Université de Savoie Année 09/10

MATH407 : Mathématiques pour les sciences IV

Algèbre linéaire, optimisation et transformations intégrales

Stéphane Simon

Table des matières

Bien que de nombreux résultats soient énoncés dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, la majorité d'entre eux s'étend de manière naturelle à $\mathbb{R}^n$.
Par ailleurs, on munira systématiquement $\mathbb{R}$ de la valeur absolue $|\cdot|$.

1 Algèbre linéaire

1.1 Généralités

Rappel 1.1.1 Un ($\mathbb{K}-$)espace vectoriel (ev) E est un ensemble muni d'une loi interne $+$ (de groupe abélien) et d'une multiplication externe (de $\mathbb{K} \times E \to E$) *se comportant* comme dans $\mathbb{R}^2$. Un élément de E est un *vecteur*.

Définition 1.1.1 Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$ de E est

- *libre* si $\forall (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \subset \mathbb{K}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$ alors on a $\forall i \in \{1, \ldots, p\} : \lambda_i = 0$. Si la famille n'est pas libre alors elle est *liée*.
- *génératrice* si $(\forall u \in E)(\exists (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p} \subset \mathbb{K}) : u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$
- une *base* si $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre et génératrice.

Une somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. La *dimension* de E est le cardinal d'une base (bien défini). Un ev est de *dimension finie* si il admet une famille génératrice finie.

Proposition 1.1.1 Une famille d'au moins $n+1$ vecteurs dans un ev de dimension n est liée.

Exemple 1.1.1

1. La famille $\mathcal{C}_n = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $e_i = \overbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}^{\text{ième position}}$ est la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.
2. Dans $\mathbb{Q}^3$ en tant que $\mathbb{Q}$-ev, $\mathbb{R}^3$ (en tant que $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}-$ev) ou $\mathbb{C}^3$ (en tant que $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}-$ev) :
   (a) La famille $((1,0,0),(1,2,0))$ est libre mais n'est pas génératrice du $\mathbb{Q}-$ev $\mathbb{Q}^3$, des $\mathbb{Q}-$ ou $\mathbb{R}-$ev $\mathbb{R}^3$ ni des $\mathbb{Q}-$, $\mathbb{R}-$ ou $\mathbb{C}-$ev $\mathbb{C}^3$.
   (b) La famille $((1,0,0),(1,2,0),(1,2,3),(\sqrt{2},0,0))$ est génératrice mais liée dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{R}-$ev et libre (mais non génératrice) dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{C}^3$ en tant que $\mathbb{Q}-$ev.

Remarque 1.1.1 L'écriture d'un vecteur sur une famille libre est unique.

Théorème 1.1.1 (de la base incomplète) Soit $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{G}$) une famille libre (resp. génératrice) d'un ev E telles que $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$. Alors il existe une famille $\mathcal{B}$ contenant $\mathcal{L}$ et contenue dans $\mathcal{G}$, qui est une base de E.

Corollaire 1.1.1 Une famille d'au plus $n-1$ vecteurs dans un ev de dimension n n'est pas génératrice.

Proposition 1.1.2 Soient E un ev de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.

1. $\mathcal{F}$ est libre $\Rightarrow card(\mathcal{F}) \leqslant n$. De plus, $\mathcal{F}$ est libre et $card(\mathcal{F}) = n$ ssi $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. $\mathcal{F}$ est génératrice $\Rightarrow card(\mathcal{F}) \geqslant n$. De plus, $\mathcal{F}$ est génératrice et $card(\mathcal{F}) = n$ ssi $\mathcal{F}$ est une base de E.

Définition 1.1.2 Un *sous-espace vectoriel* (sev) F d'un ev E est un sous-ensemble de E tel que :
- $F \neq \varnothing$
- $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$
- $u \in F, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in F$

Le *sev engendré* par une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est le plus petit sev F contenant $\mathcal{F}$. C'est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$. On note $F = <\mathcal{F}>$.

Proposition 1.1.3 Soients V et W deux sevs d'un ev E de dimension finie. Alors $V + W = \{v + w : v \in V, w \in W\}$, $V \cap W$ sont des sev de E et

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W).$$

Définition 1.1.3 Les sevs V et W sont *supplémentaires* ou *en somme directe* dans E si

1. $V + W = E$
2. $V \cap W = \{0\}$

On note $E = V \oplus W$. En fait, $E = V \oplus W$ ssi un vecteur u de E s'écrit de manière unique comme une somme $u = v + w$ d'un vecteur $v \in V$ et $w \in W$.

1.2 Application linéaire

Définition 1.2.1 Soient E, F des ev. Une application $L : E \to F$ est *linéaire* si

$$\forall u, v \in E : L(u + v) = L(u) + L(v) \text{ (additivité)}$$

et

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall u \in E) : L(\lambda u) = \lambda L(u) \text{ (homogénéité)}.$$

Remarque 1.2.1 On a toujours $L(0) = 0$.

Exemple 1.2.1

1. Une application *affine* est la somme d'une application linéaire et d'une application constante. Par exemple, $x \mapsto ax + b$ et $(x, y) \mapsto (x + a, b)$ sont affines.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $L(x, y) = (\alpha x + \beta y, -\alpha x - \beta y)$. Alors L est linéaire.
3. La somme de 2 applications linéaires est linéaire et un multiple d'une application linéaire est linéaire (E, F fixés !).

Définition 1.2.2 Si L est une application linéaire alors le *noyau* $\ker L = \{u \in E \mid L(u) = 0\}$ (resp. l'*image* $\operatorname{Im} L = L(E) = \{v \in F \mid \exists u \in E, L(u) = v\}$) est un sev de E (resp. F) ; le *rang* de L est la dimension de l'image ; on le note $\operatorname{rg} L$.

Exemple 1.2.2

$$\ker L = \left\{ \begin{array}{cc} <(-\beta,\alpha)> & \text{si } (\alpha,\beta)\neq(0,0) \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } (\alpha,\beta)=(0,0) \end{array} \right. ;$$

$$\operatorname{Im} L = \left\{ \begin{array}{cc} <(-1,1)> & \text{si } (\alpha,\beta)\neq(0,0) \\ \{0\} & \text{si } (\alpha,\beta)=(0,0) \end{array} \right. .$$

Théorème 1.2.1 (du rang) Si $\dim E$ est finie (ce sera presque toujours le cas dans ce cours) alors $\dim E = \dim(\ker L) + \operatorname{rg} L$

Exemple 1.2.3 $2 = 1 + 1 = 2 + 0$.

Définition 1.2.3 Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E (de dimension n) et $L : E \to E$ un *endomorphisme*. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$: $L(e_j) \in E$. Donc $L(e_j)$ s'écrit de manière unique à l'aide des (e_i). On a :

$$L(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i.$$

Le tableau (carré ici) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ est *la matrice* $mat(L, \mathcal{B}) := mat(L, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ de L dans $\mathcal{B}$.

Remarque 1.2.2 L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes est un $\mathbb{K}-$ev de dimension mn ; on le note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Exemple 1.2.4 $mat(L, \mathcal{C}_2) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ -\alpha x - \beta y \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2.1 Si $L_1, L_2 \in L(E)$ alors $mat(L_1 \circ L_2, \mathcal{B}) = mat(L_1, \mathcal{B}) mat(L_2, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B}$ base de E.

Définition 1.2.4 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La matrice de *changement de base* ou de *passage* de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice de l'identité $mat(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$; on note souvent une telle matrice P ou Q.

Proposition 1.2.2 Si X (resp. X') désigne la matrice colonne des composantes d'un vecteur v de E dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) alors $X = PX'$. La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est P^{-1}.

Exemple 1.2.5 $P = mat(id_{\mathbb{K}^2}, ((1,1), (-1,1)), \mathcal{C}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = mat(id_{\mathbb{K}^2}, \mathcal{C}_2, ((1,1), (-1,1))) = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.2.3 (Formule de matrice de passage) Si $A = mat(L, \mathcal{B})$ alors

$$A' = mat(L, \mathcal{B}') = P^{-1} A P$$

où $P = mat(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Définition 1.2.5 Le *déterminant* d'une matrice carrée A est l'unique *forme multilinéaire alternée* des colonnes de A qui est égale à 1 sur la matrice identité I. On a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

et

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

(développement suivant la 1ère colonne).

Exemple 1.2.6 $\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

Remarque 1.2.3

1. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux.
2. $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition 1.2.4

1. $\det(A) = \det({}^tA)$.
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Proposition 1.2.5 Si un *endomorphisme* L de E admet la matrice (carrée) A (resp. A') dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) alors $\det(A') = \det(A)$.

Définition 1.2.6 Le *déterminant* de l'endomorphisme L est $\det(L) := \det(mat(L, \mathcal{B}))$.

Proposition 1.2.6 Soient E un ev de dimension finie et L un endomorphisme de E. C.S.S.E.

1. L est inversible
2. $\ker L = \{0\}$ (plus généralement, L est injective)
3. $\operatorname{Im} L = E$
4. $\operatorname{rg} L = \dim E$ (plus généralement, L est surjective)
5. $\det(L) \neq 0$.

1.3 Théorie spectrale élémentaire

Définition 1.3.1 Soient L un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou plus généralement $\mathbb{K}$). Si il existe $u \in E - \{0\}$ tel que $L(u) = \lambda u$ alors u est un *vecteur propre* de L associé à la *valeur propre* λ. L'ensemble des valeurs propres constitue le *spectre* $Sp(L)$ de L. Le *sous-espace propre associé à* λ est $E_\lambda = \ker(L - \lambda id_E)$.

Remarque 1.3.1

1. Si A désigne la matrice de L dans la base $\mathcal{B}$ alors les valeurs et vecteurs propres sont déterminés par l'équation matricielle :

   $AX = \lambda X$ avec X la matrice colonne des composantes d'un vecteur u dans $\mathcal{B}$.

En particulier, si $\mathcal{B}'$ est une autre base et $mat(L,\mathcal{B}') = A' = P^{-1}AP$ alors

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow APX' = \lambda PX' \Leftrightarrow P^{-1}APX' = \lambda X' \Leftrightarrow A'X' = \lambda X'.$$

avec X' la matrice colonne des composantes du vecteur u dans $\mathcal{B}'$.

2. $0 \in Sp(L) \Leftrightarrow \{0\} \subsetneq \ker L \Leftrightarrow L$ non inversible.

Proposition 1.3.1 Une famille de sous-espaces propres $(E_{\lambda_i})_{1\leqslant i\leqslant p}$ avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, est en somme directe dans $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$. Autrement dit, une famille de vecteurs propres (v_i) associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.

Définition 1.3.2 Le *polynôme caractéristique* χ_L d'un endomorphisme L est le déterminant $\chi_L := \det(L - Xid_E) = \det(A - XI_n)$ avec $A = mat(L,\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ désigne une base quelconque de E.

Remarque 1.3.2

1. Si $\mathcal{B}'$ désigne une autre base et $A' = mat(L,\mathcal{B}')$ alors

$$\det(A' - XI_n) = \det(P^{-1}AP - XI_n) = \det(P^{-1}(A - XI_n)P) = \chi_L.$$

2. On a $\chi_L(0) = \det(L)$.

Exemple 1.3.1 $\chi_L(X) = X(X - (\alpha - \beta))$.

Proposition 1.3.2 λ est valeur propre de l'endomorphisme L ssi $\chi_L(\lambda) = 0$.
Dém. $\lambda \in Sp(L) \Leftrightarrow L - \lambda id_E$ non inversible $\Leftrightarrow \det(L - \lambda id_E) = 0 \Leftrightarrow \chi_L(\lambda) = 0$.

Exemple 1.3.2 $Sp(L) = \{0, \alpha - \beta\}$.

Remarque 1.3.3

1. Le polynôme caractéristique est un polynôme de degré $n = \dim E$ du type

$$\chi_L(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(L) X^{n-1} + \cdots + \det(L).$$

2. Le plus souvent, on identifiera un endomorphisme et sa matrice dans une base donnée.
3. Un endomorphisme admet au plus $\dim E$ valeurs propres.

Définition 1.3.3 Un endomorphisme L est *diagonalisable* (resp. *trigonalisable*) si il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres de L (resp. telle que la matrice de L dans $\mathcal{B}$ soit triangulaire).

Remarque 1.3.4 Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $L \in L(E)$.

$$L \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : P^{-1}mat(L,\mathcal{B})P = D \text{ est diagonale}$$
$$L \text{ trigonalisable} \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : P^{-1}mat(L,\mathcal{B})P = T \text{ est triangulaire.}$$

Définition 1.3.4 Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $\geqslant 1$ est *scindé* sur $\mathbb{K}$ si il peut s'écrire comme produit de facteurs de degré 1 ou, de manière équivalente, si toutes ses racines appartiennent à $\mathbb{K}$.

Rappel 1.3.1 Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) sont du type $X-a$ ou X^2+aX+b à discriminant strictement négatif (resp. $X-a$).

Remarque 1.3.5 Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ ssi la somme des multipicités de ses racines dans $\mathbb{K}$ est égale au degré de P.

Proposition 1.3.3 Un endomorphisme L (ou une matrice carrée) est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi χ_L est scindé sur $\mathbb{K}$ et si la multiplicité algébrique d'une valeur propre quelconque est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

Dém.

($\Rightarrow$) Si L est diagonalisable alors χ_L est scindé et la dimension d'un sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre.

($\Leftarrow$) En considérant la famille réunion des bases des E_{λ_i} et en remarquant que cette réunion est de cardinal n, on en déduit que cette famille libre est une base de E diagonalisant L.

Corollaire 1.3.1 Un endomorphisme L est diagonalisable ssi $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(L)} E_\lambda$.

Corollaire 1.3.2 Si un endomorphisme admet $\dim E$ valeurs propres distinctes alors il est diagonalisable.

Proposition 1.3.4 Si F est un sev de E stable par L alors $\chi_{L_{|F}} \mid \chi_L$.

Dém. : soit F' un supplémentaire de F dans E. Notons $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) une base de F (resp. F') alors $\mathcal{B}'' = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ est une base de E et

$$A'' = mat(L, \mathcal{B}'') = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & B' \end{pmatrix}$$

où $B = mat(L_{|F}, \mathcal{B})$. D'où le résultat par « *produit des déterminants par blocs* ».

Proposition 1.3.5 Un endomorphisme (ou une matrice carrée) est trigonalisable (sur $\mathbb{K}$) ssi son polynôme caractéristique est scindé (sur $\mathbb{K}$).

Dém.

($\Rightarrow$) si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de L dans $\mathcal{B}$ soit triangulaire alors χ_L est scindé (sur $\mathbb{K}$).

($\Leftarrow$) Comme χ_L est scindé sur $\mathbb{K}$, il admet au moins une racine, donc L possède une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors E_λ est stable par L. Donc $\chi_{L_{|E_\lambda}} = (\lambda - X)^{\dim E_\lambda \geqslant 1}$ divise χ_L. Soit F un supplémentaire de E_λ dans E. Si $\mathcal{B}_\lambda$ (resp. $\mathcal{C}$) désigne une base de E_λ (resp. F) alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\lambda \cup \mathcal{C}$ est une base de E et

$$mat(L, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \\ & & \ddots & \lambda & * \\ 0 & \cdots & & 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $C = mat(g, \mathcal{C})$ où $g = pr_{F//E_\lambda} \circ L_{|F}$. Or χ_g est encore scindé d'où le résulat par récurrence sur $\dim F$.

Corollaire 1.3.3 Un endomorphisme sur un $\mathbb{C}-$ev de dimension finie est trigonalisable.

Exemple 1.3.3

1. χ est scindé et donc L est trigonalisable quels que soient α et β.
2. Si $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ alors $E_0 =< (-\beta,\alpha) >=< u_0 >$.
3. Si $\alpha \neq \beta$ alors L est diagonalisable, $E_{\alpha-\beta} =< (-1,1) >=< u_{\alpha-\beta} >$ et $mat(L,(u_0,u_{\alpha-\beta})) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta \end{pmatrix}$.
4. si $\beta = \alpha$ alors
   (a) si $\alpha \neq 0$ alors $L(-e_1) = (-\alpha,\alpha) = u_0$ et $mat(L,(u_0,-e_1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) si $\alpha = 0$ alors $mat(L,\mathcal{C}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = 0$.

Théorème 1.3.1 (de Cayley-Hamilton) Soit L un endomorphisme d'un $\mathbb{K}-$ev de dimension finie. Alors

$$\chi_L(L) = 0.$$

Exemple 1.3.4 $L \circ (L - (\alpha-\beta)id_{\mathbb{K}^2}) = 0$ ou $A(A - (\alpha-\beta)I_2) = 0$.

Proposition 1.3.6 Soient E, F des $\mathbb{K}-$ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) normés avec E de dimension finie et $L : E \to F$ une application linéaire. Alors L est continue sur E (et en fait *lipschitzienne* sur E).

2 Algèbre bilinéaire

2.1 Forme bilinéaire

Définition 2.1.1 Une *forme bilinéaire* sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est une application $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linéaire par rapport à chaque variable.

Exemple 2.1.1

$$\begin{array}{llcl} \varphi_1 & : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{array}$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Définition 2.1.2 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. La *matrice de* φ dans $\mathcal{B}$ est $A = mat_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Exemple 2.1.2

$$A = mat_{\mathcal{C}_2}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1.1

1. En particulier, si $u = (x_1, \ldots, x_n)$ et $v = (y_1, \ldots, y_n)$ sont les expressions de u et v dans la base $\mathcal{B}$ alors

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} mat_{\mathcal{B}}(\varphi) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tUAV$$

2. Si $\varphi(u, v) = {}^tUAV$ dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Proposition 2.1.1 (Changement de base) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$A' = mat_{\mathcal{B}'}(\varphi) = {}^tPAP$$

où $A = mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ et $P = mat(id_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Exemple 2.1.3

$$\begin{aligned} A' &= mat_{((1,0),(1,1))}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Définition 2.1.3 Une forme bilinéaire φ est *symétrique* si $\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.

Exemple 2.1.4

1.
$$\begin{array}{lll} \varphi_2 : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ & (u, u') & \mapsto xx' + yy' \end{array}$$

   est bilinéaire symétrique.
2. φ_1 n'est pas symétrique.

Proposition 2.1.2 Soit φ une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. C.S.S.E.

1. φ est symétrique
2. Pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$: $mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique
3. il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est symétrique.

Définition 2.1.4 Le *noyau* d'une forme bilinéaire symétrique φ est le sev $\ker\varphi = \{v \in \mathbb{R}^n : \forall u \in \mathbb{R}^n, \varphi(u,v) = 0\}$.

Proposition 2.1.3 Le noyau d'une forme bilinéaire symétrique φ est le noyau de l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ dont la matrice A relativement à $\mathcal{B}$ est $mat_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Dém. : en effet, $\forall u \in \mathbb{R}^n : \varphi(u,v) = 0 \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : {}^tUAV = 0$. Autrement dit : $\forall i \in \{1,\dots,n\} : {}^tE_iAV = (AV)_i = 0$ *i.e.* $V \in \ker A$.

Définition 2.1.5 Le *rang* de φ est le rang de l'application linéaire précédente, c'est donc aussi le rang de la matrice A.

Exemple 2.1.5

1. $\ker\varphi_2 = \{0\}$
2. $\operatorname{rg}\varphi_2 = 2$.

Remarque 2.1.2 Le noyau et le rang sont indépendants de la base dans laquelle la matrice de φ est écrite.

Définition 2.1.6 Une *forme quadratique* sur $\mathbb{R}^n$ est une application $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire φ telle que $\forall u \in \mathbb{R}^n : q(u) = \varphi(u,u)$.

Remarque 2.1.3 Il est immédiat d'après la définition que

$$(\forall\lambda \in \mathbb{R})(\forall u \in \mathbb{R}^n) : q(\lambda u) = \lambda^2 q(u).$$

Ceci traduit le *caractère quadratique* de q.

Exemple 2.1.6 La forme quadratique définie par la forme bilinéaire symétrique φ_2 est $q(u) = q(x,y) = x^2 + y^2$ (le carré de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$).

Proposition 2.1.4 Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une et une seule forme bilinéaire symétrique φ_q définissant q.

Dém. : en effet, soit φ une forme bilinéaire telle que $q(u) = \varphi(u,u)$. Posons, pour $u, v \in \mathbb{R}^n$: $\varphi_q(u,v) = \dfrac{\varphi(u,v) + \varphi(v,u)}{2}$. Alors, φ_q est bilinéaire symétrique et $q(u) = \varphi_q(u,u)$. D'autre part, si φ' est une seconde forme bilinéaire symétrique telle que $\forall u \in \mathbb{R}^n : q(u) = \varphi'(u,u)$ alors

$$\begin{aligned} 2\varphi'(u,v) &= \varphi'(u+v,u+v) - (\varphi'(u,u) + \varphi'(v,v)) \\ &= q(u+v) - (q(u) + q(v)) \\ &= 2\varphi_q(u,v). \end{aligned}$$

Définition 2.1.7 Cette (unique) forme bilinéaire symétrique φ_q est la *forme polaire* de q. Elle s'obtient par les *identités de polarisation* :

$$\begin{aligned} \varphi_q(u,v) &= \tfrac{1}{2}(q(u+v) - (q(u) + q(v))) \\ &= \tfrac{1}{4}(q(u+v) - q(u-v)). \end{aligned}$$

Remarque 2.1.4 La proposition précédente exprime l'existence d'un isomorphisme $Q(\mathbb{R}^n) \simeq \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$. On transporte ainsi sur $q \in Q(\mathbb{R}^n)$ une notion définie sur sa forme polaire $\varphi_q \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}^n)$.

2.2 Résultats fondamentaux

Définition 2.2.1 Soit φ une forme bilinéaire symétrique. Les vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ sont $\varphi-$*orthogonaux* si $\varphi(u,v) = 0$. Deux sev V, W sont $(\varphi-)$*orthogonaux* si $(\forall u \in V)(\forall v \in W) : \varphi(u,v) = 0$.

Définition 2.2.2 Une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ est *dégénérée* si $\ker q \neq \{0\}$. Ainsi, q est dégénérée s'il existe une vecteur non nul (φ_q-)orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Autrement dit, q est non dégénérée si $\ker \varphi_q = \{0\}$ où φ_q désigne sa forme polaire. Ainsi, pour que q soit non dégénérée, il faut et il suffit que q soit de rang n.

Définition 2.2.3 Un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est *isotrope* (pour q) si $q(u) = 0$.

Remarque 2.2.1

1. L'ensemble des vecteurs isotropes constitue un *cône* noté I (le cône isotrope). En général, ce n'est pas un sev. Cependant, I sev ssi $I = \ker q$.$(\Rightarrow)$ $*$Si $u \in I$ alors $u = u_+ + u_- + u_0 \in E_+ \oplus E_- \oplus E_0$ et $u_+ + u_-, u_+ - u_- \in I$. Donc $u_+, u_- \in I$. Mais alors pour tout $v \in E : \varphi(u,v) = \varphi(u_+, v_+) + \varphi(u_-, v_-)$. Or, $\varphi_{|E_+ \times E_+} > 0$ (resp. $\varphi_{|E_- \times E_-} < 0$) d'où, par Cauchy-Schwartz, $u_+, u_-, u \in \ker q*$ (rédaction légèrement différente plus bas).
2. **En particulier**, si q n'admet aucun vecteur isotrope non nul alors q est non dégénérée.
3. Un vecteur est isotrope s'il est orthogonal à lui-même.

Proposition 2.2.1 Soit φ une forme bilinéaire symétrique. Il existe des bases $\varphi-$orthogonales (*i.e.* orthogonale pour φ).

Dém. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, c'est immédiat. Supposons donc $n \geqslant 2$. Deux cas se présentent :

1. Tous les vecteurs sont isotropes, donc la forme quadratique q associée est identiquement nulle. Mais alors φ est elle-même nulle. Donc, n'importe quelle base convient.
2. Il existe $u_0 \in \mathbb{R}^n$ non isotrope. Alors, $H = \ker \varphi(u_0, \cdot)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ $\varphi-$orthogonal à u_0. Par récurrence, il existe une base orthogonale $\mathcal{B}$ de H donc $(u_0, \mathcal{B})$ forme une base $\varphi-$orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.2.2

1. La matrice de φ dans une base orthogonale $\mathcal{B}$ est diagonale.
2. $\varphi(u,v) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i v_i$ avec $\alpha_i = \varphi(e_i, e_i)$ et (u_i) (resp. (v_i)) les composantes de u (resp. v) dans $\mathcal{B}$ orthogonale.
3. φ est non dégénérée ssi $\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \alpha_i \neq 0$.

Définition 2.2.4 Une forme quadratique q est *positive* (resp. *définie positive, resp. négative*, resp. *définie négative*) si pour tout u, $q(u) \geqslant 0$ (resp. $q(u) > 0$ si $u \neq 0$, resp. $q(u) \leqslant 0$, resp. $q(u) < 0$ si $u \neq 0$).
On note $q \geqslant 0$ (resp. $q > 0$, resp. $q \leqslant 0$, resp. $q < 0$).

Théorème 2.2.1 (Cauchy-Schwartz) Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive. Alors

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \varphi^2(u,v) \leq \varphi(u,u)\varphi(v,v) = q(u)q(v).$$

Remarque 2.2.2 Supposons φ positive et $\varphi^2(u,v) = q(u)q(v)$. Si $q(v) \neq 0$ alors $q(u+\lambda v)$ admet une racine double λ_0. Donc $u + \lambda_0 v \in \ker q$ avec $\lambda_0 = -\frac{\varphi(u,v)}{q(v)}$.

Corollaire 2.2.1 (Minkowski) Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive. Alors

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\varphi(u+v, u+v)} \leqslant \sqrt{\varphi(u,u)} + \sqrt{\varphi(v,v)}.$$

Proposition 2.2.3 Le noyau et le cône isotrope d'une forme bilinéaire symétrique positive coincident.

Corollaire 2.2.2 Soit φ une forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée. Alors
- $I = \{0\}$.
- La restriction de φ à un sev est encore non dégénérée.

Définition 2.2.5 Un *produit scalaire* est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. On le note souvent $(\cdot| \cdot \cdot)$.

Remarque 2.2.3
1. D'après Minkowski, un produit scalaire définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ en posant $\|u\|_2 = \sqrt{(u|u)}$.
2. D'après la remarque ci-dessus et le caractère défini d'un produit scalaire
$$|(u|v)| = ||u||_2||v||_2 \Leftrightarrow (u,v) \text{ liée.}$$

Proposition 2.2.4 Soit φ un produit scalaire. Alors, une famille de vecteurs non nuls $\varphi-$orthogonale est libre.

Remarque 2.2.4 On peut se contenter de supposer φ bilinéaire symétrique et $I_\varphi \cap \mathcal{F} = \varnothing$.

2.2.1 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soient $(u_1, \ldots, u_k)$ une famille libre et $(\cdot| \cdot \cdot)$ un produit scalaire.
Posons $e_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$. Alors (e_1) est orthonormale !

Supposons que $(e_1, \ldots, e_i)$ soit orthonormale et posons $u'_{i+1} = u_{i+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{i} (u_{i+1}|e_j)e_j$; alors u'_{i+1} est orthogonal à $(e_1, \ldots, e_i)$. Comme $u_{i+1} \notin < e_1, \ldots, e_i >$, $u'_{i+1} \neq 0$; on pose donc $e_{i+1} = \dfrac{u'_{i+1}}{\|u'_{i+1}\|}$.

Théorème 2.2.2 (d'inertie de Sylvester) Soit φ une forme bilinéaire symétrique. Il existe une base $\varphi-$orthogonale telle que

$$q(e_i) = \begin{cases} \ \ 1 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant s \\ -1 & \text{si } s+1 \leqslant i \leqslant s+t \\ \ \ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus s et t ne dépendent que de φ.

Dém. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base $\varphi-$orthogonale et supposons que

$$q(f_i) = \begin{cases} > 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant s \\ < 0 & \text{si } s+1 \leqslant i \leqslant s+t \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons,

$$e_i = \begin{cases} \dfrac{f_i}{\sqrt{q(f_i)}} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant s \\ \dfrac{f_i}{\sqrt{-q(f_i)}} & \text{si } s+1 \leqslant i \leqslant s+t \\ f_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ satisfait la condition de l'énoncé.

Soit maintenant $(e'_1, \ldots, e'_{s'}, e'_{s'+1}, \ldots, e'_{s'+t'}, e'_{s'+t'+1}, \ldots, e'_n)$ une autre base satisfaisant la même condition. Posons $E_+ =< e_1, \ldots, e_s >$. Si $u \in E_+ \cap < e'_{s'+1}, \ldots, e'_n >$ alors $q(u) = 0$. Comme $q_{|E_+} > 0$, $u = 0$. Par suite, $s + (n - s') \leqslant n$ *i.e.* $s \leqslant s'$. En inversant le rôle de s et s' on voit que $s = s'$. De même avec t et t' en considérant $-\varphi$.

Définition 2.2.6 La *signature* de q est $\sigma(q) = (s, t)$.

Remarque 2.2.5

1. La famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une « base de Sylvester » ssi

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \Rightarrow q(u) = \sum_{i=1}^{s} u_i^2 - \sum_{i=s+1}^{s+t} u_i^2.$$

2. L'entier s (resp. t) est la dimension maximale d'un sev sur lequel $q > 0$ (resp. $q < 0$). En effet, si E'_+ est un tel sev alors $E'_+ \cap < e_{s+1}, \ldots, e_n >= \{0\}$ donc $\dim E'_+ + n - s \leqslant n$ *i.e.* $\dim E'_+ \leqslant s$.

3. Montrons que si I sev alors $I = \ker q$. On a $E = E_+ \overset{\perp}{\oplus} E_- \overset{\perp}{\oplus} E_0$ où $E_0 = \ker q$, et $I = E_0 \oplus I'$. Soit $u' \in I'$. Alors $u' = u'_+ + u'_-$. Comme $\varphi(u'_+, u'_-) = 0$, on obtient $q(u') = 0 = q(u'_+) + q(u'_-)$. D'où $q(u'_+ - u'_-) = 0$. Mais alors $u'_+, u'_- \in I$. Donc $q(u'_+) = q(u'_-) = 0$ et $u'_+ = u'_- = 0$. (*Résultat vrai aussi dans $\mathbb{C}$ en adaptant la preuve.*)

Proposition 2.2.5 Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. C.S.S.E. :
- q est non dégénérée
- q est de rang n
- q admet (exactement) n valeurs non nulles sur la diagonale dans une base orthogonale
- la signature de q est $\sigma = (s, t)$ avec $s + t = n$.

Exemple 2.2.1

1. $q(u) = \|u\|_2^2$; $I = \{0\}$; q non dégénérée ; $\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ (où (u_i) (resp. (v_i)) désigne les composantes de u (resp v dans la base canonique) ; rg $(q) = n$; $\sigma = (n, 0)$.
2. Sur $\mathbb{R}^2$:

(a) $q(u)=x^2-y^2$; $I=<(1,1)>\cup<(1,-1)>$; $rg(q)=2$; $\sigma=(1,1)$,

(b) $q(u)=-x^2$; $\ker q=<(0,1)>=I$; $rg(q)=1$; $\sigma=(0,1)$,

(c) $q(u)=q(x,y)=xy=\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=x'^2-y'^2=q(x',y')$; autrement dit, si $(x',y')=(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2})$ *i.e.* $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ alors $P=Q^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ et $A'={}^tP\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; $I=<(0,1)>\cup<(1,0)>$; $rg(q)=2$; $\sigma=(1,1)$.

(d) Métrique de Lorentz : $q(u)=x^2+y^2+z^2-(ct)^2$.

2.2.2 Méthode de Gauss

On va réduire une forme quadratique $q=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}x_i^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_{ij}x_ix_j$ à l'aide de la *méthode de Gauss*, en faisant chuter le nombre de variables de manière itérative. On pose $q_1=q$.

Deux cas se présentent :

- il existe $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $\alpha_{ii}\neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $i=1$; on écrit le début d'un carré :

$$\begin{aligned}q_1(u) &= \alpha_{11}(x_1^2+x_1l(x_2,\dots,x_n))+q'(x_2,\dots,x_n) \text{ où } l \text{ est une forme linéaire}\\ &= \alpha_{11}(x_1+\frac{l}{2})^2+q'-\alpha_{11}\frac{l^2}{4}.\end{aligned}$$

  Puis on recommence avec $q_2(x_2,\dots,x_n)=q'(x_2,\dots,x_n)-\alpha_{11}\dfrac{l(x_2,\dots,x_n)^2}{4}$.

- pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$: $\alpha_{ii}=0$; alors il existe $i,j\in\{1,\dots,n\},i\neq j$: $\alpha_{ij}\neq 0$ (sinon $q=0$) ; on peut supposer $\alpha_{12}\neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}q_1(u) &= \alpha_{12}(x_1x_2+x_1l_1(x_3,\dots,x_n)+x_2l_2(x_3,\dots,x_n))+q'(x_3,\dots,x_n)\\ &= \alpha_{12}(x_1+l_2)(x_2+l_1)+q'-\alpha_{12}l_1l_2\\ &= \alpha_{12}\frac{(x_1+l_2+x_2+l_1)^2-(x_1+l_2-x_2-l_1)^2}{4}+q'-\alpha_{12}l_1l_2.\end{aligned}$$

  On recommence avec $q_2(x_3,\dots,x_n)=q'(x_3,\dots,x_n)-\alpha_{12}l_1(x_3,\dots,x_n)l_2(x_3,\dots,x_n)$.

On a ainsi écrit q comme somme (ou différence) de carrés d'au plus n formes linéaires indépendantes.

Exemple 2.2.2 On considère $q(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_3^2+x_1x_3$.

1. $q(x_1,x_2,x_3)=(x_3+\frac{x_1}{2})^2-\frac{x_1^2}{4}+x_1x_2=(x_3+\frac{x_1}{2})^2-\frac{1}{4}(x_1-2x_2)^2+x_2^2$.
2. $$\begin{aligned}q(x_1,x_2,x_3) &= x_1x_2+x_1x_3+x_20+x_3^2=(x_1+0)(x_2+x_3)-0x_3+x_3^2\\ &= \frac{(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1-x_2-x_3)^2}{4}+x_3^2.\end{aligned}$$
3. $\sigma(q)=(2,1)$.
4. *mat* q, rang, noyau, cone isotrope

2.2.3 Un critère numérique de signe

Corollaire 2.2.3 (du théorème d'inertie de Sylvester) Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Alors :

1. pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$: $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{k1} & & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow q$ définie positive.
2. pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$: $(-1)^k \Delta_k = (-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{k1} & & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow q$ définie négative.

Dém. Notons φ la forme polaire de q. On va démontrer le cas > 0 (si $\varphi < 0$ alors $-\varphi > 0$).
($\Rightarrow$) on raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$ alors le résultat est facile. Sinon, soit A la matrice de φ dans $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$. Comme $\varphi_{|<e_1,\dots,e_{n-1}>}$ est symétrique, on peut, d'après l'hypothèse de récurrence, supposer que $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre φ-orthogonale qui diagonalise $\varphi_{|<e_1,\dots,e_{n-1}>}$. De plus, $a_{ii} = q(e_i) > 0$ donc on peut aussi supposer $a_{ii} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Ainsi

$$A = mat_{(e_1,\dots,e_n)}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2n} \\ 0 & \vdots & & 1 & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En posant $e'_n = e_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} e_i$, on obtient une matrice diagonale $D = mat_{(e_1,\dots,e_{n-1},e'_n)}(\varphi) = {}^tPAP$ avec $P = mat(id_{\mathbb{R}^n}, (e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n), (e_1, \dots, e_n))$. Or $\det(D) = \det(P)^2 \det(A)$ donc $a'_{nn} > 0$. Cela signifie que φ est définie positive sur $\mathbb{R}^n$ (car $(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n)$ est une base φ-orthogonale).
($\Leftarrow$) Comme $\varphi > 0$, pour tout sev non trivial $V \hookrightarrow \mathbb{R}^n$: $\varphi_{|V} > 0$. Dès lors, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$: $\Delta_k > 0$.

Remarque 2.2.6

1. q non dégénérée $\Leftrightarrow \Delta_n \neq 0$.
2. q définie $\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}$: $\Delta_k \neq 0$.

2.2.4 Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique

Définition 2.2.7 Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire. L'endomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est *symétrique* si $\forall u, v \in \mathbb{R}^n : (f(u)|v) = (u|f(v))$.

Proposition 2.2.6 L'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ est symétrique ssi sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Dém. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot\cdot)$. On a $f(e_j) = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}e_l$. Donc $a_{ij} = (f(e_j)|e_i)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} f \text{ symétrique } &\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots n\} : (f(e_j)|e_i) = (f(e_i)|e_j) \\ &\Leftrightarrow \forall i,j \in \{1,\dots n\} : a_{ij} = a_{ji} \\ &\Leftrightarrow mat(f,\mathcal{B}) \text{ symétrique.} \end{aligned}$$

Proposition 2.2.7 Un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

Dém. On raisonne par récurrence sur $\dim(\mathbb{R}^n)$. Si $n = 1$ alors c'est immédiat.

On admet qu'un endomorphisme symétrique admet un valeur propre réelle.

Soient $\lambda \in Sp(f) \cap \mathbb{R}$ et $E_\lambda = \ker(f - \lambda id_{\mathbb{R}^n})$; on peut supposer $E_\lambda = < e_1^\lambda, \dots, e_{n_\lambda}^\lambda >$ avec $(e_i^\lambda)_{1\leqslant i\leqslant n_\lambda}$ orthonormée. Posons $G = E_\lambda^\perp$. Comme $(\cdot|\cdot\cdot)$ est non dégénéré, $\mathbb{R}^n = E_\lambda \overset{\perp}{\oplus} G$ et $\dim G = n - \dim E_\lambda < n$. De plus, soient $u \in E_\lambda$ et $v \in G$. Alors $(f(v)|u) = (v|f(u)) = \lambda(v|u) = 0$. Ainsi, tout vecteur de $f(G)$ est orthogonal à E_λ et G est stable par f. Comme $f_{|G} : G \to G$ est encore symétrique, on termine par récurence sur $\dim G$. (*En particulier,* $n_\lambda = m_\lambda$.)

Corollaire 2.2.4 Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme symétrique sont 2 à 2 orthogonaux.

2.2.5 Classification des coniques (dans le plan euclidien)

Définition 2.2.8 Une *conique* $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ est une courbe du plan définie par une équation (implicite) polynomiale de degré 2

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : G(x,y) = 0\}$$

avec

$$G(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f.$$

But : décrire l'ensemble des coniques et les classifier.

On considère la forme quadratique $q(u) = q(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$ que l'on suppose $\neq 0$.

- $M = mat_{\mathcal{C}_2}(q) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ (par hypothèse $M \neq 0$).
- Il existe une base $(\cdot|\cdot\cdot)-$orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $M' = mat_{\mathcal{B}'}(q)$ soit diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \neq 0$ ou bien $\lambda_2 \neq 0$. Notons $P = mat(id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}', \mathcal{C}_2)$. On a notamment,

$$P^{-1} = {}^tP \ (P \text{ est } \textit{orthogonale})$$

et

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = PX'.$$

– Dans la base $\mathcal{B}'$, la forme quadratique q s'écrit

$$q(u) = q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

donc, dans le repère orthonormé (O, e_1', e_2')

$$\mathcal{C} = \{(x', y') : \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0\}.$$

1. M inversible (*i.e.* $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ ou encore $\Delta = ab - c^2 \neq 0$)

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 (x' + \frac{d'}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2 (y' + \frac{e'}{2\lambda_2})^2 + f'' = 0$$

Translatons l'origine du repère (O, e_1', e_2') en $O''(-\frac{d'}{2\lambda_1}, -\frac{e'}{2\lambda_2})$:

$$\begin{cases} x'' &= x' + \frac{d'}{2\lambda_1} \\ y'' &= y' + \frac{e'}{2\lambda_2} \end{cases}$$

on obtient :

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = -f''.$$

(a) $f'' = 0$

i. $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ (($q > 0$ *i.e.* $\Delta > 0$ et $a > 0$) ou ($q < 0$ *i.e.* $\Delta > 0$ et $a < 0$)) : $\mathcal{C} = \{O''\}$ *i.e.* $\mathcal{C}$ est (réduit à) un point.

ii. $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ (q non dégénéré non défini *i.e.* $\Delta < 0$) : $\mathcal{C} = \{(\sqrt{|\lambda_2|} y'' - \sqrt{|\lambda_1|} x'')(\sqrt{|\lambda_2|} y'' + \sqrt{|\lambda_1|} x'') = 0\}$ (dans le repère (O'', e_1', e_2')) *i.e.* $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites.

(b) $f'' \neq 0$: posons $\lambda_1' = \frac{\lambda_1}{-f''}$ et $\lambda_2' = \frac{\lambda_2}{-f''}$ *i.e.*

$$\lambda_1' x''^2 + \lambda_2' y''^2 = 1.$$

i. $\lambda_1' < 0$ et $\lambda_2' < 0$: $\mathcal{C} = \varnothing$

ii. $\lambda_1' > 0$ et $\lambda_2' > 0$: $\mathcal{C} = \{(\frac{x''}{a})^2 + (\frac{y''}{b})^2 = 1\}$ *ellipse*

iii. $\lambda_1' \lambda_2' < 0$: $\mathcal{C} = \{(\frac{x''}{a})^2 - (\frac{y''}{b})^2 = 1\}$ ou $\mathcal{C} = \{-(\frac{x''}{a})^2 + (\frac{y''}{b})^2 = 1\}$ *hyperbole*

2. M non inversible *i.e.* $\lambda_1 = 0$ ou bien $\lambda_2 = 0$ (q dégénéré *i.e.* $\Delta = 0$). Sans perte de généralité, on peut supposer $\lambda_1 \neq 0$.

$$\lambda_1 x''^2 + e'y'' = -f''$$

(avec $x'' = x' + \frac{d'}{2\lambda_1}, y'' = y'$).

(a) $e' = 0$:

i. $-\frac{f''}{\lambda_1} < 0$: $\mathcal{C} = \varnothing$.

ii. $-\dfrac{f''}{\lambda_1} \geqslant 0 : x'' = \pm\sqrt{-\dfrac{f''}{\lambda_1}}$ *droite(s) verticale(s) (double si* $f'' = 0$*)*

(b) $e' \neq 0 : y'' = -\dfrac{\lambda_1 x''^2 + f''}{e'}$ *parabole*

Remarque 2.2.7 Les coniques doivent leur appellation à leur production par intersection d'un cône avec un plan. On trouvera :

1. une parabole de forme normale $y = x^2$
2. une hyperbole " " " $x^2 - y^2 = \pm 1$
3. une ellipse " " " $(\dfrac{x}{a})^2 + (\dfrac{y}{b})^2 = 1$
4. une (ou deux) droites (concourrantes ($x^2 - y^2 = 0$), parallèles ($x^2 = 1$) ou double ($x^2 = 0$))
5. un point " " " $x^2 + y^2 = 0$ ou le vide (forme dégénérée)

Exemple 2.2.3 $G(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y + 1$. On obtient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Sp(q) = \{0, \sqrt{2}\}$ et $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. D'où $\tilde{G}(x', y') = 2y'^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + 3y') + 1 = 2(y' + \dfrac{3}{2\sqrt{2}})^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + \dfrac{7\sqrt{2}}{16}) = 0$. Finalement, en posant $x'' = x' + \dfrac{7\sqrt{2}}{16}$ et $y'' = y' + \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, on obtient : $x'' = -2\sqrt{2}y''^2$.

3 Fonctions de plusieurs variables

3.1 L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$

3.1.1 Norme et boule sur $\mathbb{R}^2$

L'analyse exige souvent de *quantifier* la proximité des points, autrement dit de *mesurer* la distance entre deux points. Dans le cas d'un espace vectoriel tel que $\mathbb{R}^2$, on a une notion sensiblement plus forte.

Définition 3.1.1 Une *norme* sur $\mathbb{R}^2$ est une application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que :

1. pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (*séparation*),
2. pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ (*positive-homogénéité*),
3. pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (*1ère inégalité triangulaire*).

On désigne souvent une norme par $\|\cdot\|$, $|||\cdot|||$ voire $|\cdot|$ (si aucune confusion n'est possible), ou encore N.

Exemple 3.1.1 dans $\mathbb{R}^2$:

1. $\|u\|_2 = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ (norme euclidienne) ; cette norme provient du produit scalaire euclidien (forme bilinéaire symétrique définie positive) sur $\mathbb{R}^2$: $(u|u') = ((x, y)|(x', y')) = xx' + yy'$ et $\|u\|_2^2 = (u|u)$. En particulier, les inégalités de Cauchy-Schwartz :
$$|(u|u')| \leqslant \|u\|_2\|u'\|_2$$
et de Minkowski :
$$(u + u'|u + u') \leqslant (\|u\|_2 + \|u'\|_2)^2$$
sont satisfaites. On a : $\|(1, 2)\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.
2. $\|u\|_1 = |x| + |y|$. On a : $\|(1, 2)\|_1 = |1| + |2| = 3$.
3. $\|u\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. On a : $\|(1, 2)\|_\infty = 2$.

Proposition 3.1.1 (*2nde inégalité triangulaire*) Pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$,
$$\Big|\|u\| - \|v\|\Big| \leqslant \|u - v\|.$$

Définition 3.1.2 La norme N_1 (sur $\mathbb{R}^2$) est *équivalente* à N_2 si il existe $a > 0$ et $A > 0$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,
$$aN_1(u) \leqslant N_2(u) \leqslant AN_1(u).$$

Théorème 3.1.1 Toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

Le théorème 3.1.1 signifie que le choix d'une norme sur $\mathbb{R}^2$ importe peu : une propriété de caractère topologique sur $\mathbb{R}^2$ ou de nature différentielle (pour une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$) satisfaite par $\|\cdot\|_1$ sera conservée pour $\|\cdot\|_2$ et réciproquement.
Sauf indication contraire, on raisonnera avec la norme euclidienne.

Exemple 3.1.2

1. $\|\cdot\|_\infty \leqslant \|\cdot\|_1 \leqslant 2\|\cdot\|_\infty$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_1$.
3. L'équivalence de normes est une « *relation d'équivalence* ».

Définition 3.1.3 La *boule ouverte* (resp. *fermée*) de *centre* p_0 ($\in \mathbb{R}^2$) et de *rayon* r ($\in \mathbb{R}_+$) est le sous-ensemble

$$B(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_0\| < r\}$$

(resp.

$$B'(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_0\| \leqslant r\}).$$

La *sphère* de centre p_0 et de rayon r est l'ensemble :

$$S(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_0\| = r\}.$$

Autrement dit, $S(p_0, r)$ est la *frontière* de $B(p_0, r)$.

Exemple 3.1.3 Dans $\mathbb{R}^2$:

1. $B_2(0,r) = \begin{cases} D(0,r) & \text{si } r > 0 \\ \varnothing & \text{si } r = 0 \end{cases}$; $B'_2(0,r) = \begin{cases} D'(0,r) & \text{si } r > 0 \\ \{0\} & \text{si } r = 0 \end{cases}$;
   $S_2(0,r) = \begin{cases} C(0,r) & \text{si } r > 0 \\ \{0\} & \text{si } r = 0 \end{cases}$.
2. $B_\infty(0,r) = \begin{cases}]-r,r[^2 & \text{si } r > 0 \\ \varnothing & \text{si } r = 0 \end{cases}$; $B'_\infty(0,r) = \begin{cases} [-r,r]^2 & \text{si } r > 0 \\ \{0\} & \text{si } r = 0 \end{cases}$;
   $S_\infty(0,r) = \begin{cases} ([-r,r] \times \{\pm r\}) \cup (\{\pm r\} \times [-r,r]) & \text{si } r > 0 \\ \{0\} & \text{si } r = 0 \end{cases}$.
3. $B_1(0,1) = Rot_{(0,\pi/4)}(B_\infty(0, \frac{\sqrt{2}}{2}))$; $B'_1(0,1) = Rot_{(0,\pi/4)}(B'_\infty(0, \frac{\sqrt{2}}{2}))$;
   $S_1(0,1) = Rot_{(0,\pi/4)}(S_\infty(0, \frac{\sqrt{2}}{2}))$.
4. $B'(p_0, r) = B(p_0, r) \sqcup S(p_0, r)$.
5. $B(p_0, r) = t_{p_0} \circ h_r(B(0,1))$.
6. **Exercice :** Représenter ces ensembles.

3.1.2 Partie ouverte, fermée, adhérence, partie compacte

Définition 3.1.4 Un *voisinage* de p est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ contenant une boule ouverte $B(p,r)$ où $r > 0$. On note $\mathcal{V}(p)$ l'ensemble des voisinages de p.

On adopte volontiers la notion de voisinage, en évitant ainsi de décrire explicitement une boule ouverte (essentiellement son rayon), pour indiquer la nature locale de la propriété considérée.

Exemple 3.1.4

1. Une boule ouverte (ou fermée) de rayon $r > 0$ est un voisinage de son centre. En fait, une boule ouverte est un voisinage de chacun de ses points. Ce n'est pas le cas pour une boule fermée (considérer les points sur la sphère).
2. L'espace total $\mathbb{R}^2$ est un voisinage de l'un quelconque de ses points.

Définition 3.1.5 Une partie U est *ouverte* si pour tout $p \in U$, il existe un voisinage V de p contenu dans U.

Autrement dit, une partie U est ouverte (s)si pour chacun de ses point p, il existe une boule ouverte centrée en p et de rayon $r > 0$, entièrement contenue dans U.

Exemple 3.1.5

1. Une boule ouverte et l'espace tout entier $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts.
2. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont ouverts.
3. Une réunion d'ouverts est un ouvert. Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

Définition 3.1.6 Le complémentaire d'une partie ouverte est une partie *fermée*.

Exemple 3.1.6

1. Une boule fermée est un fermé.
2. Une intersection de fermés est fermée.
3. On a : $S(p_0, r) = B'(p_0, r) \cap (B(p_0, r))^c$, donc $S(p_0, r)$ est fermé.
4. Une réunion **finie** de fermés est fermée.
5. Un ensemble réduit à un point (*singleton*) dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ est fermé.

Définition 3.1.7 Une suite de points $(p_n) = ((x_n, y_n))$ *converge* vers (a, b)

$$\begin{array}{rl} \text{si} & ||(x_n, y_n) - (a, b)|| = ||(x_n - a, y_n - b)|| \to 0 \\ \text{ssi} & x_n \to a \textbf{ et } y_n \to b. \end{array}$$

Exemple 3.1.7 La suite $(\ln(1 + \frac{1}{n}), (1 + \frac{1}{n^2})^{n \ln n + \sin n})$ converge vers $(0, 1)$.

Proposition 3.1.2 (Critère séquentiel de fermeture) Une partie A (de $\mathbb{R}^2$) est fermée ssi pour toute suite de points de A, qui converge vers l dans $\mathbb{R}^2$, on a $l \in A$.

Définition 3.1.8 Un point l de $\mathbb{R}^2$ est *adhérent* à A si il existe une suite de points de A qui converge vers l ; l'*adhérence* $\bar{A}$ est l'ensemble des points adhérents à A.

Exemple 3.1.8

1. L'adhérence de $B(0, 1)$ est $B'(0, 1)$ *i.e.* $\overline{B(0, 1)} = B'(0, 1)$.
2. On a : $0 \in \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}}$; plus précisément, $\overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$. En effet, il est clair que $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \overline{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}}$. D'autre part, soit (x_n) une suite à valeurs $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ convergente dans $\mathbb{R}$ vers a. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \geqslant 0$, on obtient $a \geqslant 0$. Distinguons 2 cas :
   - $(\exists \epsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_n \geqslant \epsilon$: donc, (x_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs (au plus $E(\frac{1}{\epsilon})$). La suite est stationnaire et $(\exists P \in \mathbb{N}^*)(\exists n_0 \in \mathbb{N}^*)(\forall n \geqslant n_0) : x_n = x_P = a > 0$.
   - (x_n) est minorée par aucun $\epsilon > 0$ et $a = 0$.

Remarque 3.1.1

1. L'adhérence d'une partie est fermée.
2. L'adhérence d'une partie A est le plus **petit** fermé contenant A.

Proposition 3.1.3 Une partie F est fermée ssi $F = \bar{F}$.

Remarque 3.1.2 Une partie $U \subseteq A$ (resp. $F \subseteq A$) est *ouverte* (resp. *fermée*) *dans* A si U (resp. F) est l'intersection d'une partie ouverte (resp. fermée) de $\mathbb{R}^2$ avec A.

Définition 3.1.9 Une partie de $\mathbb{R}^2$ est *compacte* si elle est fermée et *bornée* (*i.e.* incluse dans une boule de rayon fini).

Exemple 3.1.9 Dans $\mathbb{R}^2$:

1. Une boule fermée, une sphère et un pavé fermé sont compacts.
2. Une intersection de parties compactes est compacte.
3. Une réunion **finie** de *compacts* est compacte.
4. L'adhérence de (l'ensemble de) la suite dans l'exemple 3.1.8 est compacte.

Théorème 3.1.2 (Bolzano-Weierstrass) Pour qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}^2$ soit compacte il faut et il suffit que de toute suite de points à valeurs dans A, on puisse extraire une sous-suite convergeant dans A.

Définition 3.1.10 Un point p est *intérieur* à une partie A si il existe un voisinage V de p entièrement contenu dans A ; l'*intérieur* de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.

Remarque 3.1.3

1. L'intérieur d'une partie est le plus **grand** ouvert contenu dans cette partie.
2. $A = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A$ ouvert.

Exemple 3.1.10

1. $\overset{\circ}{B'}(p_0, r) = B(p_0, r)$ si $r > 0$.
2. $\overset{\circ}{\overbrace{\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}}} = \varnothing$.

3.2 Exemples de fonctions de plusieurs variables

Les fonctions de plusieurs variables interviennent de manière naturelle dans des contextes variés et tout à fait ordinaires. Commençons par quelques exemples.

– Aire (algébrique) d'un rectangle :

$$S : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array}$$

– Volume d'un parallélépipède rectangle et du cylindre :

$$V : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & xyz \end{array} \text{ et } V : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\rho,h) & \mapsto & \pi\rho^2 h \end{array}$$

– Energies potentielle et cinétique d'un point matériel en mécanique newtonienne :

$$E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (m,v,z) & \mapsto & (\frac{1}{2}mv^2, mgz) \end{array}$$

– Intérêts cummulés, s solde en $t=0$, c taux d'intérêt :

$$\begin{array}{rcl} I : \mathbb{R}_+^3 & \to & \mathbb{R} \\ (s,c,t) & \mapsto & s(1+c)^t \end{array}$$

– Coordonnées sphériques :

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}_+ \times [-\pi,\pi[\times[0,\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\rho,\theta,\phi) & \mapsto & (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi) \end{array}$$

3.3 Graphe d'une application et courbe de niveau

En basses dimensions (1, 2 ou 3), une représentation graphique participe à l'étude (géométrique ou non) d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Définition 3.3.1 Le *graphe* d'une application $f : U \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(p, f(p)) : p \in U\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Remarque 3.3.1 la définition 3.3.1 étend simplement la notion de *graphe représentatif* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exemple 3.3.1

1. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$; $f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
2. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p \mapsto x^2$ (*paraboloïde cylindique de directrice* $z = x^2$ *et de génératrice* $0y$)
   $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p \mapsto x^2 + y^2$ (*paraboloïde elliptique (même circulaire ici)*)
   $f_5 : B'(0,1) \to \mathbb{R},\ p \mapsto \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ (*hémisphère supérieur*).

Lorsque l'on s'intéresse à la représentation graphique, on est cependant vite limité par la dimension...

Au lieu de chercher à dessiner *directement* le graphe d'une fonction (qui peut déjà être singulièrement compliqué dès que f est définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$), on peut considérer l'intersection du graphe avec des niveaux horizontaux $\{y = c\}$ (ou $\{z = c\}$). C'est en « empilant » de telles coupes, que l'on parvient à reconstituer $\mathrm{Graph}(f)$, à l'instar d'une tomographie.

Définition 3.3.2 Une *courbe de niveau* c ($\in \mathbb{R}$) de $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^2$) est l'ensemble $I^c = \{p \in U : f(p) = c\} = f^{-1}(\{c\})$.

Remarque 3.3.2

1. La « courbe » I^c n'est pas nécessairement lisse : elle peut posséder des points doubles (ou multiples) ou singuliers.
2. Suivant les valeurs de c, I^c peut être dégénéré (par ex. réduite à un point), voire vide.
3. On généralise la notion de courbes de niveau aux dimensions supérieures : on parle ainsi d'*hypersurface de niveau* « tracée » dans $\mathbb{R}^n$.
4. On recourt quelquefois à déterminer la trace de la surface avec les plans parallèles aux plans de coordonnées (pas uniquement Oxy) lorsque la situation s'aggrave ; cela peut arriver.

Exemple 3.3.2

1. $I_1^c = \begin{cases} \varnothing & \text{si } c < 0 \\ \{0\} & \text{si } c = 0 \\ \{\pm\sqrt{c}\} & \text{si } c > 0 \end{cases}$; $I_2^c = \begin{cases} \{\frac{1}{c}\} & \text{si } c \neq 0 \\ \varnothing & \text{si } c = 0 \end{cases}$.

2. $I_3^c = \begin{cases} \varnothing & \text{si } c < 0 \\ \{x = 0\} & \text{si } c = 0 \\ \{x = \pm\sqrt{c}\} & \text{si } c > 0 \end{cases}$; $I_4^c = \begin{cases} \varnothing & \text{si } c < 0 \\ \{(0,0)\} & \text{si } c = 0 \\ \mathcal{C}(0, \sqrt{c}) & \text{si } c > 0 \end{cases}$;

   $I_5^c = \begin{cases} \varnothing & \text{si } c < 0 \text{ ou } c > 1 \\ \mathcal{C}(0, \sqrt{1-c^2}) & \text{si } 0 \leqslant c < 1 \\ \{(0,0)\} & \text{si } c = 1 \end{cases}$.

3. $\begin{array}{rccc} f_6 : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & ||(x,y,z)||_2^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{array}$; $I_6^c = \begin{cases} \varnothing & \text{si } c < 0 \\ \{(0,0,0)\} & \text{si } c = 0 \\ S(0, \sqrt{c}) & \text{si } c > 0 \end{cases}$.

3.4 Continuité

Définition 3.4.1 (*en dimension* 3) Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Les (3) *applications partielles* déduites de f sont :
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x,b,c)$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto f(a,y,c)$
- $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto f(a,b,z)$

Remarque 3.4.1 Ces applications jouent un role fondamental dans l'étude d'une application de plusieurs variables (car elles permettent de réduire la dimension de la source) mais elles ne suffisent pas !

Définition 3.4.2 Une application $f : A \to \mathbb{R}$ est *continue* en $p_0 \in A$ si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall p \in A : \|p - p_0\| < \delta) : |f(p) - f(p_0)| < \epsilon.$$

L'application f est *continue sur* A si elle est continue en tout $p_0 \in A$.

Proposition 3.4.1 (Continuité séquentielle) Une application f est continue en $p \in A$ ssi pour toute suite (p_n) de points de A convergeant vers $p \in A$, $(f(p_n))$ converge vers $f(p)$.

En particulier, la proposition 3.4.1 assure :

$$f \text{ continue en } p_0 \Leftrightarrow \lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$$

Remarque 3.4.2 Compte-tenu de la définition de la convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^n$, une application $g = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (par exemple) est continue si et seulement si g_i est continue pour $i \in \{1,2,3\}$.

Exemple 3.4.1

1. Les résultats généraux en une variable restent valables (fonction polynômiale, somme, produit, quotient, composition... sont continues) mais...
2. (a) Il faut se garder d'adopter les mêmes réflexes que dans $\mathbb{R}$. Compte-tenu des dimensions, il existe de nombreuses « directions tendant » vers p.

(b) En effet, *pièges* :

i. $f_7(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f_7(0,0) = 0$;

ii. $f_8(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f_8(0,0) = 0$ (en particulier $val\ N > val\ D \not\Rightarrow C^0$).

iii. $\tilde{f}_8(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $\tilde{f}_8(0,0) = 0$.

3. En particulier, les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, + : (x,y) \mapsto x+y$ (*linéaire*) et $\times : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy$ (*bilinéaire*) sont continues.
4. $(x,y) \mapsto e^{\sin(x+\ln(1+|y|))}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ ($f = \exp \circ \sin \circ + (\pi_1, \ln(1+|\cdot|) \circ \pi_2)$).

Définition 3.4.3 L'application $f : A \to \mathbb{R}^m$ est *lipschitzienne* de rapport $K \geqslant 0$ si pour tout $p, q \in A$: $\|f(p) - f(q)\| \leqslant K\|p-q\|$.

Proposition 3.4.2 Une application lipschitzienne est continue.

Mentionnons aussi le critère suivant (utile notamment pour vérifier la fermeture ou l'ouverture de certaines parties de $\mathbb{R}^2$) :

Proposition 3.4.3 (Image réciproque d'un ouvert (resp. fermé)) L'image réciproque d'une partie ouverte (resp. fermée) quelconque de $\mathbb{R}$ par une application $f : U \to \mathbb{R}$ est ouverte (resp. fermée) dans U si et seulement si f est continue.

Exemple 3.4.2

1. $f_1^{-1}(]-10^{-10000}, 1[) =]-1,1[$ ouvert ; $f_1^{-1}(1) = \{\pm 1\}$ fermé.
2. $f_6^{-1}([0,1[) = B(0,1)$ ouvert ; $f_6^{-1}(1) = S^2(0,1)$ fermé.

Enfin, rappelons le théorème de Weierstrass qui confère aux fonctions continues un comportement contrôlé sur les parties compactes.

Théorème 3.4.1 (Weierstrass) Soit $A \subset U$, A compact (*i.e.* fermé et borné) dans $\mathbb{R}^2$. Si f est continue sur A alors f est bornée et atteint ses bornes.

Dém. On va le démontrer pour la borne inférieure. Soit $(p_n) \subseteq A$ une suite *minimisante* (*i.e.* $f(p_n)$ converge vers $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Comme (p_n) est à valeurs dans A compact, il existe une sous-suite (p_{n_k}) convergente vers p dans A. Dés lors, $f(p_{n_k}) \to f(p) = m \in \mathbb{R}$.

Interprétation : notons $m = \inf f(A) \in \mathbb{R}$ (*i.e.* $> -\infty$) et $M = \sup f(A) \in \mathbb{R}$ (*i.e.* $< +\infty$). Alors il existe $p_{min}, p_{max} \in A$ tels que $f(p_{min}) = m$ et $f(p_{max}) = M$.

Exemple 3.4.3 Soit $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la première projection définie par $\pi_1(x,y) = x$. Alors $\pi_1(B'(0,1)) = [-1,1]$; $\pi_1(\pm 1, 0) = \pm 1$.

Proposition 3.4.4 (Application du th. de Weierstrass) Si q est une forme quadratique définie positive (resp. négative) alors il existe $a, A > 0$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$: $a\|u\|_2^2 \leqslant q(u) \leqslant A\|u\|_2^2$ (resp. $a\|u\|_2^2 \leqslant -q(u) \leqslant A\|u\|_2^2$).

Dém. On suppose q définie positive. L'application $u \mapsto q(u)$ est continue sur la sphère unité compacte de $\mathbb{R}^2$. Il existe donc $a > 0, A > 0$ tels que pour tout $u \in S^1$: $a \leqslant q(u) \leqslant A$. Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$: $a\|u\|_2^2 \leqslant q(u) \leqslant A\|u\|_2^2$.

3.5 Différentiabilité et gradient

L'estimation des variations d'une fonction requiert souvent d'en connaître les propriétés locales. Bien que la situation ne l'exige pas toujours, on s'intéressera principalement ici, à une classe particulière d'applications, suffisamment régulières : la classe des applications qui sont localement semblables à une application affine (car on connait assez bien ces dernières).

Dans cette partie, on supposera que U est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Définition 3.5.1 Soient $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ et $p \in U$. L'application f est *différentiable* en p si il existe $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que

$$f(p+u) = f(p) + L(u) + o(u)$$

avec $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{o(u)}{\|u\|} = 0$.

L'*application linéaire* L (qui est **unique**) est la *différentielle* de f **en** p ; on note $df(p) = L$ (et donc $df(p).u = L(u)$ pour $u \in \mathbb{R}^n$). La définition s'étend naturellement à $f : U \to \mathbb{R}^p$.

Pour que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ soit différentiable en (x, y) il faut et il suffit que $f(x+h, y+k) = f(x, y) + ah + bk + o(h, k)$.

Remarque 3.5.1

1. Compte-tenu du caractère local de la définition précédente, il faut entendre :
   (a) « pour tout u suffisamment petit », sinon $p+u$ peut très bien ne pas appartenir à U !
   (b) la condition $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{o(u)}{\|u\|} = 0$ signifie :
   $$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall u \in \mathbb{R}^n - \{0\} : \|u\| < \delta) : \frac{|o(u)|}{\|u\|} < \epsilon.$$
   (Ici, $o(u) = f(p+u) - f(p) - L(u)$. On note aussi $o(u) = \|u\|\epsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u \to 0} \epsilon(u) = 0$.)
2. L'application linéaire $df(p) = L$ dépend de p (et de f) mais pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.5.1

1. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en p_0 alors $f(p_0 + u) = f(p_0) + f'(p_0).u + o(u)$ et $f'(p_0)$ s'identifie au *nombre dérivé* usuel.
2. Si $f : E \to F$ est linéaire alors $f(p_0 + u) = f(p_0) + f(u)$ donc $df(p_0).u = f(u)$ et $o(u) = 0$.
3. Si $f_9(x, y) = x + y$ alors $df_9(p).u = df_9(x, y).(h, k) = f_9(h, k) = h + k$.
4. Si $f_{10}(x, y) = xy$ alors $f_{10}(p+u) = f_{10}(x+h, y+k) = (x+h)(y+k) = xy+xk+yh+hk$. Or $\dfrac{|hk|}{\|(h, k)\|_2} \leq \dfrac{1}{2}\|(h, k)\|_2$. Donc $df_{10}(p).u = xk + yh$.

5. Les résultats généraux restent valables (fonction polynômiale, somme, produit, quotient... sont différentiables). En particulier, la différentielle est un opérateur linéaire *i.e.* $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$.
6. L'application f_4 est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $df_4(p).u = 2xh + 2yk$.
7. Une norme n'est **jamais** différentiable en 0.

Définition 3.5.2 Si la limite $\lim_{t \to 0} \dfrac{f(p+tu) - f(p)}{t}$ existe, on l'appelle la *dérivée directionnelle* de f dans la direction u en p et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial u}(p)$.
La *dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p)$ (resp. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)$) est la dérivée directionnelle en p dans la direction $e_1 = i = (1,0)$ (resp. $e_2 = j = (0,1)$).

Une dérivée partielle s'obtient donc en dérivant formellement par rapport à une variable les autres variables étant fixées. C'est aussi la dérivée usuelle de la fonction partielle correspondante.

Exemple 3.5.2

1. $\dfrac{\partial f_9}{\partial x}(p) = 1$; $\dfrac{\partial f_9}{\partial y}(p) = 1$
2. $\dfrac{\partial f_{10}}{\partial x}(p) = y$; $\dfrac{\partial f_{10}}{\partial y}(p) = x$
3. $f_{11}(x,y,z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z^2}$.
4. Coordonnées sphériques !

Proposition 3.5.1 Si f est différentiable en p alors $df(p).u = \dfrac{\partial f}{\partial u}(p)$.

Corollaire 3.5.1 Si f est différentiable en p alors les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(p)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(p)$ existent.

Remarque 3.5.2 La **réciproque est fausse**, *cf* f_7 et proposition 3.5.2 suivante.

Comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, on démontre :

Proposition 3.5.2 Une application différentiable en un point est continue en ce point.

Proposition 3.5.3 Si g est différentiable en p et f différentiable en $g(p)$ alors $f \circ g$ est différentiable en p et

$$d(f \circ g)(p) = df(g(p)) \circ dg(p)$$

(composée d'applications linéaires).

Corollaire 3.5.2 Une application $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en p ssi f_i est différentiable en p pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. De plus $df(p) = (df_1(p), \ldots, df_m(p))$.

Définition 3.5.3 On identifie généralement la différentielle *en un point* de

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

à la *matrice jacobienne en ce point* :

$$Jf := mat(df, \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Lorsque $m = n$, le déterminant de la matrice (*carrée*) jacobienne est le *jacobien*, jf, de f. S'il est non nul en p_0 et si f est C^1 alors f est **localement** inversible en p_0.

Remarque 3.5.3

1. Si $p \in U$ et $u = (h, k)$ alors $df(p).u = \frac{\partial f}{\partial x}(p)h + \frac{\partial f}{\partial y}(p)k$.
2. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alors

$$Jf = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ ou encore, au point } p,\ Jf(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(p) & \frac{\partial f}{\partial y}(p) \end{pmatrix}.$$

3. On a donc $J(f \circ g) = Jf_g Jg$.

Exemple 3.5.3

1. Le jacobien du jeu de coordonnées polaires est ρ.
2. Le jacobien du jeu de coordonnées cartésiennes est 1 et celui du jeu de coordonnées sphériques est $-\rho^2 \sin\varphi$.

Définition 3.5.4 Le *gradient* de f (relativement au produit scalaire euclidien) est le *champ de vecteur* $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ en coordonnées cartésiennes ; si $p \in U$ alors $\nabla f(p) = (\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p))$.

Exemple 3.5.4 Le gradient de f_4 en p est le vecteur $\nabla f_4(p) = 2(x, y)$.

Remarque 3.5.4 On a : $df(p).u = (\nabla f(p)|u)$.

3.5.1 Droite et plan tangents

Si p_0 est fixé alors l'équation $f(p) = f(p_0)$ définit l'hypersurface de niveau $f(p_0)$. En particulier si f est différentiable, on « approxime » l'équation $f(p) - f(p_0) = 0$ par l'équation en $u = p - p_0$, $df(p_0).u = 0$ (en négligeant $o(u)$) qui définit alors la *droite (ou le plan)* **vectoriel(le)** *tangent(e)* en p_0 à la ligne (ou la surface) de niveau $f(p) = f(p_0)$. Autrement dit, la droite (ou le plan) **affine** tangent(e) en $p_0 \in U$ à $f^{-1}(f(p_0)) = \{p \in U : f(p) = f(p_0)\}$ est

$$\{p \in \mathbb{R}^n : df(p_0)(p - p_0) = 0\}.$$

Proposition 3.5.4 Le gradient de f, s'il est non nul, est orthogonal à la ligne de niveau. Autrement dit, $\nabla f(p_0)$ est orthogonal à la droite (ou au plan) tangent(e) en p_0 à la ligne de niveau $\{f = f(p_0)\}$.

Exemple 3.5.5

1. La droite tangente au graphe de f_1 en (x_0, y_0) est donnée par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - y_0 = f_1'(x_0)(x - x_0)\}$; c'est la droite $y = 2x_0(x - x_0) - x_0^2$.
2. Si $g_1(x, y) = f_1(x) - y$ alors $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graph}(f_1) \Leftrightarrow g_1(x_0, y_0) = 0$. Donc la droite tangente en (x_0, y_0) au graphe de f_1 est aussi donnée par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f'(x_0)(x - x_0) - 1.(y - y_0) = 0\}$.
3. Le plan tangent au graphe de f_3 en (x_0, y_0, z_0) est l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x_0(x - x_0) - (z - z_0) = 0\}$.
4. Le plan tangent en (x_0, y_0, z_0) à la surface de niveau $c > 0$ de f_6 est
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0\}$$
avec $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = c$.

Remarque 3.5.5

1. Le gradient de f (s'il est non nul) est dirigé vers les *potentiels croissants* de f. En effet, soit γ une courbe dérivable passant par $0 \in f^{-1}(0)$ en $t = 0$ telle que $\gamma'(0) = u$ avec $u \in S^{n-1}$. Alors, comme $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)).\gamma'(t) = (\nabla f(\gamma(t))|\gamma'(t))$, on obtient :
$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)(t) &= f \circ \gamma(0) + (f \circ \gamma)'(0)t + o(t)\\ &= f(0) + t(\nabla f(\gamma(0))|\gamma'(0)) + o(t)\\ &= t(\nabla f(0)|u) + o(t)\end{aligned}$$
Or, $(\nabla f(0)|u)$ est maximal ssi u est colinéaire à $\nabla f(0)$ et de même sens (voir l'inégalité de Cauchy-Schwartz). On conclut que la croissance de f le long d'un chemin dérivable γ tel que $\gamma'(0) \in S^{n-1}$ est maximale ssi $\gamma'(0) = \dfrac{\nabla f(0)}{|\nabla f(0)|}$.
2. (a) Les opérateurs différentiels tels que divergence, rotationnel et laplacien sont classiquement écrits à l'aide de l'opérateur ∇.
   (b) Le flux d'un champ de vecteurs $\vec{X}$ à travers une surface orientée S est relié à la divergence de ce champ par la formule d'Ostrogradski :
$$\iint_S (\vec{X}|\vec{n})ds = \iiint_V div(\vec{X})dv \text{ avec } S = \partial V.$$
   (c) Dans le cas particulier d'un champ de gradient $\vec{X} = \nabla f$, on obtient :
$$\iint_S (\nabla f|\vec{n})ds = \iiint_V \Delta f dv.$$

Proposition 3.5.5 Les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ (existent et) sont continues sur U ssi f est continûment différentiable sur U (*i.e.* $df : U \to L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$ est une application continue).

Exemple 3.5.6 L'application f_4 est continûment différentiable.

Remarque 3.5.6 Si $\varphi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^2$ est injective, $j\varphi$ partout non nul, et si f est continue sur le compact $K \subset \operatorname{Im}\varphi$ alors

$$\iint_K f dxdy = \iint_{\varphi^{-1}(K)} f \circ \varphi |j\varphi| dxdy \text{ (changement de variable).}$$

Lemme 3.5.1 (Schwartz) Si f est deux fois différentiable en p alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p).$$

Exemple 3.5.7 Si $f_{12}(x,y) = \sin(xy^2)$ alors f_{12} est C^∞ donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial y \partial x}(x,y) &= 2y\cos(xy^2) + y^2(-2yx\sin(xy^2)) \\ &= 2y\cos(xy^2) - (2yx)y^2\sin(xy^2) = \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x \partial y}(x,y). \end{aligned}$$

Remarque 3.5.7 Sous les hypothèses précédentes, la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

des dérivées partielles secondes de f en (x,y) est symétrique.

Exemple 3.5.8 $H_{f_{12}}(x,y) = \begin{pmatrix} -y^4\sin(xy^2) & \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f_{12}}{\partial x \partial y}(x,y) & 2x(\cos(xy^2) - 2xy^2\sin(xy^2)) \end{pmatrix}.$

3.6 Développement limité

3.6.1 Développement limité en une variable : application à l'étude au voisinage d'un point d'une courbe paramètrée plane

Soit $M :]-1,1[\to \mathbb{R}^2$ une courbe paramètrée C^∞ du plan. Soient p le plus petit entier > 0 tel que $M^{(p)}(0) \neq 0$ et q le plus petit entier $> p$ tel que $M^{(q)}(0)$ ne soit pas colinéaire à $M^{(p)}(0)$ (*on suppose qu'il existe deux tels entiers p et q*). Posons $\vec{e} = M^{(p)}(0)$ et $\vec{f} = M^{(q)}(0)$; alors $(\vec{e}, \vec{f})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Pour $h \in]-1,1[$, on a :

$$M(h) = M(0) + (\frac{h^p}{p!} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\lambda_{p+1} + \cdots + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\lambda_{q-1})\vec{e} + \frac{h^q}{q!}\vec{f} + o(h^q)$$

Posons enfin

$$\xi = \frac{h^p}{p!} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\lambda_{p+1} + \cdots + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\lambda_{q-1} + o(h^q) = \frac{h^p}{p!}(1 + o(1))$$

et

$$\eta = \frac{h^q}{q!}(1 + o(1)).$$

En particulier, la tangente à la courbe admet $\vec{e}$ pour vecteur directeur.
Sans perte de généralité, on peut supposer $M(0) = 0$ donc $M(h) = \xi\vec{e} + \eta\vec{f}$.

1. $\underline{p \text{ impair}, q \text{ pair}}$: ξ reste du même signe que h et la courbe reste du même côté que $\vec{f}$ en traversant la droite $< \vec{f} >$ en $h = 0$.
2. $\underline{p \text{ impair}, q \text{ impair}}$: ξ et η sont du même signe que h, la courbe traverse les 2 droites $< \vec{e} >$ et $< \vec{f} >$; 0 est *point d'inflexion*.
3. $\underline{p \text{ pair}, q \text{ impair}}$: ξ reste positif tandis que η reste du même signe que h ; la courbe traverse $< \vec{e} >$ en $h = 0$ sans traverser $< \vec{f} >$; 0 est *point de rebroussement de première espèce*.
4. $\underline{p \text{ pair}, q \text{ pair}}$: ξ et η restent positifs ; la courbe ne traverse ni $< \vec{e} >$ ni $< \vec{f} >$; 0 est un *point de rebroussement de seconde espèce*.

3.6.2 Développement limité d'ordre 2

Théorème 3.6.1 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable en un point p_0 d'un ouvert U. Alors pour tout u suffisamment petit :

$$f(p_0 + u) = f(p_0) + df(p_0).u + \frac{1}{2} d^2 f(p_0)(u,u) + o(\|u\|^2)$$

(avec $\dfrac{o(\|u\|^2)}{\|u\|^2} \to 0$ quand $u \to 0$).

Sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right) + o(h^2+k^2) \end{aligned}$$

avec $\dfrac{o(h^2+k^2)}{h^2+k^2} \to 0$ quand $(h,k) \to (0,0)$.

Remarque 3.6.1

$$\lim_{u \to 0} \frac{o(\|u\|^2)}{\|u\|^2} = 0 \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall\ 0 < \|u\| < \alpha) : \frac{o(\|u\|^2)}{\|u\|^2} < \epsilon.$$

Exemple 3.6.1 $f_{12}(h, 1+k) = h + 2hk + o(h^2+k^2)$.

Proposition 3.6.1 Si f est deux fois différentiable sur un voisinage U de p_0, alors pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $[p_0, p_0+u] \subset U$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(p_0+u) = f(p_0) + df(p_0).u + \frac{1}{2} d^2 f(p_0 + \theta u)(u,u).$$

Le $DL_2(f)_{p_0}$ renseigne sur le comportement local *à l'ordre* 2 de f au voisinage de p_0.

3.6.3 Développement limité d'ordre quelconque.

Définition 3.6.1 Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction m fois différentiable en p_0. Si $m' \leqslant m$ alors $d^{m'} f(p_0)(h, \ldots, h) = d^{m'} f(p_0).h^{m'}$ est la *puissance symbolique d'ordre m' de f en p_0*.

Remarque 3.6.2

1. Une généralisation du lemme de Schwartz assure que $d^{m'}f(p_0)$ est symétrique.
2. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on note $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Proposition 3.6.2 Soient $p_0 \in U$ et $f : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}$ une fonction m fois différentiable en p_0. Alors

$$\begin{aligned} f(p_0+u) &= f(p_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(p_0) u^k + o(u^m) \\ &= f(p_0) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} (p_0) u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n} + o(u^m) \end{aligned}$$

Remarque 3.6.3 $\dfrac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}$ est le nombre de monômes (non ordonnés) en n variables de degré α.

4 Optimisation

4.1 Résultats généraux

Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 4.1.1 La fonction f présente un *minimum* (resp. *maximum*) *global* (ou *absolu*) en $p_0 \in A$ si pour tout $p \in A$: $f(p) \geqslant f(p_0)$ (resp $\leqslant$). L'*extremum* ou *point extrémal* p_0 est :
- *strict* si pour tout $p \in A - \{p_0\}$ on a $f(p) > f(p_0)$ (resp. $<$)
- *local* (ou *relatif*) si il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $p \in B(p_0, \rho) \cap A$: $f(p) \geqslant f(p_0)$ (resp $\leqslant$).

Exemple 4.1.1 L'application f_4 admet un minimum global strict en $(0, 0)$.

4.1.1 Un résultat d'existence

En vertu du théorème de Weierstrass, on a :

Proposition 4.1.1 Si f est une fonction continue sur une partie compacte alors f possède un maximum et un minimum.

Corollaire 4.1.1 Si f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\lim\limits_{\|p\| \to +\infty} f(p) = +\infty$ alors f est minorée et il existe $p_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(p_0) = \inf\limits_{p \in \mathbb{R}^2} f(p)$.
Dém. En effet, il existe $R \geqslant 0$ tel que si $\|p\| > R$ alors $f(p) > f(0)$. Ainsi, $\inf f = \inf\limits_{B'(0,R)} f$. En vertu de la proposition précédente, cet inf est réalisé.

4.1.2 Une condition du premier ordre

En une variable, il est bien connu que le nombre dérivé d'une fonction (lorsqu'il existe) est nul, en un point extrémal. Ce résultat est conservé lorsque la variable est vectorielle.

Proposition 4.1.2 (CN1) Si f est différentiable en p_0 et **si** p_0 est un extremum de f **alors** $df(p_0) = 0$.
Dém. Supposons que f présente un minimum local en p_0.
Soient $t \neq 0$ et $u \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\frac{f(p_0 + tu) - f(p_0)}{t} \leqslant 0 \text{ si } t < 0$$

et

$$\frac{f(p_0 + tu) - f(p_0)}{t} \geqslant 0 \text{ si } t > 0.$$

D'où $df(p_0) = 0$.
Autre démonstration. Notons $p_0 = (x_0, y_0)$. Si $h \in \mathbb{R}^*$ alors

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{o(h)}{h}.$$

Donc

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \leqslant 0.$$

De manière analogue

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \geqslant 0.$$

Dès lors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$ d'où le résultat.

Définition 4.1.2 Le point p est *critique* pour f si $df(p)=0$. On note $C(f)$ ou C_f ou $\Sigma(f)$ ou Σ_f l'ensemble des points critiques de f.

Exemple 4.1.2

1. $C_{f_4}=\{0\}$.
2. Si $f_{13}(x)=x^3$ alors $f'_{13}(0)=0$ mais f_{13} n'est pas extrémale en 0.

4.2 Extrema libres (optimisation sans contrainte)

4.2.1 Position du problème

On cherche les extrema dans U ouvert de $\mathbb{R}^2$, d'une fonction $f:U\to\mathbb{R}$ supposée deux fois différentiable sur U. Ces extremas sont *libres* de varier dans U.

On va voir que le comportement de f est étroitement lié à la forme quadratique $q(u)=d^2f(p_0)(u,u)=d^2f(p_0).u^2$.

Cas de la dimension 1 : Soit p un point critique d'une fonction $f:]a,b[\xrightarrow{C^\infty}\mathbb{R}$.

1. Si $f''(p)>0$ (resp. $f''(p)<0$) alors p est un minimum (resp. maximum) local strict.
2. Si $f''(p)=0$ alors on ne peut rien dire encore :
   (a) si $f^{(k)}(p)=0$ pour tout $1<k<K$ et $f^{(K)}(p)\neq 0$:
      i. K pair : si $f^{(K)}(p)>0$ (resp. $f^{(K)}(p)<0$) alors p est un minimum (resp. maximum) local strict ;
      ii. K impair : f ne présente ni maximum ni minimum local en p (*type point d'inflexion*).
   (b) sinon (*i.e.* $f^{(k)}(p)=0$ pour tout $k\geqslant 1$ - on dit que f est une *fonction plate* en p), il faut procéder autrement.

Remarque 4.2.1 si $f=1_{\mathbb{R}_+}e^{-\frac{1}{x}}$ alors f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et plate en 0. En particulier f n'est pas analytique en 0 (*i.e.* f n'est pas égale à sa série de Taylor).

4.2.2 Une condition du second ordre

Proposition 4.2.1 (CS2 : classification des points critiques) Soit f une fonction deux fois différentiable en $p_0\in U$, supposé critique pour f. Notons $q(u)=d^2f(p_0).u^2$.

1. Si q est définie positive (resp. négative) alors f présente un minimum (resp. maximum) local strict en p_0.
2. Si q est non dégénérée et non définie alors f ne présente pas d'extremum en p_0.
3. Si q est dégénérée alors on ne peut pas conclure (aucune conclusion n'est à exclure).

Dém.

1. On va traiter la cas q définie positive. On a :
$$f(p_0+u) = f(p_0) + \frac{1}{2}q(u) + o(\|u\|_2^2)$$
car p_0 est point critique de f supposée deux fois différentiable en p_0. En vertu de 3.4.4, il existe donc $a > 0$ tel que $q(u) \geqslant a\|u\|_2^2$ pour tout u. Par suite, pour tout $u \neq 0$ suffisamment petit,
$$f(p_0+u) - f(p_0) \geqslant \|u\|_2^2(\frac{a}{2} + \frac{o(\|u\|_2^2)}{\|u\|_2^2}).$$
Finalement, $f(p_0+u) - f(p_0) > 0$ pour $u \neq 0$ suffisamment petit.
2. On a :
$$f(p_0+u) - f(p_0) = \frac{1}{2}q(u) + o(u^2)$$
avec q non dégénérée non définie (*i.e.* q change de signe). Donc il existe $u \in S^{n-1}$ (resp. $v \in S^{n-1}$) tel que $q(u) = \lambda < 0$ (resp. $q(v) = \mu > 0$). Par suite, on a :
$$f(p_0+tu) - f(p_0) = t^2(\frac{\lambda}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2}) < 0$$
et
$$f(p_0+tv) - f(p_0) = t^2(\frac{\mu}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2}) > 0$$
pour tout $0 < |t| << 1$.

Remarque 4.2.2 (**Important**) Evidemment, si q est *dégénérée* **mais** qu'il existe u et v comme ci-dessus (*i.e.* $\sigma(q) = (s,t)$ avec $s > 0$ et $t > 0$), alors la conclusion de 2. demeure.

Proposition 4.2.2 Soit p_0 un point critique d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur un ouvert U. Si il existe $V \in \mathcal{V}(p_0)$ tel que pour tout $p \in V$, $d^2f(p) \geqslant 0$ *i.e.* f est *convexe* sur V (resp. > 0 *i.e.* f est *strictement convexe*) alors p_0 est un minimum local (resp. strict) de f.

Dém. En effet, pour tout $0 < \|u\| << 1$, il existe $p \in]p_0, p_0+u[$ tel que $f(p_0+u) - f(p_0) = \frac{1}{2}d^2f(p)(u,u)$. D'où le résultat.

Exemple 4.2.1 L'application f_3 est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On a : $df_3(p) = 0 \Leftrightarrow p \in \{0\}\times\mathbb{R}$. Par ailleurs, $H_{f_3}(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0$. Donc, $(0,y)$ est un minimum local de f_3 ; il est clair que c'est un minimum global non strict.

Proposition 4.2.3 **(CN2)** Si f est deux fois différentiable en un minimum (resp. maximum) local p alors la forme quadratique $q(u) = d^2f(p).u^2$ est positive (resp. négative).

Dém. En effet, si p_0 est un minimum local de f alors
$$(\exists \eta > 0)(\forall u \in S_\eta^{n-1}) : 0 \leqslant f(p_0+u) - f(p_0) = \frac{1}{2}d^2f(p_0)(u,u) + o(u^2).$$
Par suite,
$$\forall \epsilon > 0, -\epsilon \leqslant \inf_{u \in S^{n-1}} d^2f(p_0)(u,u).$$

4.2.3 Cas de la dimension 2

Dans ce cas, en appliquant le corollaire au théorème de Sylvester - proposition 2.2.3 - on obtient un critère commode pour déterminer la nature de q.

Proposition 4.2.4 Soit p_0 un point critique de f. Posons $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0)$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0)$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0)$. Soit $q(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$ et notons $\Delta = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2$.

1. $\Delta > 0$: q est définie ;
   (a) $r < 0$ ($\Leftrightarrow tr(q) < 0$) : f présente un maximum local strict en p_0
   (b) $r > 0$ ($\Leftrightarrow tr(q) > 0$) : f présente un minimum local strict en p_0 ;

   on dit que p_0 est un *extremum local (strict)*.
2. $\Delta < 0$: q est non dégénérée non définie ; f ne présente ni minimum ni maximum local en p_0 ; on dit que p_0 est un *point selle*.
3. $\Delta = 0$: on ne peut rien conclure (q est dégénérée).

Exemple 4.2.2

1. $f_4(x,y) = x^2 + y^2$.
2. $f_{14}(x,y) = x^2 - y^2$.
3. $f_{15}(x,y) = x^2 + y^6$.
4. $f_{16}(x,y) = x^2 - y^6$.

4.3 Extrema liés (optimisation avec contrainte)

4.3.1 Position du problème

On se donne un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et E une partie de U. On cherche les extrema *sur* E, d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ supposée différentiable (voire deux fois différentiable) sur U. Ces extrema sont *assujettis* à E. On dit que E est la *contrainte*.

De plus, on supposera ici, que la partie E de U est définie à l'aide d'*équations*. Plus précisément, $E = \{p \in U : G(p) = 0\}$ où $G : U \stackrel{C^1}{\to} \mathbb{R}$. Par abus de language, on dit aussi que G est la contrainte.

En outre, on impose une hypothèse de régularité sur E : on suppose que ∇G ne s'annule pas sur E. Ceci signifie que l'*espace tangent* à E est bien défini.

Théorème 4.3.1 (des Fonctions Implicites dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) Soient $G : \mathbb{R}^{n+1} \stackrel{C^{k\geqslant 1}}{\to} \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ tels que $G(a,b) = c$ et $\dfrac{\partial G}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Alors

$$(\exists W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^{n+1}}(a,b))(\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^n}(a))(\exists \varphi : V \stackrel{C^k}{\to} \mathbb{R})$$

tels que :

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in W \\ G(x,y) = c \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in V \\ y = \varphi(x) \end{array}\right.$$

En particulier, $\varphi(a) = b$.

Exemple 4.3.1 Soient $G_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$ (de classe C^∞), $a=(0,0)$, $b=1$. On a : $G_1(0,0,1)=0$ et $\dfrac{\partial G_1}{\partial z}(0,0,1) = 2 \neq 0$. Donc d'après le TFI, il existe $\varphi_1 : B((0,0),\varepsilon) \to \mathbb{R}$, C^∞ telle que :

$$\left.\begin{array}{l} (x,y,z) \in B((0,0,1),\eta) \\ G_1(x,y,z) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x,y) \in B((0,0),\varepsilon) \\ z = \varphi_1(x,y) \end{array}\right.$$

En fait ici, $\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & B((0,0),1) & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{1-(x^2+y^2)} \end{array}$ est l'unique application « maximale » qui convient.

Proposition 4.3.1 Sous les hypothèses du TFI (avec $n+1=3$), on a pour $(x,y) \in V$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) / \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) / \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)).$$

Dém. Si $(x,y) \in V$ alors $G(x,y,\varphi(x,y)) = c$. Comme G et φ sont C^1, on obtient

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0.$$

De même

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0.$$

D'où le résultat.

4.3.2 Théorème(s) des extrema liés

Théorème 4.3.2 (CN3) Théorème des extrema liés (1 équation) : Soient $G : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq U \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 telle que $\nabla G \neq 0$ sur U et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable.

Si p_0 est un extremum de f sur E **alors** il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$df(p_0) = \lambda dG(p_0)$$

ou encore

$$\nabla f(p_0) = \lambda \nabla G(p_0) \text{ (\textit{i.e.} les 2 gradients sont colinéaires).}$$

Définition 4.3.1 Le scalaire λ apparaissant dans le théorème est un *multiplicateur de Lagrange*.

Dém. On va démontrer le résultat pour $n+1=3$. Comme $\nabla G(p_0) \neq 0$ on peut supposer $\dfrac{\partial G}{\partial z}(p_0) \neq 0$. Par le TFI on obtient donc :

$$(\exists W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^3}(p_0))(\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(x_0,y_0))(\exists \varphi : V \xrightarrow{C^1} \mathbb{R})$$

tels que :

$$\left.\begin{array}{l} (x,y,z) \in W \\ G(x,y,z) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x,y) \in V \\ z = \varphi(x,y). \end{array}\right.$$

Comme f admet un minimum local en p_0 sur $\{G=0\}$,

$$\forall (x,y,z) \in \{G=0\} \cap W : f(x,y,z) \geqslant f(p_0)$$

(le voisinage W étant suffisamment petit).

Ainsi, pour $(x,y) \in V : g(x,y) = f(x,y,\varphi(x,y)) \geqslant f(p_0)$. Ceci entraîne $dg(x_0,y_0)=0$ *i.e.* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(p_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(p_0) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0) = 0. \end{array} \right.$$

En utilisant la proposition précédente on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial G}{\partial z}(p_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(p_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)\dfrac{\partial G}{\partial x}(p_0) \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial z}(p_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(p_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)\dfrac{\partial G}{\partial y}(p_0). \end{array} \right.$$

Comme $\dfrac{\partial G}{\partial z}(p_0) \neq 0$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(p_0), \dfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)\right) & = & \alpha\left(\dfrac{\partial G}{\partial x}(p_0), \dfrac{\partial G}{\partial z}(p_0)\right) \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(p_0), \dfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)\right) & = & \beta\left(\dfrac{\partial G}{\partial y}(p_0), \dfrac{\partial G}{\partial z}(p_0)\right) \end{array} \right.$$

dont on déduit $\alpha = \beta = \lambda = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial z}(p_0)}{\dfrac{\partial G}{\partial z}(p_0)}$.

Par suite

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0), \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\right) = \lambda\left(\frac{\partial G}{\partial x}(p_0), \frac{\partial G}{\partial y}(p_0), \frac{\partial G}{\partial z}(p_0)\right)$$

i.e.

$$df(p_0) = \lambda dG(p_0).$$

Remarque 4.3.1 On a : $\nabla f(p_0)$ colinéaire à $\nabla G(p_0) \Leftrightarrow df(p_0)_{|T_{p_0}E} \equiv 0$. Autrement dit, p_0 est « critique » pour $f_{|E}$.

Exemple 4.3.2 Distance, dans le plan, à une droite affine ne passant pas par 0.

Posons $G_2(x,y) = ax+by+c$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $c \neq 0$. Soit $f(p) = \|p\|_2^2$. Alors f et G_2 sont de classe C^1 ; de plus, $dG_2(p) = adx + bdy$ est partout non nul. Cherchons les extrema potentiels de $f_{|\{G_2=0\}}$ à l'aide du théorème des extrema liés : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df(p) = \lambda dG_2(p)$. Autrement dit : $\left\{ \begin{array}{lcl} 2x & = & \lambda a \\ 2y & = & \lambda b \end{array} \right.$.

Comme $c \neq 0$, on a nécessairement $\lambda \neq 0$. Ainsi, $bx = ay$ conduit au système de Cramer

$$\left\{ \begin{array}{lcll} ax & + & by = & -c \\ bx & - & ay = & 0 \end{array} \right. .$$

D'où
$$(x,y) = -\frac{1}{a^2+b^2}\left(\begin{vmatrix} -c & b \\ 0 & -a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & -c \\ b & 0 \end{vmatrix}\right) = -\left(\frac{ac}{a^2+b^2}, \frac{bc}{a^2+b^2}\right).$$

Maintenant, comme f (est continue et) tend vers l'infini lorsque (x,y) tend vers l'infini sur la **droite** $\{G_2 = 0\}$, elle y admet nécessairement un minimum. On conclut que $d(0, \{G_2 = 0\}) = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (bien sûr, c'est la distance de 0 à son projeté orthogonal sur la droite).

Enonçons maintenant une généralisation du théorème des extrema liés lorsque la contrainte est définie par plusieurs équations.

Théorème 4.3.3 (CN'3) Théorème des extrema liés (m équations) Soient $(G_i)_{1\leqslant i\leqslant m} : \mathbb{R}^{n+1} \supseteq U \to \mathbb{R}$, $m \leqslant n+1$ des fonctions C^1 telles que $(\nabla G_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ soit libre (sur U) et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable.

Si p_0 est un extremum de f sur $E = \{p \in U : G_i(p) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}$ **alors** il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ *uniques* tels que
$$df(p_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i dG_i(p_0)$$
ou encore
$$\nabla f(p_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla G_i(p_0).$$

Exemple 4.3.3 Distance du point $(0,1,1)$ au cercle $S^1 \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Posons $f(p) = \|p - (0,1,1)\|_2^2$; on cherche $\inf f_{|S^1\times\{0\}}$. Comme f est continue sur le compact $S^1 \times \{0\}$, elle y admet au moins 2 extrema. Soit $G_3(p) = (x^2+y^2-1, z)$. Alors f et G_3 sont C^1. De plus, $dG_3(p) = (2xdx + 2ydy, dz)$; en particulier, $dG_3(p)$ n'est pas de rang 2 ssi $p \in \{0_{\mathbb{R}^2}\} \times \mathbb{R}$. Le théorème des extréma liés entraîne alors :
$$p \text{ extremum de } f_{|S^1\times\{0\}} \Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : df(p) = \lambda dG_3^1(p) + \mu dG_3^2(p).$$

On a donc : $\left\{\begin{array}{ccc} x & = & \lambda x \\ y-1 & = & \lambda y \\ 2(z-1) & = & \mu \end{array}\right.$.

Comme $(x,y,z) \in S^1 \times \{0\}$, on a nécessairement $z = 0$ et bien sûr $\lambda \neq 1$. D'où $x = 0$ et $z = 0$. Mais alors $y = \pm 1$. Les points critiques de $f_{|S^1\times\{0\}}$ sont donc exactement $(0,-1,0)$ et $(0,1,0)$. Le minimum est bien sûr donné par $(0,1,0)$ car $f(0,1,0) = 1$ tandis que $f(0,-1,0) = 5$. La distance à $S^1 \times \{0\}$ est donc égale à 1.

On peut reformuler ce théorème à l'aide du *Lagrangien* associé au problème :

si $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ alors posons $\mathcal{L}(\underline{\lambda}, p) = f(p) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i(p)$. On a :
$$G_i(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(\underline{\lambda}, p) = 0$$
et
$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla G_i(p) \Leftrightarrow \nabla_p \mathcal{L}(\underline{\lambda}, p) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i}(\underline{\lambda}, p) = 0 \ (1 \leqslant i \leqslant n+1).$$

Proposition 4.3.2 Sous les hypothèses du théorème des extrema liés, si p_0 est un extremum (relatif) de f sur E alors

$$\exists \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^m : d\mathcal{L}(\underline{\lambda}, p_0) = 0.$$

4.3.3 Une condition du second ordre

Enfin, concluons cette partie par une condition suffisante d'existence d'extremum lié. Dans le cas qui nous occupe, l'espace tangent à E en p est donné par

$$T_pE = \bigcap_{i=1}^{m} < \nabla G_i(p) >^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} : (\nabla G_i(p)|u) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Proposition 4.3.3 (CS3) Soient $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur U et $(G_i)_{1\leqslant i\leqslant m} : U \to \mathbb{R}$ une famille de m fonctions deux fois différentiables de *rang maximal*. Posons

$$E = \{p \in U : G_i(p) = 0, 1 \leqslant i \leqslant m\}.$$

Si p_0 est « point critique » de $\mathcal{L}$ (*i.e.* il existe $\underline{\lambda}$ tel que $\nabla f(p_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla G_i(p_0)$) et ${}_pH_{\mathcal{L}}(\underline{\lambda}, p_0)_{|T_{p_0}E} < 0$ (resp. > 0) alors p_0 est un maximum (resp. minimum) local strict de $f_{|E}$.

Exemple 4.3.4 $T_{(0,\pm1,0)}S^1 \times \{0\} =< (0,\pm1,0) >^{\perp} \cap < (0,0,1) >^{\perp} =< (1,0,0) >$. D'autre part $\mathcal{L}((\lambda_1,\lambda_2),(x,y,z)) = x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - \lambda_1(x^2+y^2-1) + \lambda_2 z$. ${}_pH_{\mathcal{L}}(\lambda, p_0) = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Donc

$$\text{en } (0,1,0),\ \underline{\lambda} = (0,-2) \text{ d'où } {}_pH_{\mathcal{L}}((0,-2),(0,1,0))_{|<(1,0,0)>} = (2) > 0$$

$$\text{tandis qu'en } (0,-1,0),\ \underline{\lambda} = (2,-2) \text{ d'où } {}_pH_{\mathcal{L}}((2,-2),(0,-1,0))_{|<(1,0,0)>} = (-2) < 0.$$

Remarque 4.3.2 On a une réciproque partielle analogue aux cas des extrema libres **(CN2)** (qui porte sur ${}_pH_{\mathcal{L}}(\underline{\lambda}, p_0)_{|T_{p_0}E} \leqslant 0$ (resp $\geqslant 0$)).

5 Transformations intégrales

5.1 Transformée de Laplace

La transformation de Laplace vise à ramener un problème d'analyse à un problème d'algèbre ou plus exactement, de *calcul symbolique*.

5.1.1 Existence

Définition 5.1.1 Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est d'*ordre exponentiel* s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq Ae^{\alpha t}$ pour $t >> 1$.

Exemple 5.1.1

1. La fonction t^k est d'ordre exponentiel ; la somme de 2 fonctions d'ordre exponentiel l'est aussi.
2. Une fonction du type $Bt^k e^{\beta t}$ est d'ordre exponentiel (le produit de 2 fonctions d'ordre exponentiel l'est encore).
3. La fonction $f(t) = e^{t^2}$ n'est pas d'ordre exponentiel.

Définition 5.1.2 Soit f une fonction C^0 par morceaux de limite finie sur tout intervalle majoré de $\mathbb{R}_+$ (*fonction causale*, voire f localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$ avec *principalement* un nombre fini de points singuliers du type $\frac{a}{t^\alpha}, 0 < \alpha < 1$) et d'ordre exponentiel (*). On pose

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

qui est la *transformée de Laplace* de f (ici F est définie pour tout $p > \alpha$). La borne inférieure de tels α est l'*abscisse de sommabilité*.

Notation : $F = \mathcal{L}(f)$ ou encore $F \sqsubset f$.

Exemple 5.1.2

1. Soit $H = 1_{\mathbb{R}_+}$. On a $\dfrac{1}{p} \sqsubset H$;
2. Soit $d_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon} 1_{[0,\epsilon]}$. Alors $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \mathcal{L}(d_\epsilon) = 1$. La fonction d_ϵ « tend » vers la *masse de Dirac* δ_0 ;
3. $\dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2} \sqsubset \sin \omega t$ et $\dfrac{p}{p^2 + \omega^2} \sqsubset \cos \omega t$.

   En effet, si $I = \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt}dt$ alors

$$\begin{aligned} I &= [-\frac{1}{p}\cos(\omega t)e^{-pt}]_0^{+\infty} - \frac{\omega}{p}\int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt}dt \\ &= \frac{1}{p} - \frac{\omega}{p}([-\frac{1}{p}\sin(\omega t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + \frac{\omega}{p}\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt}dt) \end{aligned}$$

   D'où $(1 + (\dfrac{\omega}{p})^2)I = \dfrac{1}{p}$ et $I = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$.

Remarque 5.1.1

1. En fait, la transformée de Laplace garde un sens pour $p \in \mathbb{C}$ avec $Re(p) > \alpha$. La transformée de Laplace est *holomorphe* de la variable complexe p.
2. Pour assurer l'existence de F, on peut supposer seulement l'intégrabilité locale de f en 0 ($f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ par exemple, ou plus généralement $\exists \alpha \in [0, 1[: \lim_{t \to 0^+} t^\alpha f(t) \in \mathbb{R}$).

Pour justifier l'existence et la régularité de la transformée de Laplace d'une fonction causale, on appliquera la :

Proposition 5.1.1 [ROD] IV.2.3.3 Soit $f : [a, b[\times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue telle que :

1. il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t, x)dt$ existe ;
2. la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe, est C^0 sur $[a, b[\times \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$ converge uniformément.

Alors $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t, x)dt$ est C^1 et $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)dt$ (*dérivation sous le signe somme d'une fonction définie par une intégrale impropre*).

que l'on couplera éventuellement à la :

Proposition 5.1.2 [ROD] IV.2.4.3 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n : I \to \mathbb{C}$ une série de fonctions telle que :

1. il existe $t_0 \in I$ tel que la série $\sum f_n(t_0)$ soit convergente,
2. la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I.

Alors la somme $\sum f_n$ est dérivable et $\displaystyle(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t)$.

Remarque 5.1.2 $\mathbb{R}_+ = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} [a_n, a_{n+1}[$ (avec $a_0 = 0$ et éventuellement $a_n = +\infty$ pour $n >> 1$) ; la fonction f étant continue sur $]a_n, a_{n+1}[$ et à « singularités contrôlées » aux extrémités.

Corollaire 5.1.1 Si f satisfait (*) alors $\dfrac{\partial^k (f e^{-pt})}{\partial p^k}$ est normalement intégrable, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (dés que p est assez grand, mais indépendamment de k). En particulier, si $F \sqsubset f$ alors F est C^∞ (au delà de son abscisse de sommabilité).

5.1.2 Propriétés

De nombreuses techniques de calcul peuvent être utilisées pour obtenir la transformée de Laplace de f.

Proposition 5.1.3 Soit f satisfaisant (*). Alors :

1. $\mathcal{L}$ est linéaire
2. si $a \in \mathbb{R}$ alors $F(p - a) \sqsubset e^{at} f$ (*pour* $p > \alpha + a$)
3. si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors

(a) si $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & \text{si } t > a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors $e^{-ap}F \sqsubset g$

(b) $\frac{1}{a}F(\frac{p}{a}) \sqsubset f(at)$

4. (a) si f est C^0 et f' (existe et) satisfait (*) alors $pF - f(0^+) \sqsubset f'$
   (b) si f présente un saut en $t = a$ alors $pF(p) - f(0^+) - e^{-ap}(f(a^+) - f(a^-)) \sqsubset f'$
   (c) si $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ sont C^0 et $f^{(k)}$ C^0 par morceaux alors
$$p^kF - p^{k-1}f(0) - \cdots - pf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0) \sqsubset f^{(k)}$$
5. $\frac{F}{p} \sqsubset \int_0^t f(u)du$ *(on suppose f intégrable sur $\mathbb{R}_+$)*
6. $F^{(k)} \sqsubset (-1)^k t^k f$
7. si g est T-périodique de génératrice f alors $\frac{F}{1-e^{-pT}} \sqsubset g$
8. si $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!a_n}{p^{n+1}} \sqsubset f$ *(on suppose les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} a_n t^n e^{-pt}$ dominées par une fonction $\mathbb{R}_+-$intégrable).*

Dém.

1. Linéarité de l'intégrale.
2. $\mathcal{L}(e^{at}f) = \int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p-a)t}dt = F(p-a)$.
3. (a) $\mathcal{L}(g) = \int_a^{+\infty} f(t-a)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(s)e^{-p(s+a)}ds = e^{-ap}\int_0^{+\infty} f(s)e^{-ps}ds = e^{-ap}\mathcal{L}(f)$.
   (b) $\int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} f(s)e^{-\frac{ps}{a}}\frac{ds}{a} = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(\frac{p}{a})$.
4. (a) $\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = [f(t)e^{-pt}]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = p\mathcal{L}(f) - f(0^+)$.
   (b)
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt &= \int_0^a f'(t)e^{-pt}dt + \int_a^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt \\ &= [f(t)e^{-pt}]_0^a + p\int_0^a f(t)e^{-pt}dt + [f(t)e^{-pt}]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \\ &= f(a^-)e^{-ap} - f(0^+) - f(a^+)e^{-ap} + \mathcal{L}(f).\end{aligned}$$
   (c) Par récurrence sur k.
5. $\int_0^{+\infty}(\int_0^t f(u)du)e^{-pt}dt = [\int_0^t f(u)du\frac{e^{-pt}}{-p}]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$.
6. $\int_0^{+\infty}(-1)^k t^k f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial p^k}[f(t)e^{-pt}]dt = \frac{d^k}{dp^k}F$.
7. $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt}dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{kT}^{(k+1)T} g(t)e^{-pt}dt = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^T f(t)e^{-p(s+kT)}ds = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kpT}\mathcal{L}(f)$
$= \frac{F}{1-e^{-pT}}$.
8. $\int_0^{+\infty}(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n)e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!a_n}{p^{n+1}}$.

Exemple 5.1.3

1. $\frac{n!}{p^{n+1}} \sqsubset t^n$;
2. $\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\frac{1+e^{-\pi p}}{1+p^2} \sqsubset 1_{\cup_{k\in\mathbb{N}}[2k\pi,(2k+1)\pi]}\sin t$.

5.1.3 Comportements

On a déjà vu que la transformée de Laplace *régularisait* la fonction f. Mentionnons maintenant quelques résultats sur son comportement asymptotique.

Proposition 5.1.4 Soit $F \sqsubset f$. Alors :

1. $\lim\limits_{p \to +\infty} F(p) = 0$;
2. Dès que les limites existent :
   (a) $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t) = \lim\limits_{p \to +\infty} pF(p)$ (*valeur initiale*)
   (b) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0^+} pF(p)$ (*valeur finale*).

Dém.

1. (*On suppose f bornée sur* $[0,T]$) pour $T >> 1$, $F(p) \leqslant ||f||_{[0,T]} \frac{1-e^{-pT}}{p} + A\left(\frac{e^{-(p-\alpha)T}}{p-\alpha}\right)$ d'où le résultat.
2. (a) D'après ce qui précède appliquée à f' (supposée satisfaire (*)), on a $\lim_{p \to +\infty} \mathcal{L}(f')(p) = 0$. Donc
$$\mathcal{L}(f')(p) = pF(p) - f(0^+) \Rightarrow \lim_{p \to +\infty} pF(p) = f(0^+).$$
   (b) On suppose f' absolument intégrable. Comme $\mathcal{L}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$, en passant à la limite sur $p \to 0^+$, on obtient
$$\lim_{p \to 0^+} pF(p) - f(0^+) = \lim_{t \to +\infty} f(t) - f(0^+).$$

Définition 5.1.3 Soient f et g deux fonctions absolument intégrables (sur $\mathbb{R}$). Alors $f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$ est (uniformément) C^0, absolument intégrable et tend vers 0 à l'∞ (en particulier, $f * g$ est d'ordre exponentiel) ; $*$ est commutatif et associatif.

Remarque 5.1.3

1. *supp*$(f * g) \subseteq$ *supp*(f) + *supp*(g).
2. Si f et g sont causales alors $f * g$ est causale.

Proposition 5.1.5 Soient f et g absolument intégrables et satisfaisant (*). On a : $FG \sqsubset f * g$.

Dém.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f*g)(p) &= \int_0^{+\infty} f*g(s)e^{-ps}ds = \int_0^{+\infty} e^{-ps} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(s-t)dtds \\ &\overset{Fubini}{=} \int_0^{+\infty}\int_0^s e^{-ps} f(t)g(s-t)dtds = \iint_{\{0 \leqslant s, 0 \leqslant t \leqslant s\}} e^{-ps} f(t)g(s-t)dtds. \end{aligned}$$

Posons $\begin{array}{rcl} \varphi \ : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (s,t) = (u+v, v) \end{array}$. Alors φ est un C^1-difféomoprhisme et $j_\varphi = 1$. En outre $\varphi^{-1}(\{0 \leqslant s, 0 \leqslant t \leqslant s\}) = \mathbb{R}_+^2$. Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f*g)(p) &= \iint_{\mathbb{R}_+^2} f(v)g(u)e^{-p(u+v)}|j_\varphi(u,v)|dudv \\ &= \int_0^{+\infty} f(v)e^{-pv}dv \int_0^{+\infty} g(u)e^{-pu}du. \end{aligned}$$

5.1.4 Transformée inverse

Définition 5.1.4 Une fonction f C^0 par morceaux sur tout intervalle fini est *nulle presque partout* si $\forall s > 0 : \int_0^s f(t)dt = 0$.

Exemple 5.1.4 $f = 1_{\mathbb{N}}$ est nulle presque partout.

Remarque 5.1.4 Si $f = g \bmod \mathcal{N}$ alors $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$.

Définition 5.1.5 Si $F \sqsubset f$ alors $\mathcal{L}^{-1}(F) = f \bmod \mathcal{N}$ ou $f \sqsupset F$; f est un *original* de F. L'application $\mathcal{L}^{-1}$ est la *transformée de Laplace inverse*.

Proposition 5.1.6 Soit $f \sqsupset F$. Alors :

1. $\frac{1}{a}f(\frac{t}{a}) \sqsupset F(ap)$;
2. si $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ existe alors $\frac{f(t)}{t} \sqsupset \int_p^{+\infty} F(s)ds$.

Exemple 5.1.5 $\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\sqrt{p}}) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$. En effet, pour $p > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-pt}dt &\overset{t=u^2}{=} 2\int_0^{+\infty} e^{-pu^2}du \overset{v=\sqrt{p}u}{=} \frac{1}{\sqrt{p}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = \sqrt{\frac{1}{p}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2}dw} = \sqrt{\frac{1}{p}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(v^2+w^2)}dvdw} \\
&= \sqrt{\frac{1}{p}\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho d\theta d\rho} = \sqrt{\frac{1}{p}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} d(\frac{1}{2}e^{-\rho^2})} \\
&= \sqrt{\frac{1}{p}[\theta]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.
\end{aligned}$$

5.1.5 Applications

La transformée de Laplace prend tout son sens dans les applications. Compte-tenu de ses bonnes propriétés à l'égard de la dérivation, on l'utilise volontiers pour résoudre des équations différentielles (ou aux dérivées partielles). Elle peut aussi constituer un outil adapté à l'évaluation d'intégrales.

Exemple 5.1.6

1. Circuit RLC (tension aux bornes e) : on obtient l'équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = e.$$

Donc $L(p^2Q - pq(0) - q'(0)) + R(pQ - q(0)) + \frac{Q}{C} = E$. D'où :

$$Q = C\frac{E + L(pq(0) + q'(0)) + Rq(0)}{LCp^2 + RCp + 1}.$$

Si $R^2C < 4L$ on en déduira que q est un sinus amorti (cf TD).

2. Calcul d'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}du$ est semi-convergente (*Abel*).
   Posons $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(tx^2)dx$ pour $t > 0$. Alors $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(u^2)du$ a un sens pour tout $t > 0$, est d'ordre exponentielle et est localement intégrable en 0. Elle admet donc une transformée de Laplace. Si $g(x,t) = \cos(x^2 t)e^{-pt}$ alors g est continue sur $[0, R] \times [0, +\infty[$ où $R > 0$ et $\int_0^{+\infty} g(x,t)dt$ est uniformément convergente. Donc
   $$\int_0^R \int_0^{+\infty} g(x,t)dtdx = \int_0^{+\infty} \int_0^R g(x,t)dxdt.$$
   Or,
   $$\begin{aligned}\int_0^R \int_0^{+\infty} g(x,t)dtdx &= \int_0^R \mathcal{L}(\cos(x^2t))dx = \int_0^R \frac{p}{p^2+x^4}dx = \frac{1}{\sqrt{p}}\int_0^{\frac{R}{\sqrt{p}}} \frac{du}{1+u^4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}}\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| \\ &\qquad +2(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1))\Big)_{|x=\frac{R}{\sqrt{p}}}.\end{aligned}$$
   Par suite, $\lim_{R\to+\infty}\int_0^R \mathcal{L}(\cos(x^2t))dx = \frac{2\pi}{4\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{p}}$. Ainsi $f(t) = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
   La valeur de l'intégrale s'en déduit quand $t \to 1$ (*continuité de f*).

5.2 Transformée de Fourier

La transformation de Fourier est le second outil fondamental en théorie du signal. Obtenue de manière analogue à la transformée de Laplace, elle régularise de façon similaire l'argument. Plus précisément, plus l'argument décroit vite à l'infini, plus la transformée de Fourier est dérivable. Et réciproquement d'ailleurs : plus l'argument est régulier, plus la transformée de Fourier décroit rapidement à l'infini.

5.2.1 Existence

Définition 5.2.1 Soit f une fonction C^0 par morceaux, absolument intégrable à valeurs $\mathbb{C}$. Alors
$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi tx}dt$$
a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. L'application $\hat{f}$ est la *transformée de Fourier* de f ; on note aussi $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$.

Exemple 5.2.1 $\mathcal{F}(1_{[a,b]}) = e^{-i\pi(a+b)x}\dfrac{\sin(\pi(b-a)x)}{\pi x}$.

Proposition 5.2.1 L'application $\hat{f}$ est (uniformément) continue et tend vers 0 à l'infini. De plus, $\mathcal{F}$ est injective.

Remarque 5.2.1
1. L'application $\hat{f}$ est en général à valeurs dans $\mathbb{C}$ (même si f est réelle).
2. On trouve d'autres définitions de la transformation de Fourier dans la littérature ; elles diffèrent par le choix des constantes de normalisation.

5.2.2 Propriétés

Proposition 5.2.2 Soit f C^0 par morceaux et absolument intégrable.

1. $\mathcal{F}$ est linéaire ; (*linéarité de* $\int$)
2. $\mathcal{F}(f(t-t_0)) = e^{-2i\pi x t_0}\hat{f}$; (*changement de variable*)
3. (a) $\mathcal{F}(f(-t)) = \hat{f}(-x)$;

   (b) plus généralement, si $a \neq 0$ alors $\mathcal{F}(f(at)) = \dfrac{1}{|a|}\hat{f}(\dfrac{x}{a})$; (*changement de variable*)
4. $\mathcal{F}(\bar{f}) = \bar{\hat{f}}(-x)$; (*immédiat*)
5. $\mathcal{F}(e^{2i\pi x_0 t}f) = \hat{f}(x-x_0)$; (*changement de variable*)
6. (a) si f' existe, est C^0 par morceaux et absolument intégrable alors $\widehat{f'} = 2i\pi x\hat{f}$; (*inégration par partie*)

   (b) plus généralement, si $f^{(m)}$ est C^0 par morceaux et absolument intégrable alors $\widehat{f^{(m)}} = (2i\pi x)^m\hat{f}$; (*récurrence*)
7. si $x^m f$ est absolument intégrable alors $\hat{f}$ est C^k, $k \leq m$ et $\hat{f}^{(k)} = (-2i\pi)^k\mathcal{F}(t^k f)$.

Remarque 5.2.2

1. On déduit de 1. et 3. que $\mathcal{F}$ conserve la parité de f.
2. Si f est réelle paire (resp. impaire) alors $\hat{f}$ est aussi réelle paire (resp. impaire).
3. Il résulte de 6.(b) que plus f est dérivable plus $\hat{f}$ décroit rapidement tandis qu'il s'ensuit de 7. que plus f décroit rapidement plus $\hat{f}$ est dérivable.

Exemple 5.2.2

1. $\mathcal{F}(He^{-at}) = \dfrac{1}{a+2i\pi x}$.
2. $\mathcal{F}(e^{-a|t|}) = \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2x^2}$.

Proposition 5.2.3 Si f est C^0 à support compact alors $\hat{f}$ est entière.

Dém. On a $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-M}^{M} f(t)e^{-2i\pi xt}dt$. Donc $\hat{f}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(\int_{-M}^{M} f(t)t^k dt)\frac{(-2i\pi x)^k}{k!}$ avec $|\displaystyle\int_{-M}^{M} f(t)t^k dt| \leq 2\|f\|_\infty \frac{M^{k+1}}{k+1}$ donc $\hat{f}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\frac{(-2i\pi Mx)^k}{k!}$ où $|a_k| \leqslant \dfrac{2||f||_\infty M}{k+1}$.

Remarque 5.2.3 On peut remarquer que $\mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{L}(f)(2i\pi x)$.

Proposition 5.2.4

1. Si f et g sont absolument intégrables alors $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)\bar{\hat{g}}(x)dx$ dès que les intégrales convergent (Parseval).

5.2.3 Tranformée inverse

Proposition 5.2.5 Si f et $\hat{f}$ sont absolument intégrables alors $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f}) = f$ p.p.

Proposition 5.2.6 Si f est continu par morceaux dans tout intervalle fini alors $\hat{f} = 0$ entraîne $f = 0$ p.p.

Remarque 5.2.4 La proposition précédente signifie que $\mathcal{F}$ est injective (modulo les fonctions nulle presque partout).

Proposition 5.2.7 Soient $-\infty < a_1 < a_2 < \cdots < a_m < +\infty$. Si f est C^1 sur $]-\infty, a_1[$, $]a_1, a_2[, \ldots,]a_m, +\infty[$, f et f' absolument intégrables alors

$$\bar{\mathcal{F}}(\hat{f})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{2i\pi tx} dx = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

Exemple 5.2.3 $\mathcal{F}(e^{-\pi t^2}) = e^{-\pi x^2}$.