarrow & \mathbb{R}^m, 0 \\ & f & \end{array}$$

Donc $f^{-1}(c) = (\psi^{-1} \circ \pi_m \circ \varphi^{-1})^{-1}(c) = \varphi(\pi_m^{-1}(\psi(c))) = \varphi(\{b\} \times \mathbb{R}^{n-m})$ avec $b = (b_1, \ldots, b_m) = \psi(c)$.

Remarque 1.1.3 La boule $B_n(0,1)$ est $C^\omega-$difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.3 Un *plongement* est une immersion qui est un homéomorphisme sur son image.

Proposition 1.1.5 Une immersion est localement un plongement.

1.2 Théorème de Sard

Définition 1.2.1 Le *volume* d'un pavé ouvert $P(a,b) :=]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$ de $\mathbb{R}^n$ est

$$vol(P) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \text{ avec } a < b.$$

Définition 1.2.2 Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est *négligeable* ou *de mesure nulle* si pour tout $\epsilon > 0$, A peut être recouverte par une famille dénombrable de pavés (ouverts) dont la somme des volumes est inférieure ou égale à ϵ.

Proposition 1.2.1 Si $A \subseteq B$ et B est négligeable alors A est négligeable.

Proposition 1.2.2 Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.
Dém. : en TD.

Exemple 1.2.1 $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ est négligeable dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2.1 Dans la définition de partie négligeable, on peut considérer des pavés fermés.

Proposition 1.2.3 Soit P un pavé de $\mathbb{R}^n$ et $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de pavés ouverts recouvrant $\bar{P}$. Alors

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} vol(P_i) \geqslant vol(P).$$

Dém. : le nombre n d'entiers dans l'intervalle $]a, b[$ vérifie $b - a - 1 \leqslant n \leqslant b - a + 1$. En supposant que $b_i - a_i \geqslant 1$, on obtient donc que le nombre $n_{P(a,b)}$ de points à coordonnées entières de $P(a,b)$ vérifie :

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - 1) \leqslant n_{P(a,b)} \leqslant \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + 1).$$

Comme $\bar{P}(a,b)$ est compact, on peut extraire un sous-recouvrement fini $P_1, \ldots, P_N$ de (P_i). En particulier,

$$\prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i - 1) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} (b_i^j - a_i^j + 1).$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Alors le pavé $tP(a,b) := P(ta, tb)$ est recouvert par les pavés $tP_1, \ldots, tP_N$ d'où :

$$\prod_{i=1}^{n} (tb_i - ta_i - 1) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{n} (tb_i^j - ta_i^j + 1).$$

En multipliant par $\dfrac{1}{t^n}$ puis en prenant la limite $t \to +\infty$, on obtient le résultat annoncé.

Corollaire 1.2.1 Un pavé n'est pas de mesure nulle.

Corollaire 1.2.2 Si A est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$ alors $\mathbb{R}^n \setminus A$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Dém. : supposons qu'il existe P tel que $P \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \varnothing$. Alors $P \subseteq A$. Or, A est de mesure nulle donc P est aussi de mesure nulle $\rightarrow\leftarrow$.

Définition 1.2.3 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable.

- Un point $x \in U$ est *critique* si $\mathrm{rg}_x f < \min(m, n)$. L'ensemble des points critiques est le *lieu critique*, noté C_f.
- Une *valeur critique* $y \in \mathbb{R}^m$ est l'image d'un point critique (*i.e.* $C_f \cap f^{-1}(y) \neq \varnothing$) ; on note $\Delta_f = f(C_f)$ le *discriminant* de f (*i.e.* l'ensemble des valeurs critiques).
- Un point $y \in \mathbb{R}^m$ qui n'est pas une valeur critique est une *valeur régulière*. On dit aussi d'un point x tel que $\mathrm{rg}_x f$ est maximal qu'il est *régulier* (mais $f(x)$ peut être une valeur critique).

Théorème 1.2.1 (de Sard) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application de classe $C^{k > \frac{n}{m} - 1}$. Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle.

Dém. : on va démontrer le résultat pour $n = m = 1$. On considère d'abord la restiction de f à $[0, 1]$. Comme f' est continue sur $[0, 1]$, elle y est uniformément continue.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que si $|x - y| < \eta$ alors $|f'(x) - f'(y)| < \epsilon$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier tel que $\dfrac{1}{N} < \eta$. Considérons le recouvrement $([\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}])_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ de $[0, 1]$. Soit $x \in C_f \cap [\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}]$. Alors $|f'(y)| < \epsilon$ pour $y \in [\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}]$. En particulier, $|f(x_1) - f(x_2)| < \dfrac{\epsilon}{N}$ pour $x_1, x_2 \in [\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}]$.

Remarquons que $f(C_f) = \displaystyle\bigcup_{C_f \cap [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}] \neq \varnothing} f(C_f \cap [\dfrac{k}{N}, \dfrac{k+1}{N}])$. Or chacune des images est contenue dans un intervalle de longueur au plus $\dfrac{\epsilon}{N}$. Enfin, $\mathbb{R} = \displaystyle\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [p, p+1]$. D'où le résultat.

Remarque 1.2.2 L'ensemble des points critiques peut être gros.

Corollaire 1.2.3 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe $C^{k > \frac{n}{m} - 1}$, $m \leqslant n$. Alors pour presque tout $y \in \mathbb{R}^m$, on a :

- $f^{-1}(y) = \varnothing$
- ou bien, pour tout $x \in f^{-1}(y)$, il existe un voisinage U de x tel que $U \cap f^{-1}(y) \cong \mathbb{R}^{n-m} \times \{\underline{0}\}$.

Remarque 1.2.3 En fait, si l'on considère $g = f_{|U} : U \to \mathbb{R}^m$ alors toute valeur suffisament voisine de $y = f(x)$ est atteinte par g et le « feuilletage » des niveaux de g est difféomorphe à des (ouverts de) sous-espaces affines parallèles 2 à 2.

Exemple 1.2.2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2 = ((x+1)^2 + y^2 - 1)((x-1)^2 + y^2 - 1).$$

Alors :

- f est paire et présente une « symétrie axiale ».
- $C_f = \{0, (-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0)\}$.
- $f(C_f) = \{0, -4\}$.
- Les courbes de niveau $I_c = f^{-1}(c)$ sont fermées et bornées (f est coercive) donc compactes. D'autre part f admet un min global.

– $I_c = \begin{cases} \varnothing & \text{si } c < -4 \text{ (val. min. ou } f(x,y) = (x^2-2)^2 + 2x^2y^2 + y^4 - 4) \\ \{(-\sqrt{2},0),(\sqrt{2},0)\} & \text{si } c = -4 \text{ (car } \inf f = -4) \\ E_c^1 \cup E_c^2 & \text{si } -4 < c < 0 \text{ (car } f(x,y) < 0 \text{ et } f \text{ paire et symétrique/0y)} \\ C((-1,0),1) \cup C((1,0),1) & \text{si } c = 0 \text{ (tangente verticale en } (0,0)) \\ E'_c & \text{si } 0 < c \text{ (car } f(x,y) > 0 \text{ et symétries de } f) \end{cases}$

  Pour $-4 \leqslant c \leqslant 0$, les points « extrémaux » sur Ox sont donnés par $x = \pm\sqrt{2 \pm \sqrt{4+c}}$. Pour $0 \leqslant c$, les points extrémaux sur Oy sont donnés par $y = \pm\sqrt[4]{c}$ et sur Ox, $x = \pm\sqrt{2+\sqrt{4+c}}$.
– On peut démontrer que les hypersurfaces de niveau de f au dessus d'une même composante connexe sont difféomorphes entre elles.
– Plus généralement, on peut démontrer que l'ensemble des valeurs critiques d'une fonction polynomiale est fini. En enlevant quelques points suplémentaires au but (*i.e.* dans $\mathbb{R}$), la propriété précédente subsiste.

2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

2.1 Rappels et compléments

Proposition 2.1.1 Soient $n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{N}, d \leqslant n$ et $k \geqslant 1$. C.S.S.E.

1. Pour tout $a \in M$, il existe un C^k-difféomorphisme $\varphi : U, a \to \mathbb{R}^n, 0$ défini sur un voisinage U de a tel que $\varphi(U \cap M) = \mathbb{R}^d \times \{\underline{0}\} = \{\xi_{d+1} = \cdots = \xi_n = 0\}$ (*carte locale adaptée à M en a*).
2. Pour tout $a \in M$, il existe une application $G : \mathbb{R}^n, a \to \mathbb{R}^{n-d}, 0$ de classe C^k et de rang maximal $(n-d)$ et un voisinage U de a dans $\mathbb{R}^n$ tels que $U \cap M = G^{-1}(0)$ (*M est définie par la submersion G en a*).
3. Pour tout $a \in M$, il existe une application $f : V, \underline{a}_d \to W, \overline{a}^{n-d}$ de classe C^k d'un voisinage V de $\underline{a}_d$ dans W telle que $(V \times W) \cap M = Graph(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in V\}$ (*M est localement le graphe d'une application*).
4. Pour tout $a \in M$, il existe une application $j : V, 0 \to \mathbb{R}^n, a$ de classe C^k d'un voisinage V de $0 \in \mathbb{R}^d$, de rang d et U un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$ tels que $M \cap U = j(V)$ (*i.e. homéomorphisme sur l'image, paramétrisation locale de M à l'aide d'un plongement*).

Remarque 2.1.1 L'application du graphe est un plongement !

Définition 2.1.1 Un sous-ensemble M de $\mathbb{R}^n$ vérifiant l'une des conditions précédentes est une *sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et de classe C^k*.

Exemple 2.1.1

1. $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ est une 2-sous-variété *fermée* de $\mathbb{R}^3$, $N \in S^2$.
   (a) $\begin{array}{rccc} \varphi : & C = \{x^2+y^2 < 1\}, N & \to & \mathbb{R}^3, 0 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x, y, z - \sqrt{1-(x^2+y^2)}) \end{array}$,
   $\varphi(C_+ \cap S^2) = D(0,1) \times \{0\}$.
   (b) $\begin{array}{rccc} G : & \mathbb{R}^3 - \{0\}, N & \to & \mathbb{R}^{3-2=1}, 0 \\ & (x,y,z) & \mapsto & x^2+y^2+z^2-1 \end{array}$, $S^2 = G^{-1}(0)$.
   (c) $\begin{array}{rccc} f : & D(0,1), 0 & \to & \mathbb{R}, 1 \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{1-(x^2+y^2)} \end{array}$, $Graph(f) = S^2 \cap C_+$.
   (d) $\begin{array}{rccc} j : & D(0,1), 0 & \to & \mathbb{R}^3, N \\ & (x,y) & \mapsto & (x, y, f(x,y)) \end{array}$, $j(D(0,1)) = S^2 \cap C_+$.

2. un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$; un sous-espace affine de dimension d est une sous-variété de dimension d.
3. Un ouvert d'une sous-variété est une sous-variété (de même dimension) ; un produit (fini !) de sous-variétés est une sous-variété.

Définition 2.1.2 Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{k\geqslant 1}$ et $u \in \mathbb{R}^n$. Alors u est un *vecteur tangent* à M en $a \in M$ si il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et $\gamma : I \overset{C^k}{\to} M$ tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = u$. L'ensemble des vecteurs tangents à M en a est l'*espace tangent* T_aM en $a \in M$.

Proposition 2.1.2

1. T_aM est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $d := \dim M$.
2. $(d\varphi^{-1}(0))(\mathbb{R}^d \times \{\underline{0}\}) = T_aM$.
3. Si G est une submersion définissant M en a alors $T_aM = \ker dG(a)$.
4. $y - f(\underline{a}_d) = f'(\underline{a}_d).(x - \underline{a}_d)$ est une équation cartésienne de l'espace tangent affine en a de direction T_aM.
5. Si j est une immersion définissant M en a alors $(dj(0).e_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$ est une base de T_aM.
6. Si $(a, b) \in M \times N$ alors $T_{(a,b)}M \times N = T_aM \times T_bN$.

Remarque 2.1.2 Expliquons par exemple le point 5. On a $dj(0).e_i = \dfrac{\partial j}{\partial x_i}(0) = (j \circ \gamma_i)'(0)$ avec $\gamma_i(t) = te_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant d$. Mais alors $j \circ \gamma_i$ est un arc C^k tracé sur M donc $dj(0).e_i \in T_aM$. Comme $\dim M = d$ et que j est une immersion, la famille $(dj(0).e_i)_i$ est libre et génératrice de T_aM.

2.2 Fibré tangent et application linéaire tangente

Définition 2.2.1 Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$TM := \bigcup_{x\in M} \{x\} \times T_xM$$

est le *fibré tangent* à M. On a une application *canonique* $\pi : TM \to M$ définie par $\pi(x, u) = x$.

Proposition 2.2.1 Soit M une $d-$sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^{k\geqslant 2}$. Alors TM est une sous-variété de classe C^{k-1} de $\mathbb{R}^{2n}$ de dimension $2d$.

Dém. : soit $(a, u) \in TM$. Alors il existe une submersion G de classe C^k définissant M au voisinage de a. Donc $\tilde{G} : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^{n-d}$ définie par $\tilde{G}(x, v) = (G(x), dG(x).v)$ est une submersion de classe C^{k-1} en (a, u) et $TM \cap (U \times \mathbb{R}^n) = \tilde{G}^{-1}(0)$. En effet,

$$\begin{array}{rccc} d\tilde{G}(a,u) : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^{n-d} \\ & (\eta, \xi) & \mapsto & (dG(a).\eta, d^2G(a).(\eta, u) + dG(a).\xi) \end{array}$$

est bien surjective.

Exemple 2.2.1 Le fibré tangent à un sous-espace affine $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^n$ est $T\mathcal{A} = \mathcal{A} \times \vec{\mathcal{A}}$.

Définition 2.2.2 Soient $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $N \subseteq \mathbb{R}^m$ deux sous-variétés et $f : M \to N$ une application. L'application f est *de classe* C^k si pour tout $a \in M$, il existe des cartes locales adaptées (U, φ, a) à M et $(V, \psi, f(a))$ à N telles que l'application

$$\psi_{|N} \circ f \circ (\varphi_{|M})^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$$

est de classe C^k. De plus, $df(a) : T_aM \to T_{f(a)}N$ est définie par $df(a).u = (f \circ \gamma_{a,u})'(0)$ avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = u$.

Remarque 2.2.1

1. Si (U_1, φ_1, a) et (U_2, φ_2, a) sont 2 cartes adaptées à M en a alors
$$\varphi_{2|M} \circ (\varphi_{1|M})^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1{}^{-1})_{|\mathbb{R}^d}$$
2. En particulier, on peut parler d'application différentiable entre TM et une sous-variété de $\mathbb{R}^m$.

Théorème 2.2.1 L'application $f : M \to N$ est C^k ssi il existe un voisinage ouvert U de M et $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^k telle que $\tilde{f}_{|M} = f$.

Remarque 2.2.2 En particulier, df ne dépend que de f et $df(a) = d\tilde{f}(a)_{|T_aM}$.

Proposition 2.2.2 Soient $f : M \to N$ une subimmersion de rang r, $a \in M$ et $b = f(a)$.

1. $f^{-1}(b)$ est une sous-variété qui est une partie fermée de M, $T_af^{-1}(b) = \ker df(a)$ et la suite suivante est exacte :
$$0 \to T_af^{-1}(b) \to T_aM \overset{df(a)}{\to} T_bN$$
2. il existe un voisinage ouvert U de a dans M tel que $f(U)$ soit une sous-variété de N et
$$\dim M = \dim f(U) + \dim f^{-1}(b)$$
3. de plus, pour tout sev V supplémentaire de $T_af^{-1}(b)$ dans T_aM, il existe $M' \subseteq M$ contenant a tel que $T_aM' = V$ et $f_{|M'}$ soit un difféomorphisme sur son image.

Théorème 2.2.2 (d'inversion locale) Soient $f : M \overset{C^{k\geqslant 1}}{\to} N$ et $x_0 \in M$. Supposons $df(x_0) \in Isom(T_{x_0}M, T_{f(x_0)}N)$. Alors il existe $U \in \mathcal{V}_M(x_0)$ et $V \in \mathcal{V}_N(f(x_0))$ ouverts tels que
$$f_{|U} : U \to V$$
soit un C^k difféomorphisme.

Remarque 2.2.3 Ses corollaires, de même que le théorème des fonctions implicites peuvent s'énoncer dans ce cadre.

Définition 2.2.3 Une *section* de classe C^l de $\pi : TM \to M$ est une application $s : M \overset{C^l}{\to} TM$ telle que $\pi \circ s = id_M$.

Définition 2.2.4 Soit $f : M \to N$ une application C^k. L'*application linéaire tangente* f_* : $TM \to TN$ est définie par $f_*(a, u) = (f(a), df(a).u)$. On confond quelquefois f_* et df.

Proposition 2.2.3 L'application $\pi : TM \to M$ est une submersion surjective et $\pi^{-1}(a) = \{a\} \times T_aM$ (le fibré est *vectoriel de rang* d). Plus précisément, pour tout $a \in M$, il existe $V \in \mathcal{V}_M(a)$ tel que :

$$\begin{array}{cccc} & \pi^{-1}(V) & \overset{\approx}{\to} & V \times \mathbb{R}^d \\ \pi & \downarrow & \circlearrowleft & \swarrow \pi_1 \\ & V & & \end{array}$$

Dém. : soit $(a, u) \in TM$ (*i.e.* $a \in M$ et $u \in T_aM$) et $v \in T_{\pi(a,u)}M = T_aM$. Alors il existe α : $I \overset{C^k}{\to} M$ tel que $\alpha(0) = a$, $\alpha'(0) = v$ et $\beta : I \overset{C^{k-1}}{\to} \mathbb{R}^n$ tel que $\beta(t) = pr_{\alpha(t)}(u)$ où $pr_x : \mathbb{R}^n \to T_xM$ désigne la projection orthogonale sur T_xM. Alors $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ est un chemin tracé sur TM passant par (a, u) en $t = 0$. De plus, $d\pi(a, u) = \pi_{1|T_{(a,u)}TM}$ donc $d\pi(a, u).\gamma'(0) = \alpha'(0) = v$ et $d\pi(a, u)$ est surjective.

Soit U un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U, a \to \mathbb{R}^n, 0$ une carte locale adaptée. Alors $d\varphi(a)_{|T_aM} \in Isom(T_aM, \mathbb{R}^d)$. Comme $V := U \cap M$ est un voisinage ouvert de a dans M, $\pi^{-1}(V) = TV = (V \times \mathbb{R}^n) \cap TM$ est un ouvert de TM. Considérons $\psi : TV \to V \times \mathbb{R}^d$ défini par $\psi(x, v) = (x, d\varphi(x).v)$. Alors ψ est un difféomorphisme.

Exercice 2.2.1 Démontrer que π est une submersion en utilisant la seconde partie de la preuve.

Définition 2.2.5 L'*espace cotangent* en $a \in M$ est l'ensemble des *covecteurs tangents* en a, T_a^*M. De même, le *fibré cotangent* est

$$T^*M := \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x^*M.$$

Remarque 2.2.4 Le fibré cotangent admet aussi une structure de fibré vectoriel de rang d.

2.3 Champs de vecteurs

2.3.1 Rappels sur les équations différentielles

Définition 2.3.1 Un *champ de vecteurs* sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application continue $X : U \to \mathbb{R}^n$. Une *courbe intégrale* de X est une application γ (nécessairement C^1) définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in I : \gamma(t) \in U$ et $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$.

Une courbe intégrale $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ est *maximale* si pour toute courbe intégrale $\delta : J \to \mathbb{R}^n$ de X, tel qu'il existe $t \in I \cap J$ vérifiant $\gamma(t) = \delta(t)$ alors $J \subseteq I$ et $\delta = \gamma_{|J}$.

Remarque 2.3.1

1. On va voir que si X est localement lipschitzien et $I \cap J \neq \varnothing$ alors $\delta_{|I\cap J} = \gamma_{|I\cap J}$.
2. Dans la terminologie des équations différentielles, un tel champ de vecteurs définit une équation différentielle *autonome*.

Théorème 2.3.1 (solution locale – Cauchy-Péano) Si X est continu alors pour tout $a \in U$, il existe I_a ouvert contenant 0 et $\gamma : I_a \to U$ solution de $x' = X(x)$ telle que $\gamma(0) = a$.

2.3.2 Champs de vecteurs sur une sous-variété

Définition 2.3.2 Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Un *champ de vecteurs* sur M est une application continue $X : M \to TM$ telle que pour tout $x \in M$, $X(x) \in T_xM$ (*i.e.* X est une section de π). On note $\Gamma(M)$ le $C(M)-$module des champs de vecteurs sur M. Une *courbe intégrale* est une application de classe C^1 définie sur un intervalle I telle que $\forall t \in I : \gamma(t) \in M$ et $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$.

Remarque 2.3.2 En général, on exigera d'avantage de régularité (C^k) sur les champs de (co)-vecteurs.

Théorème 2.3.2 (d'unicité) Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, X un champ de vecteurs de classe C^1, $\gamma_1 : I_1 \to M$ et $\gamma_2 : I_2 \to M$ deux courbes intégrales. Si il existe $t_0 \in J = I_1 \cap I_2$ tel que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ alors $\gamma_{1|J} = \gamma_{2|J}$.
Dém. : $C = \{t \in J : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$ est un fermé de J. Pour tout $t \in J$ on a $\gamma_1'(t) - \gamma_2'(t) = X(\gamma_1(t)) - X(\gamma_2(t))$. En particulier, pour $t \in J$ suffisamment voisin de t_0,

$$||\gamma_1'(t) - \gamma_2'(t)|| \leqslant K||\gamma_1(t) - \gamma_2(t)||$$

car X est C^1 et γ_1, γ_2 sont continus. D'où

$$||\int_{t_0}^{t'} (\gamma_1'(s) - \gamma_2'(s))ds|| = ||\gamma_1(t') - \gamma_2(t')|| \leqslant K|\int_{t_0}^{t'} ||\gamma_1(s) - \gamma_2(s)||ds|.$$

Soit A la borne supérieure de $||\gamma_1 - \gamma_2||$ sur $[t_0, t]$. Alors :

$$A \leqslant K|t - t_0|A.$$

Or si t est suffisamment proche de t_0 on obtient $A \leqslant 0$ et C est ouvert dans J.

Remarque 2.3.3 On a seulement utilisé le fait que X est localement lipschitzien.

Proposition 2.3.1 Soit $X \in \Gamma(M)$ de classe C^1. La relation

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma : I \to M,\ \gamma' = X(\gamma) \text{ et } x, y \in \gamma(I)$$

est une relation d'équivalence sur M.

Dém. : la réflexivité et la symétrie sont immédiates. Soient $x, y, z \in M$ tels que $x, y \in \gamma(I)$ et $y, z \in \delta(J)$. Soient donc $s_0 \in I$ et $t_0 \in J$ tels que $y = \gamma(s_0) = \delta(t_0)$. Posons $\tilde{J} = J - t_0 + s_0$ et $\tilde{\delta} : \tilde{J} \to M$ défini par $\tilde{\delta}(t) = \delta(t + t_0 - s_0)$. Alors, $s_0 \in \tilde{J}$ et $\tilde{\delta}$ est une courbe intégrale de X passant par $\gamma(s_0)$ en s_0. Par unicité, on peut prolonger γ à l'aide de $\tilde{\delta}$ en une courbe intégrale $\tilde{\gamma}$ définie sur $I \cup \tilde{J}$. Et $x, y, z \in \tilde{\gamma}(I \cup \tilde{J})$.

Remarque 2.3.4 Ainsi, les courbes intégrales de X définissent une partition de M.

Corollaire 2.3.1 (Cauchy-Lipschitz) Soit $X \in \Gamma(M)$, de classe C^1. Pour tout $x \in M$, il existe une et une seule courbe intégrale maximale $\gamma_x : I_x \to M$ passant par x en $t = 0$.

Définition 2.3.3 L'*orbite* de x suivant X est $\gamma_x(I_x)$.

Proposition 2.3.2 Soient $X \in \Gamma(M)$ de classe C^1 et $x \in M$.

1. L'intervalle I_x est un voisinage ouvert de 0 : $I_x =]a, b[$, $a < 0 < b$ (c'est l'*intervalle d'existence* de x).
2. Pour tout compact $K \subseteq M$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\gamma_x(]b-\epsilon, b[) \cap K = \varnothing$ et $\gamma_x(]a, a+\epsilon[) \cap K = \varnothing$.

Remarque 2.3.5

1. On dit que « les trajectoires de X sortent de tout compact ».
2. Une reformulation, en temps positif, de la propriété précédente est : si $\gamma_x(I_x \cap \mathbb{R}_+)$ est relativement compacte alors $\mathbb{R}_+ \subset I_x$.

Définition 2.3.4 Soit X un champ de vecteurs C^1 sur M. Posons $\Delta = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times I_x$. Le *flôt intégral* de X est l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Delta & \to & M \\ & (x, t) & \mapsto & \gamma_x(t) \end{array}$$

où γ_x désigne la courbe intégrale maximale passant par x en $t = 0$.

Proposition 2.3.3 Soit $X \in \Gamma(M)$ de classe $C^{k \geqslant 1}$.

1. Le sous-ensemble Δ de $M \times \mathbb{R}$ est un voisinage ouvert de $M \times \{0\}$.
2. L'application φ est de classe C^k et $\forall x \in M : \varphi(x, 0) = x$.
3. Soient $(x, t) \in \Delta$ et $t' \in \mathbb{R}$. Alors $(\varphi(x, t), t') \in \Delta \Leftrightarrow (x, t + t') \in \Delta$ et on a : $\varphi(\varphi(x, t), t') = \varphi(x, t + t')$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Notons $U_t = \{x \in M : (x, t) \in \Delta\}$. Alors $U_t = (M \times \{t\}) \cap \Delta$. Donc U_t est ouvert dans M. On a notamment $U_0 = M$ et $\varphi_{t=0} = id_M$.

On a

$$(x, t) \in \Delta \Leftrightarrow t \in I_x \Leftrightarrow x \in U_t.$$

Enfin, soit $(x, t) \in \Delta$. Alors $(\varphi(x, t), -t) \in \Delta$, autrement dit $\varphi(x, t) \in U_{-t}$; de même, $\varphi(x, -t) \in U_t$. Comme $\varphi(\varphi(x, t), -t) = x$ et $\varphi(\varphi(x, -t), t) = x$ on en déduit que $\varphi_t : U_t \to U_{-t}$ est un difféomorphisme C^k de difféomorphisme réciproque φ_{-t}.

Définition 2.3.5 Un champ de vecteurs sur M est *complet* si $\Delta = M \times \mathbb{R}$.

Exemple 2.3.1 En particulier, tout champ de vecteur C^1 sur une sous-variété compacte est complet. Plus généralement :

Proposition 2.3.4 Un champ X à support compact est complet.

Dém. : distinguons 2 cas :
- soit $x \in supp(X)$. Alors $\gamma_x(I_x) \subset supp(X)$. Sinon, il existerait $y \notin supp(X)$ et $t \in I_x$ tels que $\gamma_x(t) = y$. Or, $X(y) = 0$ et par unicité, $\gamma_y : \mathbb{R} \to M$ et $\gamma_y \equiv y$. Donc $I_x = \mathbb{R}$.
- soit $x \notin supp(X)$. Alors $\gamma_x \equiv x$ et $I_x = \mathbb{R}$.

Proposition 2.3.5 (Principe de majoration à priori) Soient $x \in M$ et J un intervalle contenant 0. Soit K un compact de M. Supposons que pour tout intervalle compact $J' \subset J$ contenant 0 et toute courbe intégrale $\gamma : J' \to M$ telle que $\gamma(0) = x$, on ait $\gamma(J') \subset K$. Alors la solution maximale γ_x est (au moins) définie sur J.

Dém. : posons $I_x =]a, b[$ et raisonnons en temps positif (*i.e.* $J \subseteq \mathbb{R}_+$). Si $J \not\subset]a, b[$ alors $b < +\infty$ et $[0, b] \subset J$. Soit $b' < b$. Alors $\gamma_x([0, b']) \subset K$. En particulier, $\gamma_x([0, b[) \subset K$. Ce qui est absurde compte-tenu d'une propriété de γ_x. On conclut que $J \subseteq]a, b[$.

2.3.3 Intégrale première

Définition 2.3.6 Une fonction $f : M \overset{C^1}{\to} \mathbb{R}$ est une *intégrale première* de $X \in \Gamma(M)$ si

$$f_*(X) = 0.$$

Proposition 2.3.6 Soient γ une trajectoire de X et f une intégrale première alors $\operatorname{Im}\gamma \subseteq f^{-1}(f(\gamma(0)))$. De plus, si a n'est pas un point critique de f alors $X(a)$ est tangent en a à $f^{-1}(f(a))$.

Corollaire 2.3.2 Si les niveaux de f sont compacts alors X est complet.

Théorème 2.3.3 (Redressement du flôt) Soient $X \in \Gamma(M)$ de classe C^k et $a \in M$ tel que $X(a) \neq 0$. Alors il existe un difféomorphisme local $\Psi : \mathbb{R}^n, a \overset{C^k}{\to} \mathbb{R}^n, 0$ tel que localement en a, $\Psi_*(X)(y) = d\Psi(\Psi^{-1}(y))(X(\Psi^{-1}(y))) = (1, 0, \ldots, 0)$.

Remarque 2.3.6
1. Les coordonnées locales $(\Psi_{i|M})_{2 \leqslant i \leqslant d}$ sont des intégrales premières « locales » de X.
2. Une trajectoire « locale » de $\Psi_*(X)$ est donnée par $x_1 = t + c_1, x_2 = c_2, \ldots = x_n = c_n$.

3 Formes différentielles

3.1 Algèbre extérieure

Soit E un $\mathbb{R}-$e.v. de dimension n. Notons $L_k(E)$ l'e.v. des $k-$formes linéaires sur E^k. Alors $\dim L_k(E) = (\dim E)^k$.

3.1.1 Formes alternées

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. Alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \bar{\sigma} : & E^k & \to & E^k \\ & (v^1, \ldots, v^k) & \mapsto & (v^{\sigma(1)}, \ldots, v^{\sigma(k)}) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Définition 3.1.1 Une $k-$forme f est *symétrique* si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k : f \circ \bar{\sigma} = f$.

Proposition 3.1.1 Soit $f \in L_k(E)$. Alors

$$s(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} f \circ \bar{\sigma}$$

est symétrique. De plus, si f est symétrique alors $s(f) = f$.

Définition 3.1.2 Une $k-$forme f est *antisymétrique* (ou *alternée*) si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k : f \circ \bar{\sigma} = \epsilon(\sigma) f$.

Proposition 3.1.2 Soit $f \in L_k(E)$. Alors

$$a(f) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \epsilon(\sigma) f \circ \bar{\sigma}$$

est antisymétrique. De plus, si f est antisymétrique alors $a(f) = f$.

Proposition 3.1.3

1. f $k-$linéaire antisymétrique ssi $f(v^1, \ldots, v^k) = 0$ dés que 2 des v^i coïncident.
2. Si f est antisymétrique et $(v^1, \ldots, v^k)$ est liée alors $f(v^1, \ldots, v^k) = 0$.

Exemple 3.1.1 Le déterminant (sur $\mathbb{R}^n$ relativement à $\mathcal{C}_n$) est l'unique forme $n-$linéaire alternée prenant la valeur 1 sur $\mathcal{C}_n$. De plus, si f est une $n-$forme linéaire alternée sur $\mathbb{R}^n$ alors $f = f(e_1, \ldots, e_n) \det_{\mathcal{C}_n}$.

Notons $\wedge^k(E^*)$ l'e.v. des $k-$formes linéaires alternées *i.e.* la $k-$ième *puissance extérieure* de E^* (l'entier k est le *degré*). Alors $a : L_k(E) \to \wedge^k(E^*)$ est un homomorphisme et $a_{|\bigwedge^k(E^*)} \equiv id_{\bigwedge^k(E^*)}$.

Proposition 3.1.4 On a $\dim \wedge^n(E^*) = 1$.

Proposition 3.1.5 Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $f \in \wedge^k(E^*)$. Alors

$$f(v^1, \ldots, v^k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \begin{vmatrix} v^1_{i_1} & \cdots & v^1_{i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ v^k_{i_1} & \cdots & v^k_{i_k} \end{vmatrix} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}).$$

Dém. :

$$\begin{aligned} f(v^1, \ldots, v^k) &= \sum_{j_1} v^1_{j_1} f(e_{j_1}, v^2, \ldots, v^k) \\ &= \sum_{j_1, j_2} v^1_{j_1} v^2_{j_2} f(e_{j_1}, e_{j_2}, v^3, \ldots, v^k) \\ &= \sum_{1 \leqslant j_1 \neq j_2 \neq \cdots \neq j_k \leqslant n} v^1_{j_1} \cdots v^k_{j_k} f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}). \end{aligned}$$

Posons $\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}(\{i_1, \ldots, i_k\})$ pour $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$. Alors

$$f(v^1, \ldots, v^k) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\{i_1, \ldots, i_k\})} v^1_{\sigma(i_1)} \cdots v^k_{\sigma(i_k)} \epsilon(\sigma) f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

Corollaire 3.1.1

1. $$\dim \wedge^k(E^*) = C_n^k.$$
   (et $\wedge^k(E^*) = 0$ pour $k > n$.)
2. Une base de $\wedge^k(E^*)$ est donnée par la famille $(e^*_{i_1\dots i_k})_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \in \wedge^k(E^*)$ telle que
   $$e^*_{i_1\cdots i_k}(e_{j_1},\dots,e_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1}\cdots\delta_{i_k j_k}$$
   pour $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n$.

Définition 3.1.3 Une forme alternée de degré n, non nulle, est une *forme volume* sur E.

3.1.2 Produit extérieur

Définition 3.1.4 Soient $f \in L_k(E)$ et $g \in L_l(E)$. Alors le *produit tensoriel* de f par g est la $(k+l)-$forme linéaire $f \otimes g : E^{k+l} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f \otimes g(v^1,\dots,v^k,v^{k+1},\dots,v^{k+l}) = f(v^1,\dots,v^k).g(v^{k+1},\dots,v^{k+l}).$$

Remarque 3.1.1 Le produit tensoriel est multilinéaire et associatif (mais non commutatif).

Proposition 3.1.6 Soient $f \in L_k(E)$ et $g \in L_l(E)$. Alors :

$$a(f \otimes a(g)) = a(a(f) \otimes g) = a(f \otimes g)$$

et

$$a(g \otimes f) = (-1)^{kl} a(f \otimes g).$$

Dém. : soient $f \in L_k(E)$ et $g \in L_l(E)$.

$$\begin{aligned}
a(a(f)\otimes g) &= a\Big(\big(\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\epsilon(\sigma) f\circ\bar{\sigma}\big)\otimes g\Big)\\
&= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_{k+l}}\epsilon(\sigma')\frac{1}{k!}\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\epsilon(\sigma) f\circ\overline{\sigma'\circ\sigma}\Big)\otimes g\circ\bar{\sigma}'.
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
f\circ\bar{\sigma}\circ\bar{\sigma}'(x_1,\dots,x_n) &= f\circ\bar{\sigma}(x_{\sigma'(1)},\dots,x_{\sigma'(n)})\\
&= f\circ\bar{\sigma}(x'_1,\dots,x'_n) \text{ avec } x'_i = x_{\sigma'(i)}\\
&= f(x'_{\sigma(1)},\dots,x'_{\sigma(n)})\\
&= f(x_{\sigma'\circ\sigma(1)},\dots,x_{\sigma'\circ\sigma(n)})\\
&= f\circ\overline{\sigma'\circ\sigma}(x_1,\dots,x_n).
\end{aligned}$$

En identifiant, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ à la permutation de $\mathfrak{S}_{k+l}$ laissant fixe les l éléments $k+1,\dots,k+l$, on obtient :

$$a(a(f)\otimes g) = \frac{1}{(k+l)!}\frac{1}{k!}\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_{k+l}}\sum_{\sigma\in\tilde{\mathfrak{S}}_k}\epsilon(\sigma')\epsilon(\sigma) f\circ\overline{\sigma'\circ\sigma}\otimes g\circ\overline{\sigma'\circ\sigma}$$

Soit $\sigma'' \in \mathfrak{S}_{k+l}$, alors $card(\{(\sigma,\sigma') \in \tilde{\mathfrak{S}}_k \times \mathfrak{S}_{k+l} : \sigma' \circ \sigma = \sigma''\}) = k!$. D'où :

$$a(a(f) \otimes g) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma'' \in \mathfrak{S}_{k+l}} \epsilon(\sigma'') f \circ \bar{\sigma''} \otimes g \circ \bar{\sigma''} = a(f \otimes g)$$

D'autre part, soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+l \\ l+1 & \dots & l+k & 1 & \dots & l \end{pmatrix}$. Alors $\epsilon(\tau) = (-1)^{kl}$ (car τ se décompose facilement en un produit de kl transpositions).

Donc

$$\begin{aligned} a(f \otimes g)(v^1,\dots,v^{k+l}) &= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \epsilon(\sigma \circ \tau)(f \circ \overline{\sigma \circ \tau} \otimes g \circ \overline{\sigma \circ \tau})(v^1,\dots,v^{k+l}) \\ &= \frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \epsilon(\sigma) f(v^{\sigma\circ\tau(1)},\dots,v^{\sigma\circ\tau(k)}). \\ &\qquad\qquad g(v^{\sigma\circ\tau(k+1)},\dots,v^{\sigma\circ\tau(k+l)}) \\ &= \frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \epsilon(\sigma) f(v^{\sigma(l+1)},\dots,v^{\sigma(l+k)}).g(v^{\sigma(1)},\dots,v^{\sigma(l)}) \\ &= (-1)^{kl} a(g \otimes f)(v^1,\dots,v^{k+l}). \end{aligned}$$

Définition 3.1.5 Soient $\alpha \in \wedge^k(E^*)$ et $\beta \in \wedge^l(E^*)$. Le *produit extérieur* de α par β est la $(k+l)-$forme linéaire alternée

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+l)!}{k!l!} a(\alpha \otimes \beta).$$

Exemple 3.1.2 Soient $f, g \in E^*$. Alors

$$f \wedge g(v^1,v^2) = f(v^1)g(v^2) - f(v^2)g(v^1) = \begin{vmatrix} f(v^1) & f(v^2) \\ g(v^1) & g(v^2) \end{vmatrix}.$$

Proposition 3.1.7

1. L'application
$$\wedge : \wedge^k(E^*) \times \wedge^l(E^*) \to \wedge^{k+l}(E^*)$$
est une application bilinéaire.
2. $\beta \wedge \alpha = (-1)^{kl} \alpha \wedge \beta$.
3. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ *i.e.* $\wedge$ est associatif.

Exemple 3.1.3 Notons $(dx_1,\dots,dx_n)$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$.
2. $dx_j \wedge dx_i \wedge dx_k = -dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$.
3. $(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n}$ est une base de $\wedge^k(\mathbb{R}^{n*})$.

Corollaire 3.1.2 Si α est de degré impair alors $\alpha \wedge \alpha = 0$.

Proposition 3.1.8 Soient $f_1, \ldots, f_k \in E^*$. On a :

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_k = k!a(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k).$$

Dém. : en effet, supposons l'égalité vraie pour un produit de k formes linéaires. Alors :

$$\begin{aligned} f_1 \wedge \cdots \wedge f_k \wedge f_{k+1} &= \frac{(k+1)!}{k!} a(f_1 \wedge \cdots \wedge f_k \otimes f_{k+1}) \\ &= (k+1)a(k!a(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k) \otimes f_{k+1}) \\ &= (k+1)!a(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k \otimes f_{k+1}) \end{aligned}$$

Proposition 3.1.9 Soient $f_1, \ldots, f_k \in E^*$.

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_k(v^1, \ldots, v^k) = \begin{vmatrix} f_1(v^1) & \cdots & f_1(v^k) \\ \vdots & & \vdots \\ f_k(v^1) & \cdots & f_k(v^k) \end{vmatrix}$$

Dém. :

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_k(v^1, \ldots, v^k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \epsilon(\sigma) f_1(v^{\sigma(1)}). \cdots .f_k(v^{\sigma(k)}) \text{ par définition de } a$$

Posons $a_{ij} = f_i(v^j)$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Alors

$$f_1 \wedge \cdots \wedge f_k(v^1, \ldots, v^k) = \det((a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}).$$

Définition 3.1.6 Soit E un e.v. de dimension n. L'*algèbre de Grassman (ou algèbre extérieure)* est l'algèbre *graduée*

$$\wedge(E^*) = \wedge^0(E^*) \oplus \wedge^1(E^*) \oplus \cdots \oplus \wedge^n(E^*)$$

où $\wedge^0(E^*) = \mathbb{R}$ et $\wedge^1(E^*) = E^*$.

Exemple 3.1.4

1. $\dim \wedge(\mathbb{R}^{n*}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.
2. $\lambda \wedge \alpha = \lambda\alpha$.
3. $dx_1 \wedge (dx_2 + dx_1 \wedge dx_3) = dx_1 \wedge dx_2$.
4. Soient $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$ et $\beta = \beta_1 dx_1 + \beta_2 dx_2$. Alors

   $$\alpha \wedge \beta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} dx_1 \wedge dx_2.$$

   Calculer l'aire du parallélogramme $(0, (\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2))$.
5. Soient $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3$ et $\beta = \beta_1 dx_1 + \beta_2 dx_2 + \beta_3 dx_3$. Alors

   $$\alpha \wedge \beta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} dx_1 \wedge dx_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} dx_1 \wedge dx_3 + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} dx_2 \wedge dx_3.$$

3.1.3 Produit intérieur

Définition 3.1.7 Soient $\alpha \in \wedge^{k+1}(E^*)$ et $X \in E$. Le *produit intérieur* de α par X est la $k-$forme (linéaire alternée) $i_X\alpha$ définie par $i_X\alpha(v^1, \dots, v^k) = \alpha(X, v^1, \dots, v^k)$. On note aussi $X \lrcorner := i(X) := i_X$.

Proposition 3.1.10

1. $i_Y i_X = -i_X i_Y$.
2. $i_X^2 = 0$.
3. $i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^{deg(\alpha)}\alpha \wedge (i_X\beta)$.

Exemple 3.1.5

1. Soient $\alpha \in \wedge^1(E^*)$ et $X \in E$. Alors $i(X)\alpha = \alpha(X)$.
2. Soient $\alpha = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ et $X = (x_1, \dots, x_n)$. Alors

$$\begin{aligned} i(X)\alpha &= dx_1(X)dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n - dx_1 \wedge i(X)(dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &= x_1dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &\qquad\qquad -dx_1 \wedge (x_2dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n - dx_2 \wedge i(X)dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

3.1.4 Image réciproque d'une $k-$forme

Définition 3.1.8 Soient $\varphi \in L(E, F)$ et $\alpha \in \wedge^k(F^*)$. L'*image réciproque* de α par φ est la $k-$forme $\varphi^*(\alpha)$ de $\wedge^k(E^*)$ définie par

$$\varphi^*(\alpha)(v^1, \dots, v^k) = \alpha(\varphi(v^1), \dots, \varphi(v^k)).$$

Ainsi $\varphi^* \in L(\wedge(F^*), \wedge(E^*))$.

Proposition 3.1.11 Soient $\varphi \in L(E, F)$ et $\alpha, \beta \in \wedge(F^*)$. Alors

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta).$$

Dém. : par linéarité, on peut supposer que α (resp. β) est de degré k (resp. l).

$$\begin{aligned} \varphi^*(\alpha \wedge \beta) &= \frac{(k+l)!}{k!l!}\varphi^*(a(\alpha \otimes \beta)) \\ &= \frac{(k+l)!}{k!l!}a(\varphi^*(\alpha) \otimes \varphi^*(\beta)) \\ &= \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta). \end{aligned}$$

Exemple 3.1.6

1. Soient $\varphi \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $\alpha = dy_1 \in \wedge^1(\mathbb{R}^{n*})$. Alors
$$\varphi^*(\alpha) = dy_1 \circ \varphi = \varphi_1.$$
2. Soit $\beta = dy_1 \wedge dy_2$. Alors
$$\varphi^*(\beta) = dy_1 \circ \varphi \wedge dy_2 \circ \varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2.$$
3. Soit $\gamma = dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_k}$. Alors
$$\varphi^*(\gamma) = \varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k}.$$

3.2 Forme différentielle sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2.1 Une $k-$*forme différentielle* sur U est une application $C^{p\geqslant 0}$, $\alpha : U \to \wedge^k(\mathbb{R}^{n*})$. On note $\Omega^k(U)$ le $C^p(U)-$module des $k-$formes différentielles sur U.

Exemple 3.2.1

1. Si $k=0$ alors α est une fonction C^p de U dans $\mathbb{R}$.
2. Si $k=1$ alors $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx_i$ ou encore $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) dx_i \in \wedge^1(\mathbb{R}^{n*})$ pour $x \in U$.
3. Comme $(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})_{i_1 < \cdots < i_k}$ est une base de $\wedge^k(\mathbb{R}^{n*})$, une $k-$forme différentielle s'écrit de manière unique $\sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ avec $\alpha_{i_1 \cdots i_k} : U \overset{C^p}{\to} \mathbb{R}$. Ainsi, la régularité de α est celle de ses composantes le long d'une base.

Définition 3.2.2 Soient $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^l(U)$. Alors $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(U)$ est définie par :

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x).$$

Proposition 3.2.1 Si α et β sont C^p alors $\alpha \wedge \beta$ l'est aussi.

Définition 3.2.3 On note $\Omega^*(U) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$ la $C^p(U)-$algèbre graduée des formes différentielles sur U.

Définition 3.2.4 Soient $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \overset{C^{p\geqslant 1}}{\to} V \subseteq \mathbb{R}^m$ et $\alpha \in \Omega^k(V)$. Alors $\varphi^*(\alpha) \in \Omega^k(U)$ (qui est C^{p-1}) définie par

$$\varphi^*(\alpha)(x) = (d\varphi(x))^* \alpha(\varphi(x)) \text{ pour } x \in U$$

est l'*image réciproque* de α par φ.

Exemple 3.2.2 Soient U, V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \overset{C^p}{\to} V$ et $\alpha \in \Omega^n(V)$. Alors

$$\varphi^*(\alpha) = j\varphi.\alpha \circ \varphi.$$

En effet, soit $x \in U$. Alors $\varphi^*(\alpha)(x) = \alpha(\varphi(x))(d\varphi(x)(\cdot), \ldots, d\varphi(x)(\cdot))$. Comme $\wedge^n(\mathbb{R}^{n*})$ est de dimension 1, φ_x^* est une homothétie. En particulier, $\varphi_x^*(\det_{\mathcal{C}_n}) = \lambda. \det_{\mathcal{C}_n}$. Enfin,

$$\lambda = \det{}_{\mathcal{C}_n}(d\varphi(x).e_1, \ldots, d\varphi(x).e_n) = j\varphi(x).$$

Proposition 3.2.2 Soient $\varphi : U \overset{C^p}{\to} V$, $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$. Alors

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta).$$

Dém. : elle se déduit de la proposition correspondante dans $\wedge^k(\mathbb{R}^{n*})$ (point par point).

Exemple 3.2.3 Soit $\Psi :]0,\pi[\times]0,2\pi[\to S^2$ les coordonnées sphériques sur S^2. Désignons (encore) par $dx \wedge dy$ la restriction à S^2 de la 2−forme $dx \wedge dy$. Alors

$$\begin{aligned}
\Psi^*(dx \wedge dy) &= d(\cos\theta \sin\phi) \wedge d(\sin\theta \sin\phi) \\
&= (\cos\theta \cos\phi d\phi - \sin\theta \sin\phi d\theta) \wedge (\sin\theta \cos\phi d\phi + \cos\theta \sin\phi d\theta) \\
&= (\cos^2\theta \cos\phi \sin\phi + \sin^2\theta \sin\phi \cos\phi) d\phi \wedge d\theta \\
&= \frac{\sin 2\phi}{2} d\phi \wedge d\theta.
\end{aligned}$$

3.3 Différentielle extérieure (opérateur cobord)

Définition 3.3.1 Soit $\alpha \in \Omega^k(U)$. La *différentielle extérieure* de α est la $(k+1)-$forme sur U définie par :

$$d\alpha(x) = (k+1)a(D\alpha(x))$$

où D désigne la différentielle usuelle de la forme α. On prolonge d par linéarité sur $\Omega^*(U)$.

Exemple 3.3.1 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une $0-$forme. Alors $df = Df$. Ainsi, pour $x \in U$:

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$$

où dx_i désigne la (restriction de la) différentielle de $\begin{array}{rccc} \pi_i : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x_i \end{array}$; cette application est aussi *notée* x_i. Pour tout $x \in U$, $dx_i(x) = \pi_i = x_i$ *i.e.* $dx_i(x).h = h_i$; dx_i est donc constante. On note ainsi dx_i pour la différentielle de x_i mais aussi pour sa valeur en un point !

Proposition 3.3.1 Soit $\alpha \in \Omega^k(U)$. Alors

$$d\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} df_{i_1 \cdots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Dém. : par linéarité, il suffit de le démontrer pour une $k-$forme du type $f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge d_{i_k}$. Soit $x \in U$. On a $D\alpha(x) \in L(\mathbb{R}^n, \wedge^k(\mathbb{R}^{n*}))$. Or, $\wedge^k(\mathbb{R}^{n*}) \subseteq L_k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Donc, $d\alpha(x)$ s'identifie à un élément de $L_{k+1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ via l'isométrie $L(E_0, L_k(E_1 \times \cdots \times E_k, F)) \cong L_{k+1}(E_0 \times \cdots \times E_k; F)$. Plus précisément, on a, pour $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} D\alpha(x).h &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).h_i dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).dx_i(h).dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Ou encore :

$$D\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \otimes dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} d\alpha &= (k+1) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} a(dx_i \otimes dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (k+1) \frac{\partial f}{\partial x_i} a(dx_i \otimes k! a(dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_k})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}.(k+1)! a(dx_i \otimes dx_{i_1} \otimes \cdots \otimes dx_{i_k}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}. \end{aligned}$$

Remarque 3.3.1 Comme $a \circ a = a$, on peut considérer que l'homomorphisme a est un projecteur (sur $\wedge(\mathbb{R}^{n*})$).

Proposition 3.3.2 On considère les formes de classe C^∞. Alors :

$$d \circ d = 0.$$

Dém. : soit $\alpha \in \Omega^k(U)$. Par linéarité de d, on peut supposer $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Or

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
d(d\alpha) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

en vertu du théorème de Schwarz.

Remarque 3.3.2 Autrement dit, $\operatorname{Im} d_k \subseteq \ker d_{k+1}$.

Proposition 3.3.3 Soient $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\bullet(U)$. Alors

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

Proposition 3.3.4 Soient $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\varphi : U \overset{C^p}{\to} V$. Alors :

$$\varphi^*(d\alpha) = d\varphi^*(\alpha).$$

Dém. : posons $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\alpha) &= f \circ \varphi . \varphi^*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\
&= f \circ \varphi . d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
d\varphi^*(\alpha) &= d(f \circ \varphi . d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}) \\
&= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k} + f \circ \varphi . d(d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}) \\
&= \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\
&= \varphi^*(df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\
&= \varphi^*(d\alpha).
\end{aligned}$$

3.4 Lemme de Poincaré

Définition 3.4.1 Une forme différentielle α est

1. *fermée* si $d\alpha = 0$;
2. *exacte* si $\exists \beta : \alpha = d\beta$.

Exemple 3.4.1

1. Considérons
$$P = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} \text{ sur } \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$
D'une part,
$$\begin{aligned} dP &= x\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{x^2+y^2})dy \wedge dx + y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{x^2+y^2})dx \wedge dy \\ &= -x\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}dy \wedge dx - y\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dx \wedge dy \\ &= 0. \end{aligned}$$
D'autre part, $P = \dfrac{1}{2}\dfrac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ ou encore $P = d\ln ||(x,y)||_2$. Ainsi P est exacte (sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$).
2. Considérons
$$Q = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \text{ sur } \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$
Alors,
$$\begin{aligned} dQ &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})dx \wedge dy - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x^2+y^2})dy \wedge dx \\ &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dx \wedge dyx - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy \wedge dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 3.4.1 Une forme différentielle exacte est ferméee.

Proposition 3.4.1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
$$\text{La forme } \omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i \in \Omega^1(U) \text{ est fermée ssi } \forall i, j : \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}.$$

Lemme 3.4.1 (de Poincaré) Soit α une $(k+1)-$forme fermée sur un ouvert U étoilé. Alors α est exacte.

Dém. : quitte à translater U, on peut supposer U étoilé en 0. Notons X le champ de vecteurs sur U défini par $X(x) = x$. Considérons
$$\begin{array}{llll} \kappa : & \Omega^{k+1}(U) & \to & \Omega^k(U) \\ & \alpha & \mapsto & \int_0^1 t^k i_X(\alpha)(tx)dt \end{array}$$
Si $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{k+1} \leqslant n$, $f \in C^p(U)$ et $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}}$ on a :
$$\kappa(\alpha) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1}(\int_0^1 t^k f(tx) x_{i_j} dt) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}}.$$
L'application κ est $\mathbb{R}-$linéaire et $\kappa(\alpha)$ a même régularité que α. Pour $j \in \{1, \ldots, k+1\}$:
$$d\int_0^1 t^k f(tx) x_{i_j} dt = \sum_{i=1}^{n} (\int_0^1 t^{k+1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) x_{i_j} dt) dx_i + (\int_0^1 t^k f(tx) dt) dx_{i_j}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
d\kappa(\alpha) &= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\Big[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 t^{k+1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_{i_j}dt\right)dx_i + \big(\int_0^1 t^k f(tx)dt\big)dx_{i_j}\Big]\wedge \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_j}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}} \\
&= (k+1)\left(\int_0^1 t^k f(tx)dt\right)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}} \\
&\quad +\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_0^1 t^{k+1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_{i_j}dt\right)dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_j}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}}
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}}.$$

Or

$$i_X(dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}}) = x_i dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}}+\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j x_{i_j}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_j}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\kappa(d\alpha) &= \sum_{i=1}^{n}\kappa(\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{k+1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)i_X(dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}})dt \\
&= \sum_{i=1}^{n}\int_0^1 t^{k+1}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\Big(x_i dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}} \\
&\qquad\qquad\qquad +\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^j x_{i_j}dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_j}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}}\Big)dt.
\end{aligned}$$

Dés lors :

$$\begin{aligned}
d\kappa(\alpha)+\kappa(d\alpha) &= \int_0^1\left((k+1)t^k f(tx)+t^{k+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)x_i\right)dt\ dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}} \\
&= \Big[t^{k+1}f(tx)\Big]_0^1 dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}} = f dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_{k+1}} \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.4.1 Une forme fermée sur une boule ouverte est exacte. En particulier, une forme fermée sur un ouvert U est *localement* exacte.

Corollaire 3.4.2 Soit V un ouvert difféomorphe à un ouvert U étoilé. Alors une forme fermée sur V est exacte.

Dém. : notons $\varphi : V \to U$ un tel difféomorphisme. Soit $\alpha\in\Omega^{k+1}(V)$. Alors, ${\varphi^{-1}}^*(\alpha)\in\Omega^{k+1}(U)$. Or, $d{\varphi^{-1}}^*\alpha = {\varphi^{-1}}^*(d\alpha)=0$. Donc il existe $\beta\in\Omega^k(U)$ tel que $d\beta = {\varphi^{-1}}^*\alpha$ et α est exacte.

Exemple 3.4.2 Soit $\gamma(t)=e^{it}$ pour $t\in[0,2\pi]$. Alors

$$\int_\gamma Q = \int_0^{2\pi}\gamma^*(Q) = \int_0^{2\pi}Q(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi}(\cos^2(t)+\sin^2(t))dt = 2\pi.$$

Or, si Q etait exacte, il existerait $\beta \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \mathbb{R})$ tel que $d\beta = Q$. En particulier,

$$\int_\gamma Q = \int_\gamma d\beta = \int_0^{2\pi} d\gamma^*(\beta) = \int_0^{2\pi} (\beta \circ \gamma)'(t)dt = \beta(1) - \beta(1) = 0.$$

En fait, $Q = d(2\arctan(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}))$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-^* \times \{0\}$. Ainsi

$$\frac{dz}{z} = (P + iQ)(z) = d(\ln|z| + iArg(z))$$

avec $Arg(z) \in]-\pi, \pi[$ (*détermination principale du logarithme*).

Proposition 3.4.2 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ étoilé en x_0 et $\alpha \in \Omega^1(U)$. C.S.S.E. :

1. α est exacte
2. pour tout chemin fermé $\gamma : I \stackrel{C^0}{\to} U$, paramétrant un triangle de sommet x_0 : $\int_\gamma \alpha = 0$.

Remarque 3.4.2 Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ continue. Pour que f soit holomorphe sur U il faut et il suffit que $\int_\gamma f dz = 0$ pour tout lacet γ de U paramétrant un triangle contenu, ainsi que son intérieur, dans U.

3.5 Formule de Stokes

3.5.1 Variété à bord

Notons $H_+^d := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d \geqslant 0\}$.

Définition 3.5.1 Une *sous-variété à bord* M de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble admettant des paramétrisations locales (*immersion injective* $C^{k\geqslant 1}$ *homémorphisme sur son image*) définies sur un ouvert de H_+^d. Le *bord* ∂M de M est l'ensemble des points qui sont images de $\{x_d = 0\}$ par une paramétrisation. L'*intérieur* de M est $M \setminus \partial M$.

Remarque 3.5.1

1. $int(M) = M \setminus \partial M$ est une variété sans bord (ne pas confondre avec l'intérieur topologique car si $\dim M < n$ alors $\overset{o}{M} = \varnothing$).
2. ∂M est une sous-variété sans bord de M, de codimension 1.
3. Une fonction $f : M \to N$ est de classe C^p si elle est restriction d'une fonction g de classe C^p définie sur un ouvert V contenant M.

Exemple 3.5.1

1. Les sous-espaces H_+^d et H_-^d sont des sous-variétés à bord $\partial H_\pm^d = \{x_d = 0\}$.
2. Une boule fermée (de dimension d) est une sous-variété (de dimension d) à bord la sphère S^{d-1}.
3. Le cylindre $S^1 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ est une ($2-$sous-)variété à bord $S^1 \sqcup S^1$.

3.5.2 Orientation

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 3.5.2 Une *orientation* de E est le choix d'une base (*ordonnée*) $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Deux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de E *appartiennent à la même classe d'orientation* si $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') > 0$.

Autrement dit, l'unique automorphisme φ envoyant $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}'$ *conserve* (resp. *inverse*) l'orientation de E si $\det(\varphi) > 0$ (resp. < 0). Ceci définit une *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ (à 2 classes) sur l'ensemble des bases de E.

Soient F un second e.v. orienté, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux bases d'orientation de E et $\psi : E \to F$ un isomorphisme. Alors $\psi(\mathcal{E})$ et $\psi(\mathcal{E}')$ appartiennent à la même classe d'orientation. Ainsi ψ conserve (ou inverse) l'orientation.

Exemple 3.5.2 $\mathbb{R}^d$ sera toujours supposé orienté à l'aide de l'orientation donnée par la base canonique $\mathcal{C}_d$.

Définition 3.5.3 Une variété à bord M de classe C^{k+1} est *orientée* si, les espaces tangents $(T_xM)_{x\in M}$ sont orientés *de manière* C^k, *i.e.* en chaque point x_0, il existe une paramétrisation locale $\varphi : U \subseteq H^d_+ \overset{C^k}{\to} U_{x_0}$ de M telle que $d\varphi(t) : \mathbb{R}^d \to T_{\varphi(t)}M$ induise l'orientation de $T_{\varphi(t)}M$.

Proposition 3.5.1 Une variété connexe orientable admet exactement 2 orientations.

Remarque 3.5.2

1. Soit φ une paramétrisation locale de M en x_0. Alors $d\varphi(0)\mathbb{R}^d$ est l'espace tangent $T_{x_0}M$ en $\varphi(0) = x_0$ de dimension d en tout point de M. Si $x_0 \in \partial M$ alors le demi-espace $d\varphi(0)H^d_+$ est indépendant de φ.
2. Soit $x_0 \in \partial M$. Alors $T_{x_0}\partial M$ est de codimension 1 dans $T_{x_0}M$; il existe donc 2 vecteurs normaux à $T_{x_0}\partial M$. Si φ est une paramétrisation locale de M en $\varphi(0) = x_0 \in \partial M$ alors $d\varphi^{-1}(x_0)$ envoie l'un dans H^d_+ (*entrant*) et l'autre dans H^d_- (*sortant*). On note $n(x_0)$ le vecteur normal sortant en x_0. Le « champ sortant » est C^k si M est C^{k+1}.

Proposition 3.5.2 Soit M une variété à bord, orientable. Alors ∂M est orientable.
Dém. : soit $x_0 \in \partial M$. Définissons

$$(\partial_1, \dots, \partial_{d-1}) \in O^{\pm}(T_{x_0}\partial M) \Leftrightarrow (n(x_0), \partial_1, \dots, \partial_{d-1}) \in O^{\pm}(T_{x_0}M).$$

Si φ une paramétrisation locale orientée alors de deux choses l'une :
- $(d\varphi(0)e_1, \dots, d\varphi(0)e_{d-1}) \in O^+(T_{x_0}\partial M)$
  ou bien
- $(d\varphi(0)e_1, \dots, d\varphi(0)e_{d-1}) \in O^-(T_{x_0}\partial M)$.

Le bord est ainsi orienté localement de manière C^k si M est C^{k+1}.

Remarque 3.5.3 L'orientation induite par H^d_+ sur $\partial H^d_+ = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^{d-1}$ dépend de d. Plus précisément, $\partial H^d_+ = (-1)^d\mathbb{R}^{d-1}$.

3.5.3 Intégration d'une forme différentielle

Théorème 3.5.1 (changement de variable) Soient $U, V \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^d}$, $\theta : U \overset{C^1}{\to} V$ un difféomorphisme et $f \in L^1(V)$. Alors

$$\int_V f dy_1 \cdots dy_d = \int_{\theta^{-1}(V)} \theta^*(f) dx_1 \cdots dx_d = \int_U f \circ \theta . |j\theta| dx_1 \cdots dx_d.$$

Remarque 3.5.4 Si $j\theta > 0$ alors θ *conserve* l'orientation de $\mathbb{R}^d$ *i.e.* l'image par $d\theta(x)$ de la base canonique $\mathcal{C}_d$ est dans la même classe d'orientation que $\mathcal{C}_d$.

Définition 3.5.4 Une $1-$*forme différentielle* sur une sous-variété M est une section continue du fibré cotangent T^*M. Le $C(M)-$module des $1-$formes différentielles sur M est noté $\Omega^1(M)$. Plus généralement, $\Omega^k(M)$ est le module des sections du fibré vectoriel (de rang C^k_n)

$$\wedge^k(T^*M) := \bigcup_{x\in M} \{x\} \times \wedge^k(T^*_xM).$$

Remarque 3.5.5

1. Une 1−forme est donc indifféremment une section du fibré $\wedge^1(T^*M)$ ou T^*M.
2. On a fait l'abus de notation $\Omega^k(U)$, où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$, pour les sections du fibré (trivial) $\wedge^k(U) = U \times \wedge^k(\mathbb{R}^{n*})$.

Lemme 3.5.1 Si (U_1, V, φ_1) et (U_2, V, φ_2) sont 2 paramétrisations locales *orientées* d'un ouvert V de M et si $\omega \in \Omega_c^{\dim(M)}(V)$ alors

$$\int_{U_1} \varphi_1^*(\omega) = \int_{U_2} \varphi_2^*(\omega).$$

Définition 3.5.5 Soient M une sous-variété orientée à bord lisse, $\varphi : H_+^d \supseteq U \to V \subseteq M \subset \mathbb{R}^n$ une paramétrisation locale de M telle que φ induise l'orientation de M et $\omega \in \Omega_c^d(M)$ telle que $supp(\omega) \subseteq V$. Alors :

$$\int_V \omega := \int_U \varphi^*(\omega) = \int_U f dx_1 \cdots dx_d.$$

Exemple 3.5.3 Soit $\omega = dx \wedge dy$. Si $\Psi(\phi, \theta) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi)$ alors

$$\int_{S^2} \omega = \int\int_{]0,\pi[\times]0,2\pi[} \Psi^*(\omega) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin 2\phi}{2} d\phi d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{4}\cos 2\phi\right]_0^{\pi} = 0.$$

Lemme 3.5.2 (partition d'unité) Soient M une sous-variété (éventuellement à bord) de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de M. Il existe une sous-recouvrement localement fini dénombrable plus fin $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{U}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions $\alpha_n : M \overset{C^k}{\to} [0,1]$ telles que :

- $\forall n \in \mathbb{N} : supp(\alpha_n) \subset V_n$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 1.$

On étend par partition de l'unité la définition de l'intégrale d'une forme différentielle (après avoir vérifié que la valeur obtenue est indépendante de la partition de l'unité choisie).

Remarque 3.5.6 Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n$ avec $\omega_n = \alpha_n\omega$ une forme différentielle nulle en dehors de V_n.

Théorème 3.5.2 (formule de Stokes) Soient M une sous-variété à bord orientée et $\omega \in \Omega_c^{d-1}(M)$ de classe C^1. Alors :

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} j^*(\omega)$$

où $j : \partial M \to M$ désigne l'inclusion.

Dém. : pour simplifier, on va supposer que $supp(\omega) \subset V$ avec V ouvert dans M, image d'une paramétrisation $\varphi : H_+^d \to V$. L'image réciproque $\varphi^*(\omega) \in \Omega^{d-1}(H_+^d)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_V d\omega &= \int_{H_+^d} \varphi^*(d\omega) = \int_{H_+^d} d\varphi^*(\omega) \\
&= \sum_{i=1}^d \int_{H_+^d} d(f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_{d-1}) \\
&= \sum_{i=1}^d \int_{H_+^d} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d.
\end{aligned}$$

Or, pour $1 \leqslant i < d$:

$$\int_{H_+^d} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_d = 0$$

grâce à la condition de support.

Dés lors,

$$\begin{aligned}
\int_V d\omega &= (-1)^{d-1} \int_{H_+^d} \frac{\partial f_d}{\partial x_d} dx_1 \cdots dx_d \\
&= (-1)^{d-1} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\partial f_d}{\partial x_d} dx_d) dx_1 \cdots dx_{d-1} \\
&= (-1)^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_d(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{d-1} \\
&= \int_{\partial H_+^d} f_d(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{d-1} \\
&= \int_{\partial H_+^d} f_{d|\partial H_+^d} dx_1 \cdots dx_{d-1} \\
&= \int_{\partial H_+^d} j_d^* \varphi^*(\omega) \\
&= \int_{\partial M \cap V} j^*(\omega).
\end{aligned}$$