**Université de Savoie** **Année 2015/2016**

# MATH326 (6 ECTS)

## Mathématiques pour les sciences 3

Stéphane Simon

10 janvier 2016

# Table des matières

# Chapitre 1

# Série numérique

## 1.1 Rappels sur les suites numériques

**Définition 1.1.1.1** Une *suite numérique* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (ou simplement $(u_n)$) est une application $u$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{C}$. L'image de $n$ est le $n-$ième *terme* de la suite.

**Exemple 1.1.1.2** Soient $a, r \in \mathbf{C}$.

1. On pose $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n + r \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$ $(u_n)$ est la *suite arithmétique de raison* $r$ *et de premier terme* $a$. Par récurrence sur $n$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N} : u_n = a + nr.$$

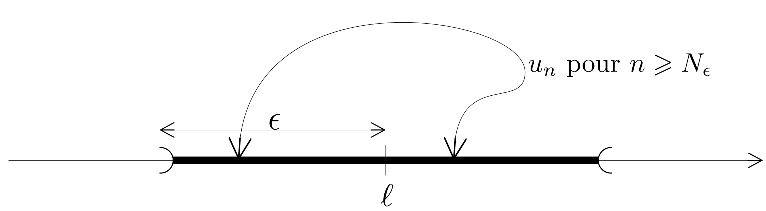
2. On pose $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = r u_n \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$ $(u_n)$ est la *suite géométrique de raison* $r$ *et de premier terme* $a$. Par récurrence sur $n$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N} : u_n = ar^n.$$

**Définition 1.1.1.3** Une suite $(u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbf{C}$ si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N) : |u_n - \ell| < \epsilon.$$

où $|\cdot|$ désigne le module.
La suite est *convergente* et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est *la limite*. Si la suite n'est pas convergente alors elle est divergente.




**Remarque 1.1.1.4**

1. Si la limite d'une suite existe alors elle est unique.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \ell) = 0$.
3. Soit $(u_n)$ une suite réelle. Si
$$(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N) : u_n \geqslant A$$
alors on dit que $(u_n)$ *diverge vers* $+\infty$.

**Exemple 1.1.1.5**

1. Si $a \neq 0$ alors la suite géométrique de raison $r$ et de premier terme $a$ converge vers 0 si et seulement si $|r| < 1$.
2. La suite $(-n^2)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $-\infty$.

**Proposition 1.1.1.6** Soient $(u_n)$, $(v_n)$ des suites numériques convergentes vers $\ell$ et $\ell'$ respectivement et $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors $(u_n + \lambda v_n)_n$ (resp. $(u_n v_n)_n$, resp. $(\dfrac{u_n}{v_n})_n$ avec $\ell' \neq 0$) converge vers $\ell + \lambda\ell'$ (resp. $\ell\ell'$, resp. $\dfrac{\ell}{\ell'}$).

**Remarque 1.1.1.7** L'ensemble des suites numériques convergentes est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel (en fait, une $\mathbf{C}$-algèbre).

**Proposition 1.1.1.8** Soit $(u_n)$ (resp. $(v_n)$) une suite *réelle* convergente vers $\ell$ (resp. $\ell'$). On suppose $u_n \leqslant v_n$ pour $n$ assez grand. Alors $\ell \leqslant \ell'$.

**Remarque 1.1.1.9**

1. Si $u_n < v_n$ alors on n'a pas nécessairement $\ell < \ell'$ (prendre par exemple $u_n = 0 < \dfrac{1}{n} = v_n$).
2. Si $(u_n)$ diverge vers $+\infty$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$ alors $(v_n)$ diverge aussi vers $+\infty$.

**Théorème 1.1.1.10 (d'encadrement)** Soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ des suites réelles telles que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell.$$
On suppose $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang. Alors $(v_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

**Définition 1.1.1.11**

— Une partie $A \subseteq \mathbf{R}$ est *majorée par* $M \in \mathbf{R}$ si $\forall a \in A$, $a \leqslant M$.
— Une partie $A \subseteq \mathbf{C}$ est *bornée* si $\{\underbrace{|a|}_{\text{module de } a} : a \in A\}$ est majorée.
— Une suite $(u_n)$ est *bornée* si $\{u_n : n \in \mathbf{N}\}$ est bornée.

**Exemple 1.1.1.12** La suite $((-1)^n)$ est bornée (par 1) mais divergente. Plus généralement, la suite $(e^{ni\theta})$ est convergente ssi $\theta \equiv 0[2\pi]$.

**Proposition 1.1.1.13** Une suite réelle $(u_n)$ croissante (resp. décroissante) est majorée (resp. minorée) ssi $(u_n)$ est convergente. Dans ces conditions, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbf{N}\}$ (resp. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbf{N}\}$).

**Exemple 1.1.1.14**

1. Soient $I$ un intervalle de $\mathbf{R}$, $u_0 \in I$ et $f : I \to I$ une fonction croissante. On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$. Si $u_0 \leqslant u_1$ (resp. $u_0 > u_1$) alors $(u_n)$ est croissante (resp. décroissante). De plus si $(u_n)$ est convergente vers $\ell \in I$ et $f$ continue à gauche (resp. droite) en $\ell$ alors $\ell$ est un point fixe de $f$.
2. Simulation d'un échéancier d'emprunt.

   | | |
   |---|---|
   | $C$ | : capital emprunté |
   | $i$ | : taux d'intérêt mensuel «=» taux annuel/12 |
   | $m$ | : (montant de la) mensualité |
   | $N$ | : nombre de mensualités |
   | $u_n$ | : capital restant dû au bout de $n$ mois |

   $\begin{cases} u_0 &= C \\ u_{n+1} &= (1+i)u_n - m \end{cases}$ (*suite arithmético-géométrique*)

   On cherche la mensualité pour $C$, $i$, $N$ donnés.

   On remarque que $\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & (1+i)x - m \end{array}$ admet un point fixe $a = \dfrac{m}{i}$.

   $$\begin{array}{rcl} f(x) - a & = & f(x) - f(a) \\ & = & (1+i)x - m - ((1+i)a - m) \\ & = & (1+i)(x-a) \end{array}$$

   D'où $u_{n+1} - a = (1+i)(u_n - a)$ *i.e.* $u_{n+1} - \frac{m}{i} = (1+i)(u_n - \frac{m}{i})$.
   Ainsi, $(u_n - a)_n$ est une suite géométrique de raison $(1+i)$. On obtient :

   $$u_n = (1+i)^n(C-a) + a = (1+i)^n(C - \frac{m}{i}) + \frac{m}{i}.$$

   Il s'ensuit que

   $$u_N = 0 \Leftrightarrow m = ia = \frac{i(1+i)^N C}{(1+i)^N - 1}.$$

   $$\left.\begin{array}{ll} C & = 100000 \text{ euros} \\ i & = \frac{5\cdot 10^{-2}}{12} \\ N & = 7 \cdot 12 = 84 \text{ mois} \end{array}\right\} \Rightarrow m \simeq 1413.$$

   En réalité, le taux mensuel exact est donné par :

   $$(1+i)^{12} = 1 + 0{,}05 \Leftrightarrow i = 0{,}00407 \text{ (non } \textit{linéarisé}\text{) et } m \simeq 1408 < 1417 \text{ (!)}$$

**Définition 1.1.1.15** Deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ sont *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

**Théorème 1.1.1.16** Deux suites (réelles) adjacentes convergent vers la même limite.

**Définition 1.1.1.17** Une suite $(u_n)$ est *de Cauchy* si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N)(\forall p \geqslant 0) : |u_{n+p} - u_n| < \epsilon.$$

**Proposition 1.1.1.18** Une suite de Cauchy est bornée.

**Dém.** Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant N$ et $p \geqslant 0$ entraînent $|u_{n+p} - u_n| \leqslant 1$. En particulier, $\forall p \geqslant 0$, $|u_{N+p}| \leqslant |u_N| + 1$. Par conséquent, $\forall n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant \max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1)$.

**Proposition 1.1.1.19** $(u_n)$ convergente $\Rightarrow (u_n)$ de Cauchy.

**Dém.** Notons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$.
Soit $p \in \mathbf{N}$. Pour $n \geqslant N$, on a :

$$|u_{n+p} - u_n| \leqslant |u_{n+p} - \ell| + |u_n - \ell| < \epsilon.$$

*i.e.*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N)(\forall p \geqslant 0) : |u_{n+p} - u_n| < \epsilon.$$

**Théorème 1.1.1.20 (Corps complet)** $(u_n)$ de Cauchy dans $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \mathbf{C} \end{array} \right. \Leftrightarrow (u_n)$ convergente dans $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \\ \mathbf{C} \end{array} \right.$.

**Remarque 1.1.1.21** En particulier, la détermination de la limite n'est pas nécessaire pour assurer la convergence d'une suite de Cauchy *numérique*.

## 1.2 Série numérique

### 1.2.1 Généralités

**Définition 1.2.1.1** La *série de terme général* $(u_n)$ est la suite $(s_n)$ des sommes partielles de la suite $(u_n)$ *i.e.*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et est notée $\sum u_n$.

**Exemple 1.2.1.2** Soit $(u_n)$ la suite géométrique de raison $r$ et de premier terme $a$. La suite $(u_n)$ converge ssi $a = 0$ ou $r = 1$ ou $|r| < 1$ ; de plus

$$\forall n \in \mathbf{N}, s_n = \begin{cases} a\dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r} & \text{si } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{sinon.} \end{cases}$$

On traite le cas $r \neq 1$. Posons $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ avec $\left\{ \begin{array}{ll} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = r u_n \end{array} \right.$. On a :

$$\begin{array}{llllll} s_n & = & a & +ar & +\cdots & +ar^n \\ rs_n & = & & ar & +\cdots & +ar^n & +ar^{n+1} \end{array}$$

D'où $(1 - r)s_n = a(1 - r^{n+1})$ *i.e.* $s_n = \underbrace{a}_{\text{1er terme}} \dfrac{1 - r^{\overbrace{n+1}^{\text{nb de termes}}}}{1 - r}$.

Par ailleurs, à calculer $S = \sum\limits_{k=n_0}^{n_1} u_k$ avec $n_0 \leqslant n_1$. On pose $v_n = u_{n+n_0}$ pour $n \geqslant 0$ *i.e.* $\left\{ \begin{array}{ll} v_0 & = u_{n_0} \\ v_{n+1} & = r v_n \end{array} \right.$. Ainsi,

$$S = \sum_{k=0}^{n_1 - n_0} v_k = v_0 \frac{1 - r^{n_1 - n_0 + 1}}{1 - r} = u_{n_0} \frac{1 - r^{n_1 - n_0 + 1}}{1 - r} = ar^{n_0} \frac{1 - r^{n_1 - n_0 + 1}}{1 - r}.$$

**Définition 1.2.1.3** La série $\sum u_n$ est *convergente* si la limite (de la suite) des sommes partielles $(s_n)$ existe *i.e.*

$$\exists S \in \mathbf{C}, S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La *somme* $S$ de $\sum u_n$ est $S$.

**Exemple 1.2.1.4**

1. (a) $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Donc $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Dès lors, $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ a pour somme 1. Plus généralement, si $u_n = a_n - a_{n+1}$ alors $s_n = a_0 - a_{n+1}$. Donc $(s_n)$ converge ssi $(a_n)$ converge et dans ce cas $\sum u_n$ a pour somme $a_0 - \lim a_n$ (la série $\sum(a_n - a_{n+1})$ est une *série télescopique*).

   (b) Pour $k > 0$, on a $\ln(1 + \dfrac{1}{k}) = \ln(k+1) - \ln(k)$. D'où la divergence de $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1 + \dfrac{1}{n})$.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. La *série exponentielle* $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est convergente et $e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ (à justifier ultérieurement).

**Proposition 1.2.1.5** **(CN)** Soit $\sum u_n$ une série de terme général $(u_n)$.

1. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $(r_n)$ définie par $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ tend vers 0. Dans ce cas $r_n = S - s_n$ avec $s_n \to S$.

**Dém.**

1. Pour $n \geqslant 1$, $u_n = s_n - s_{n-1}$. Comme $(s_n)$ est convergente, $(s_{n-1})_{n\geqslant 1}$ l'est aussi et converge vers la même limite ; la suite $(u_n)$ converge donc vers 0.
2. $(\Rightarrow)$ Soient $n, p \in \mathbf{N}$. Posons $r_n^p = s_{n+p} - s_n$. Comme $(s_n)$ est convergente par hypothèse, il existe $S \in \mathbf{C}$ tel que $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$. Par conséquent, pour $n \in \mathbf{N}$ fixé, $r_n = \lim_{p\to+\infty} r_n^p = \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a un sens et est égal à $S - s_n$. La suite $(r_n)$ converge donc vers 0.

   $(\Leftarrow)$ Supposons que $(r_n)$ converge vers 0. Posons $S = r_0 + s_0 = r_0 + u_0$. Alors, pour $n \in \mathbf{N}$, $r_n + s_n = S$, ou encore, $r_n = S - s_n$. Comme $(r_n)$ tend vers 0, $(s_n)$ converge vers $S$ et la série $\sum u_n$ est convergente de somme $S$.

**Remarque 1.2.1.6** La suite $(r_n)$ est la suite des *restes* de la série convergente $\sum u_n$.

**Corollaire 1.2.1.7** $(u_n) \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n$ ne converge pas.

**Remarque 1.2.1.8**

1. La réciproque du 1. de la proposition est fausse.
2. Si $(u_n) \not\to 0$ alors $\sum u_n$ est *grossièrement divergente*.

**Exemple 1.2.1.9**

1. La suite géométrique de raison $r$ et de premier terme $a$ converge vers 0 ssi $a = 0$ ou $|r| < 1$. Dans ce cas, $\sum u_n$ converge vers $\dfrac{a}{1-r}$ ou 0 (dès que $a = 0$.). Par exemple, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 2$ ; de plus, $r_n = \dfrac{1}{2^n}$. Si $a \neq 0$ et $|r| \geqslant 1$ alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln(1 + \dfrac{1}{n})$ n'est pas convergente bien que $(\ln(1 + \dfrac{1}{n}))$ tende vers 0.

**Théorème 1.2.1.10** La série (réelle ou complexe) $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est de Cauchy. Autrement dit :

$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N)(\forall p \in \mathbf{N}) : |s_{n+p} - s_n| < \epsilon.$$

**Exemple 1.2.1.11** On considère la *série harmonique* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant (2n - (n+1) + 1)\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, pour $\epsilon_0 = \frac{1}{2}$, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, si $p = N$ alors $s_{N+p} - s_N = s_{N+N} - s_N = s_{2N} - s_N \geqslant \frac{1}{2}$. Donc $\forall N \in \mathbf{N}^*$, $s_{2N} - s_N \nless \epsilon_0$. Ainsi la série harmonique n'est pas de Cauchy donc elle est divergente (d'ailleurs vers $+\infty$).

**Proposition 1.2.1.12** La *nature* d'une série $\sum u_n$ reste inchangée en modifiant un nombre fini de termes de $(u_n)$ (évidemment, la somme, si elle existe peut être différente).

**Proposition 1.2.1.13 (Linéarité)** Soient $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ deux séries convergentes de somme $S$ et $S'$ respectivement.

1. La série de terme général $(u_n) + (u'_n) := (u_n + u'_n)$ converge vers $S + S'$.
2. Si $\lambda \in \mathbf{C}$ alors la série de terme général $\lambda(u_n) := (\lambda u_n)$ converge vers $\lambda S$.

**Remarque 1.2.1.14**

1. L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
2. Si l'une seule des 2 séries $\sum u_n$ ou bien $\sum v_n$ est divergente alors $\sum u_n + \sum v_n$ est aussi divergente. En revanche, si les 2 séries divergent alors il peut arriver que la somme soit convergente.

### 1.2.2 Série à termes positifs

**Proposition 1.2.2.1** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. La série est convergente ssi la suite des sommes partielles est majorée.

**Dém.** $\forall k \geqslant 0$, $u_k \geqslant 0 \Rightarrow (s_n) \nearrow$. Or, $(s_n)$ convergente $\Leftrightarrow (s_n)$ majorée.

**Corollaire 1.2.2.2 (de comparaison des séries à termes positifs)** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \leqslant v_n$ pour $n$ assez grand, alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

**Dém.** On applique la proposition précédente avec $M = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ pour majorant de la suite des sommes partielles de la suite $(u_n)$.

**Remarque 1.2.2.3** $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.

**Corollaire 1.2.2.4** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. S'il existe $C \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \leqslant C v_n$ (*i.e.* $u_n = O(v_n)$) alors

$$\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

**Dém.** La série $\sum C v_n$ converge car $\sum v_n$ converge. Donc $\sum u_n$ est dominée par $\sum C v_n$.

**Corollaire 1.2.2.5** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs. Si $\forall n \geqslant 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ alors

$$\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

**Dém.** $\forall n \geqslant 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \Leftrightarrow \forall n \geqslant 0$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{v_n}$. D'où, $\forall n \geqslant 0$, $u_n \leqslant \overbrace{\frac{u_0}{v_0}}^{C>0} v_n$.

**Corollaire 1.2.2.6** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. S'il existe $0 < C \leqslant C'$ tel que $\forall n \geqslant 0$, $C u_n \leqslant v_n \leqslant C' u_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

**Exemple 1.2.2.7**

1. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{2^n + 5}{3^n - 11}$. Alors $u_n > 0$ pour $n \geqslant 3$. De plus, $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \dfrac{1 + \frac{5}{2^n}}{1 - \frac{11}{3^n}}$. Donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, elle est donc convergente.
2. Ce corollaire fournit une nouvelle preuve de la divergence de la série harmonique par comparaison avec $\sum \ln(1 + \frac{1}{n})$. En effet, $\dfrac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, pour $n$ assez grand :

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n} \leqslant \ln(1 + \frac{1}{n}) \leqslant \frac{3}{2}\frac{1}{n}.$$

**Définition 1.2.2.8** La série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si $\sum \underbrace{|u_n|}_{\text{module de } u_n}$ est convergente.

**Théorème 1.2.2.9 (AC⇒CV)** Si $\sum u_n$ est AC alors $\sum u_n$ est CV.

**Dém.** Soit $n \in \mathbf{N}$. Posons $\alpha_n = |u_n| - Re(u_n)$. Alors $\alpha_n \geqslant 0$. De plus, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \leqslant 2 \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leqslant 2S'$ où $S'$ désigne la somme de la série $\sum |u_n|$. La série $\sum \alpha_n$ est donc convergente, tout comme la série $\sum Re(u_n)$ en tant que différence de 2 séries convergentes. En raisonnant de manière similaire sur la partie imaginaire, on conclut que $\sum u_n$ est convergente.

**Remarque 1.2.2.10**

1. Il existe des séries CV non AC ! elles sont *semi-convergentes*
$$\Big(\sum u_n \text{ avec } u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{p+1} & \text{si } n = 2p \\ -\dfrac{1}{p+1} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}\Big)$$
donc ($\Leftarrow$) est fausse.
2. Si $\sum u_n$ est AC alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

**Intégrale généralisée**

**Définition 1.2.2.11** Soit $f : [a+\infty[ \to \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux. L'*intégrale généralisée* (ou *impropre*)
$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \textit{ converge}$$
si $\lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)dt$ existe et on note
$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)dt.$$
Sinon, l'intégrale généralisée *diverge*.

**Remarque 1.2.2.12** Si $f$ est continue alors $F(X) = \int_a^X f(t)dt$ est la primitive de $f$ s'annulant en $a$ et
$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{X\to+\infty} F(X)$$
dès que l'un des membres de l'égalité existe.

**Exemple 1.2.2.13** *Intégrale de Riemann d'exposant $\alpha$ (impropre en $+\infty$)* . Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} : \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$
car
$$\int_1^X \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{1-\alpha}\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^X & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\ln(t)]_1^X & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(X) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

**Remarque 1.2.2.14** *Intégrale de Riemann d'exposant $\alpha$ (impropre en 0)* . Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.
$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} : \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha \geqslant 1 \end{cases}.$$
En effet, si $0 < \epsilon \leqslant 1$ alors
$$\int_\epsilon^1 \frac{dt}{t^\alpha} \overset{u=\frac{1}{t}}{=} \int_{\frac{1}{\epsilon}}^1 \frac{-\frac{du}{u^2}}{u^{-\alpha}} = \int_1^X \frac{du}{u^{2-\alpha}} \text{ avec } X = \frac{1}{\epsilon}.$$
Or, $2-\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < 1$. D'où le résultat en passant à la limite sur $\epsilon$.

**Proposition 1.2.2.15 (Critère de Cauchy pour les limites de fonction)** Soient $x_0 \in [a,b]$ et $g : [a,b[ \to \mathbf{R}$ une application. Alors

$$\lim_{x\to x_0} g(x) \text{ existe}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x, y \in [a,b[ : |x - x_0| < \eta, |y - x_0| < \eta) : |g(x) - g(y)| < \epsilon.$$

**Remarque 1.2.2.16** On a une proposition analogue pour la limite en $+\infty$.

**Théorème 1.2.2.17 (Critère de Cauchy pour les intégrales)** Soit $f : [a,+\infty[ \to \mathbf{R}$ continue par morceaux.

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge} \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists X \geqslant a)(\forall B \geqslant A \geqslant X) : \left|\int_A^B f(t)dt\right| < \epsilon.$$

**Dém.** On applique le critère de Cauchy pour la limite en $+\infty$ à la fonction $F$.

**Exemple 1.2.2.18 (Intégrale de Fresnel)** On considère $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$ (impropre en $+\infty$). En posant $x = t^2$, on obtient

$$\text{pour } B \geqslant A > 0, \ \int_A^B \cos t^2 dt = \int_{A^2}^{B^2} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} dx.$$

En intégrant par partie, il vient :

$$\left[\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\right]_{A^2}^{B^2} + \frac{1}{4}\int_{A^2}^{B^2} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

D'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$.

**Définition 1.2.2.19** Une application $f : [a,+\infty[ \to \mathbf{R}$ est *absolument intégrable* si

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$$

converge. Dans ce cas, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est *absolument convergente*.

**Théorème 1.2.2.20** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

**Dém.** Soit $\epsilon > 0$. Comme $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge, il existe $X \geqslant a$ tel que $\forall B \geqslant A \geqslant X$ : $\displaystyle\int_A^B |f(t)|dt < \epsilon$. Or, $|\displaystyle\int_A^B f(t)dt| \leqslant \int_A^B |f(t)|dt$.

**Exemple 1.2.2.21** On considère $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Comme $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0, il suffit d'étudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Soit $X \geqslant 1$, on a :

$$\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Or, $\displaystyle\int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument intégrable d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

**Proposition 1.2.2.22** Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}_+$. Alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge ssi } (\exists M \in \mathbf{R}_+)(\forall x \in [a, +\infty[) : \int_a^x f(t)dt \leqslant M.$$

**Dém.** Comme $f \geqslant 0$, $X \mapsto \int_a^X f(t)dt$ est croissante. Donc $\lim_{X\to+\infty} \int_a^X f(t)dt$ existe si et seulement si $X \mapsto \int_a^X f(t)dt$ est majoré.

**Exemple 1.2.2.23** *Intégrale de Bertrand.* Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

$$\int_1^{+\infty} t^\beta e^{\alpha t} dt : \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \alpha < 0 \text{ ou } (\alpha = 0 \text{ et } \beta < -1) \\ \text{diverge} & \text{si } \alpha > 0 \text{ ou } (\alpha = 0 \text{ et } \beta \geqslant -1) \end{cases}.$$

car si

1. $\alpha < 0$, $t^\beta e^{\alpha t} < \frac{1}{t^2}$ pour $t >> 1$ ; l'intégrale impropre (en $+\infty$) est majorée. D'où la convergence.
2. $\alpha = 0$, l'intégrale de Bertrand est une intégrale de Riemann d'exposant $-\beta$.
3. $\alpha > 0$, $t^\beta e^{\alpha t} > 1$ pour $t >> 1$ ; l'intégrale impropre n'est pas majorée. D'où la divergence.

**Proposition 1.2.2.24** Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbf{R}_+$. Alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge ssi } \exists (X_n) \subseteq [a, +\infty[ \text{ avec } \lim X_n = +\infty : (\int_a^{X_n} f(t)dt)_n \text{ converge.}$$

**Dém.**
($\Rightarrow$) immédiat.
($\Leftarrow$) Soit $(X_n)$ une suite réelle qui diverge vers $+\infty$ telle que $(\int_a^{X_n} f(t)dt)$ converge vers $\ell := \lim_{n\to+\infty} \int_a^{X_n} f(t)dt = \sup_{n\in\mathbf{N}} \int_a^{X_n} f(t)dt$. Comme $f \geqslant 0$, la fonction $[a, +\infty[\ni x \overset{F}{\mapsto} \int_a^x f(t)dt$ est croissante.
Soit $x \geqslant a$. Comme $(X_n)$ diverge vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $X_N \geqslant x$. En particulier,

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_a^{X_N} f(t)dt \leqslant \ell.$$

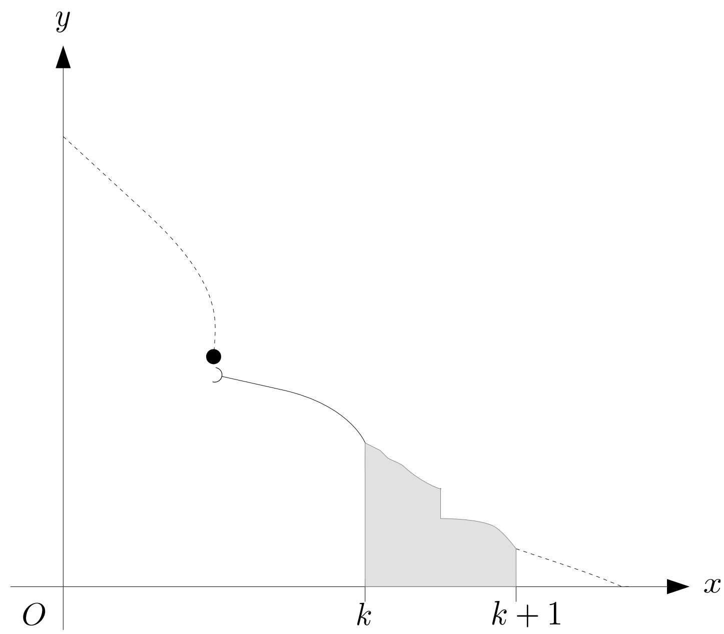
Il s'ensuit que $F$ (croissante) est majorée donc $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe (et est en fait égale à $\ell$).

**Remarque 1.2.2.25** Attention, $f \geqslant 0$.

**Proposition 1.2.2.26** Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbf{R}_+$. Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f}{g}(x) = l > 0$ alors les intégrales généralisées $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.

**Théorème 1.2.2.27 (de comparaison entre une série et une intégrale)** Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ décroissante. Alors $\sum_{n\geq 0} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

**Dém.** Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $u_n = f(n)$. On a donc




$$\forall k \geqslant 0, u_{k+1} = f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k) = u_k.$$

En sommant terme à terme, il vient :

$$s_{n+1} - u_0 = \sum_{k=1}^{n+1} u_k \leqslant \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k = s_n.$$

On conclut que la série à termes positifs $\sum u_n$ et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.

**Remarque 1.2.2.28** Si $f$ (positive !) tend vers $\ell \in \overline{\mathbf{R}}_+ - \{0\}$ à l'infini alors la série $\sum f(n)$, tout comme l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$, est évidemment divergente. Ainsi, $\sum u_n$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature ici aussi.

**Corollaire 1.2.2.29** **(Séries de Riemann d'exposant $\alpha$)** Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est

$$\begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha \leqslant 1 \end{cases}$$

**Dém.** On applique le théorème précédent (et sa remarque) à la fonction $f : [1, +\infty[ \to \mathbf{R}_+$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.

**Remarque 1.2.2.30** On ne connait pas en général la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ (sauf pour quelques valeurs de $\alpha$).

**Corollaire 1.2.2.31 (Séries de Bertrand)** Soit $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est

$$\begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1) \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha < 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta \leqslant 1) \end{cases}$$

**Dém.** Posons $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ pour $x > 1$. D'après le théorème de comparaison à une intégrale (et sa remarque), $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ est de même nature que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$. Or,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta(x)} \overset{x=e^u}{=} \int_{\ln(2)}^{+\infty} \frac{e^u du}{e^{\alpha u} u^\beta} = \int_{\ln(2)}^{+\infty} e^{(1-\alpha)u} u^{-\beta} du.$$

Cette dernière intégrale impropre est une intégrale de Bertrand donc :

$$\int_{\ln(2)}^{+\infty} e^{(1-\alpha)u} u^{-\beta} du \begin{cases} \text{converge} & \text{si } 1-\alpha < 0 \text{ ou } (1-\alpha = 0 \text{ et } \beta > 1) \\ \text{diverge} & \text{si } 1-\alpha > 0 \text{ ou } (1-\alpha = 0 \text{ et } \beta \leqslant 1) \end{cases}$$

**Remarque 1.2.2.32** Les séries géométriques, de Riemann ou de Bertrand sont des séries de *référence* (échelle) auxquelles on peut comparer une série donnée.

### 1.2.3 Règles de convergence

**Comparaison à une série géométrique**

**Proposition 1.2.3.1 (Règle de d'Alembert)** Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n \neq 0$ pour $n$ assez grand et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est (absolument) convergente.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.

**Dém.**

1. Soit $\ell < \ell' < 1$. Pour $n$ assez grand, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \ell' = \dfrac{\ell'^{n+1}}{\ell'^n}$. D'où la convergence absolue de $\sum u_n$.
2. Pour $n$ assez grand, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ *i.e.* $|u_{n+1}| \geqslant |u_n| > 0$ et la divergence grossière de $\sum u_n$ s'ensuit.

**Remarque 1.2.3.2** Lorsque la limite $\ell$ est égale à 1 alors on est dans le «cas douteux» ; essayer une règle plus fine.

**Exemple 1.2.3.3**

1. Soit $z \in \mathbf{C}$. La série *exponentielle* $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est (absolument) convergente sur $\mathbf{C}$. En effet, si $z \neq 0$ alors $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Si $u_n = \dfrac{1}{n}(> 0)$ alors $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (série de Riemann divergente car $\alpha = 1 \leqslant 1$).

3. Si $u_n = \frac{1}{n^2} (> 0)$ alors $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$).

**Remarque 1.2.3.4** La règle de d'Alembert exige une con/divergence «forte» pour conclure.

**Proposition 1.2.3.5** **(Règle de Cauchy)** Soit $\sum u_n$ une série telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ est (absolument) convergente.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.

**Dém.**

1. Soit $\ell < \ell' < 1$. Alors, pour $n$ assez grand, $|u_n| \leqslant \ell'^n$. D'où la convergence absolue de $\sum u_n$.
2. Pour $n$ assez grand, $|u_n| \geqslant 1$. D'où la divergence grossière de $\sum u_n$.

**Exemple 1.2.3.6** Considérons $u_n = 3^{-n^2}$ ; on a : $\sqrt[n]{|u_n|} = 3^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$. D'où la convergence absolue de $\sum u_n$.

**Remarque 1.2.3.7** Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n \neq 0$ (pour $n$ assez grand).
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \ell$.
Commentaire : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|}$ n'existe pas ou est égale à 1 alors la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure non plus (sinon la règle de Cauchy aurait déjà donné la conclusion).

### Comparaison à une série de Riemann

**Proposition 1.2.3.8** **(Règle de Riemann)** Soit $\sum u_n$ une série réelle.

1. $\exists \alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0 \Rightarrow \sum u_n$ converge (absolument).
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}} - \{0\} \Rightarrow \sum u_n$ diverge.

**Dém.**

1. Pour $n >> 1$, $|u_n| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$. On conclut que $\sum u_n$ est absolument convergente par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ d'exposant $\alpha > 1$.
2. On peut supposer que $u_n$ est de signe positif pour $n >> 1$, donc $\ell > 0$. En remarquant que $u_n \geqslant \min(\frac{\ell}{2}, 1)\frac{1}{n}$ (pour $n >> 1$), on conclut à la divergence de $\sum u_n$.

**Remarque 1.2.3.9**

1. S'il existe $\alpha' > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha'} u_n = \ell \in \mathbf{R}$ alors pour tout $1 < \alpha < \alpha'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$. En particulier pour $\alpha = \frac{\alpha' + 1}{2} > 1$. D'où la convergence aussi dans ce cas.
2. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = \ell \in \overline{\mathbf{R}} - \{0\}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = \ell' \in \{-\infty, +\infty\}$. D'où la divergence de $\sum u_n$ dans ce cas aussi.

**Exemple 1.2.3.10** Soit $u_n = \dfrac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$ pour $n \geqslant 1$. On a :

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{\ln n^{\frac{\ln n}{n}}} = e^{-\frac{(\ln n)\ln(\ln n)}{n}} \text{ pour } n \geqslant 2.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = 1$ ; en particulier, les règles de Cauchy et de d'Alembert échouent.
Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, $n^\alpha u_n = e^{-(\ln n)(\ln(\ln n)-\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, $n^{\frac{3}{2}} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où la convergence (absolue) de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$.

**Proposition 1.2.3.11** **(Règle de Duhamel)** Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs pour $n$ assez grand et $\alpha \in \mathbf{R}$. On suppose :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$$

1. Si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

**Dém.**

1. Soit $1 < \beta < \alpha$. Alors pour $n >> 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 - \dfrac{\beta}{n} + o(\dfrac{1}{n}) = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^\beta = \dfrac{\frac{1}{(n+1)^\beta}}{\frac{1}{n^\beta}}$. D'où la convergence de $\sum u_n$.
2. Soit $\alpha < \beta < 1$. Alors pour $n >> 1$, $\dfrac{\frac{1}{(n+1)^\beta}}{\frac{1}{n^\beta}} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. D'où la divergence de $\sum u_n$.

**Exemple 1.2.3.12** Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère

$$u_n = \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!}.$$

Alors $u_n$ est de signe constant pour $n$ assez grand (suite *presque nulle* pour $a \in \mathbf{Z}_-^*$). Soit $a \notin \mathbf{Z}_-^*$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(a+n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Plus précisément,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= 1 + \frac{a}{n+1} = 1 + \frac{a}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= 1 + \frac{a}{n}(1+o(1)) = 1 + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{-a}{n} + o(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

On conclut que $\sum u_n$ converge si et seulement si $a \leqslant -1$.

### 1.2.4 Série alternée

**Définition 1.2.4.1** Une série réelle $\sum u_n$ est *alternée* si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n u_{n+1} \leqslant 0$. Autrement dit, il existe une suite positive $(a_n)$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$ ou $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = (-1)^{n+1} a_n$.

**Exemple 1.2.4.2** La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ est alternée (*harmonique alternée*).
Dans ce qui suit, on traitera uniquement le cas de $u_n = (-1)^n a_n$.

**Théorème 1.2.4.3 (Règle de Leibniz)** Soit $\sum (-1)^n a_n$ une série alternée. Si $(a_n)$ est décroissante (à partir d'un certain rang) et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ alors $\sum(-1)^n a_n$ converge et $\forall n >> 1$, $|r_n| \leqslant |u_{n+1}| = a_{n+1}$ ; de plus, $r_n$ est du signe de $u_{n+1}$.
**Dém.** Pour $p$ assez grand, on a :

$$\begin{cases} s_{2p+2} & = s_{2p} - a_{2p+1} + a_{2p+2} \leqslant s_{2p} \\ s_{2p+3} & = s_{2p+1} + a_{2p+2} - a_{2p+3} \geqslant s_{2p+1}. \end{cases}$$

De plus, $s_{2p+1} - s_{2p} = -a_{2p+1}$.
Posons $v_p = s_{2p}$ et $w_p = s_{2p+1}$. Alors $(v_p)_{p>>1} \searrow$, $(w_p)_{p>>1} \nearrow$ et $\lim_{p\to+\infty} w_p - v_p = 0$.
Ainsi, $(v_p)$ et $(w_p)$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite $S$. En outre, comme $(s_{2p})_p$ et $(s_{2p+1})_p$ convergent vers $S$, $(s_n)_n$ converge aussi vers $S$. Enfin, $(s_{2p}) \searrow S$ (resp. $(s_{2p+1}) \nearrow S$) donc pour $p$ suffisamment grand :

$$s_{2p+1} \leqslant S \leqslant s_{2p+2} \leqslant s_{2p}.$$

D'où

$$|r_n| = |S - s_n| \leqslant \begin{cases} s_{2p} - s_{2p+1} = a_{2p+1} & \text{si } n = 2p \\ s_{2p+2} - s_{2p+1} = a_{2p+2} & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

donc pour tout $n$ assez grand, $|r_n| \leqslant a_{n+1}$.
Finalement, $r_n = S - s_n = \begin{cases} S - s_{2p} \leqslant 0 & \text{si } n = 2p \\ S - s_{2p+1} \geqslant 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$. Par suite, $S - r_n$ est du signe de $u_{n+1}$.

**Exemple 1.2.4.4** La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge ; en effet,

$$\left.\begin{array}{ll} (\frac{1}{n})_{n\geqslant 1} & \text{est réelle décroissante} \\ \frac{1}{n} & \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge (est semi-convergente !).}$$

**Remarque 1.2.4.5** $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge aussi ! (vers l'opposé de la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$).

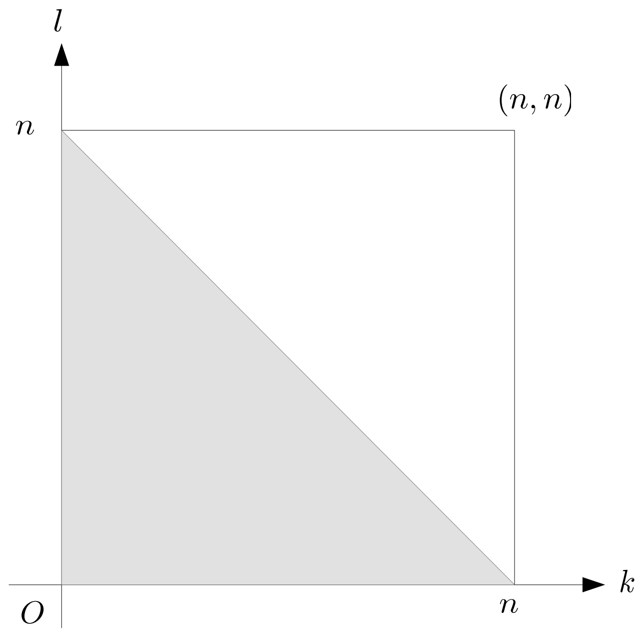
### 1.2.5 Produit de séries

**Définition 1.2.5.1** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. Le *produit de Cauchy* $\overset{\textit{produit de convolution}}{\sum u_n * \sum v_n}$ est la série $\sum w_n$ de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k+l=n} u_k v_l$ pour $n \in \mathbf{N}$.

**Remarque 1.2.5.2** $\sum u_n * \sum v_n \neq \sum (u_n v_n)$.

**Proposition 1.2.5.3** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes de somme $U$ et $V$ respectivement. Alors $\sum u_n * \sum v_n$ est absolument convergente de somme $U.V$.

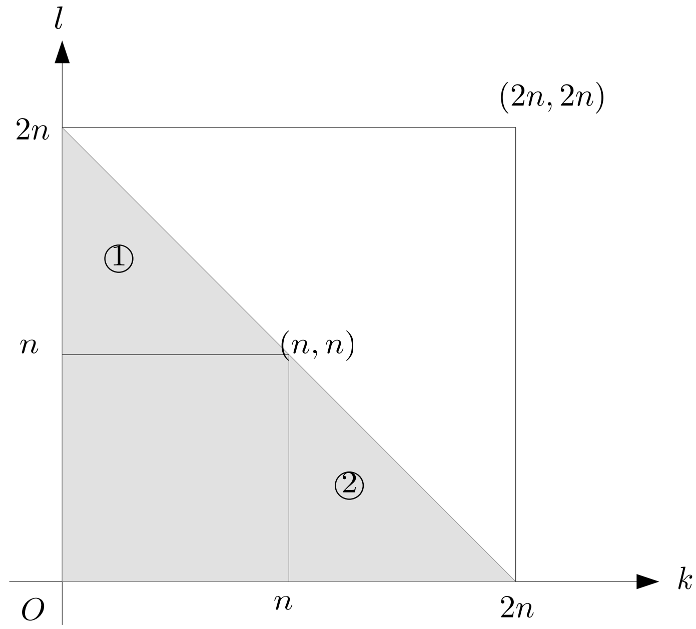
**Dém.** Soit $n \in \mathbf{N}$. Posons $s_n = \sum_{d=0}^{n} w_d$ et $\bar{s}_n = \sum_{d=0}^{n} |w_d|$. On a :




$$\bar{s}_n = \sum_{d=0}^{n} |w_d| = \sum_{d=0}^{n} \left| \sum_{k=0}^{d} u_k v_{d-k} \right| \leqslant \sum_{d=0}^{n} \sum_{k=0}^{d} |u_k||v_{d-k}| \leqslant \left( \sum_{k=0}^{n} |u_k| \right) \left( \sum_{l=0}^{n} |v_l| \right) \leqslant \bar{U}\bar{V}.$$

Ainsi, la série $\sum |w_n|$ de terme général positif est majorée donc convergente. Par suite, la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

Maintenant,




$$\left|s_{2n}-\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)\left(\sum_{l=0}^{n}v_l\right)\right| = \left|\sum_{(k,l)\in①\cup②}u_kv_l\right| \leqslant \sum_{(k,l)\in①\cup②}|u_k||v_l|$$
$$\leqslant \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{2n}|u_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{2n}|v_l|\right)-\left(\sum_{k=0}^{n}|u_k|\right)\left(\sum_{l=0}^{n}|v_l|\right)}_{\bar{s}_{2n}(u)\bar{s}_{2n}(v)-\bar{s}_n(u)\bar{s}_n(v)}.$$

Ainsi, la suite extraite $(s_{2n})_n$ de la suite convergente $(s_n)_n$ converge vers $UV$ car

$$\bar{s}_{2n}(u)\bar{s}_{2n}(v)-\bar{s}_n(u)\bar{s}_n(v)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

On conclut que $(s_n)$ converge également vers $UV$.

**Théorème 1.2.5.4 (de Mertens)** Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente vers $U$ et $\sum v_n$ une série convergente vers $V$. Alors $\sum u_n * \sum v_n$ est convergente de somme $U.V$.

**Exemple 1.2.5.5** D'après la règle de d'Alembert, $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z\in\mathbf{C}$ (le cas $z=0$ est évident). Soient $a,b\in\mathbf{C}$. On a donc

$$\sum\frac{a^n}{n!} * \sum\frac{b^n}{n!} \text{ converge vers } e^ae^b.$$

Or, $w_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}}a^kb^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!}$. D'où :

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}}_{e^{a+b}} = e^a.e^b$$
$$= e^a.e^b$$

### 1.2.6 Théorème d'Abel

**Théorème 1.2.6.1 (d'Abel)** Soit $\sum u_n$ une série telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \alpha_n a_n$ et

1. la suite $(A_n)$ des sommes partielles de $(a_n)$, $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée ;
2. la suite $(\alpha_n)$ tend vers 0 ;
3. la série $\sum |\alpha_n - \alpha_{n+1}|$ est convergente.

Alors $\sum u_n$ est convergente.

**Corollaire 1.2.6.2** Soit $\sum u_n$ une série telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = \alpha_n a_n$ et

1'. la suite $(A_n)$ est bornée ;

2'. la suite $(\alpha_n)$ est réelle décroissante et tend vers 0.

Alors $\sum u_n$ est convergente.

**Dém.** Théorème $\Rightarrow$ corollaire (que l'on invoque souvent en pratique).
L'hypothèse générale est vérifiée.
1'. est la même condition que 1.
2. est satisfaite car $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.
3. Comme $(\alpha_n)$ est réelle décroissante, $|\alpha_n - \alpha_{n+1}| = \alpha_n - \alpha_{n+1}$ ; d'où

$$\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k - \alpha_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) = \alpha_0 - \alpha_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha_0.$$

**Remarque 1.2.6.3** Si $a_n = (-1)^n$ alors le corollaire est une réécriture de la règle (de convergence) de Leibniz.

**Exemple 1.2.6.4** Soit $\theta \in ]0, 2\pi[$ ; à étudier $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}$.

Posons $\begin{cases} a_n = \cos(n\theta) \\ \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ réelle décroissante et tend vers } 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = Re(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}) &= Re(e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}}) \\
&= Re\left( e^{i\theta} \frac{e^{in\frac{\theta}{2}} (e^{-in\frac{\theta}{2}} - e^{in\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}} (e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})} \right) = Re\left( e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right) \\
&= Re\left[ \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \left( \cos \frac{(n+1)\theta}{2} + i \sin \frac{(n+1)\theta}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \cos \frac{(n+1)\theta}{2} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Au passage, on trouve $\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \sin \frac{(n+1)\theta}{2} \frac{\sin \frac{n\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$.
(Ces égalités sont d'ailleurs encore valables –en passant à la limite sur $\theta$– (mais peuvent dépendre de $n$) avec $\theta \equiv 0[2\pi]$ pour lesquelles on obtient respectivement $\pm n$ et 0.)
D'après le (corollaire du) théorème d'Abel, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}$ (tout comme $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$) est donc convergente.

# Chapitre 2

# Série de fonctions

## 2.1 Généralités

### 2.1.1 Suite de fonctions

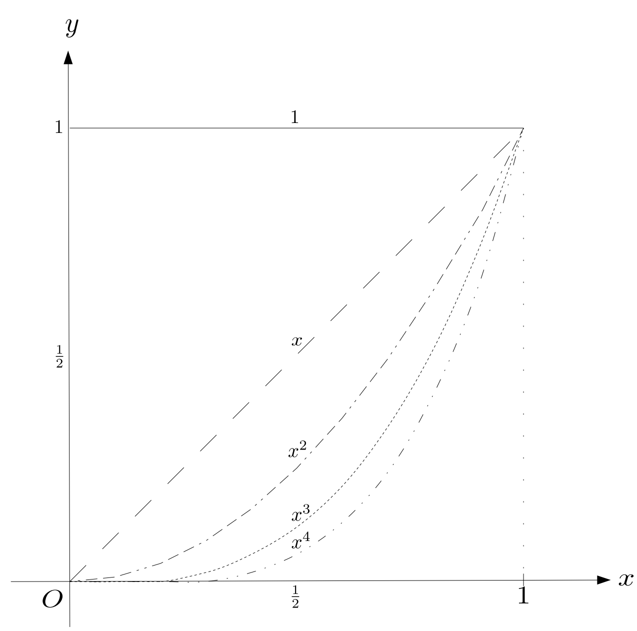
Soit $X \subseteq \mathbf{C}$ fixé et $n \geqslant 0$,

$$f_n : \begin{array}{ll} X & \to \mathbf{C} \\ x & \mapsto f_n(x) \end{array} \qquad \text{une fonction.}$$

**Définition 2.1.1.1** Une *suite de fonctions* $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille de fonctions définies sur un ensemble commun $X$, indicée par $\mathbf{N}$ ; pour $n \geqslant 0$, l'expression de $f_n$ dépend de $n$ et $x$ (éventuellement trivialement).

**Exemple 2.1.1.2** Soit $X = [0,1]$, pour $n \geqslant 0$,

$$f_n : \begin{array}{ll} [0,1] & \to \mathbf{R} \\ x & \mapsto x^n \end{array}$$




Représentation graphique de $(f_n)_{0\leqslant n\leqslant 4} : [0,1] \to \mathbf{R}$

**Convergence simple**

**Définition 2.1.1.3** Soient $Y \subseteq X$ et $f : Y \to \mathbf{C}$ une fonction. La suite $(f_n)$ *converge simplement* (CS) vers $f$ sur $Y$ si

$$\forall x \in Y, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

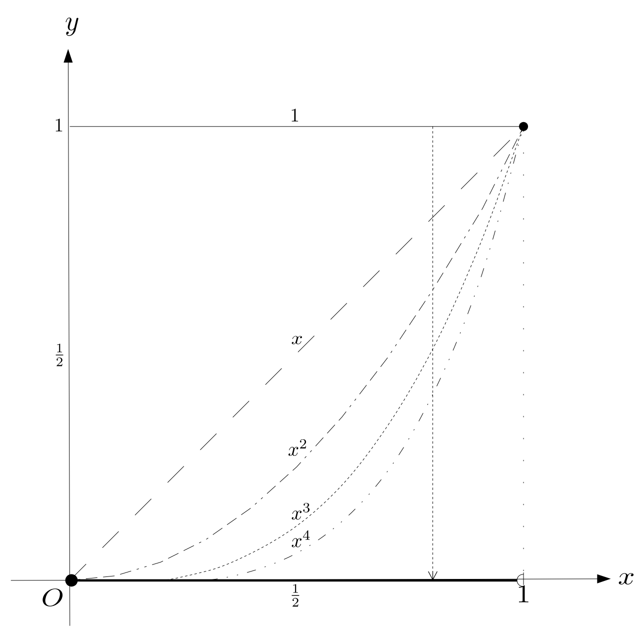
On note $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{CS}{\longrightarrow}} f$ sur $Y$.

**Remarque 2.1.1.4** Autrement dit :

1. $\forall x \in Y$, $(f_n(x) - f(x)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. $(\forall x \in Y)(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N) : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
3. Pour tout $x \in Y$, la suite numérique $\underbrace{(f_n(x))_n}_{x \text{ fixé}}$ est convergente. ; donc la limite (si elle existe) $f$ de $(f_n)$ est unique. Si $(f_n)$ est convergente sur $Y$ alors :
$$\begin{aligned} f : \quad Y &\to \mathbf{C} \\ x &\mapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x). \end{aligned}$$
4. À $x$ arbitrairement fixé dans $Y$, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbf{C}$.

**Exemple 2.1.1.5** Soit $x \in [0, 1]$. Distinguons 2 cas :

1. $0 \leqslant x < 1$ : $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$
2. $x = 1$ : $\lim_{n\to+\infty} x^n = 1$




$$(f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f = 1_{\{1\}}$$

Ainsi $(f_n)$ converge simplement vers
$$\begin{aligned} f : \quad [0, 1] &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque 2.1.1.6**

1. Si $\begin{array}{ll} g_n : & \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ & x \mapsto x^n \end{array}$ alors $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} f$ sur $[0,1]$ mais $(g_n)$ ne converge pas (sur $\mathbf{R}$, prendre $\left\}\begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \end{array}\right.$ par exemple). En revanche, $(g_n)$ converge vers

$$\begin{array}{rccl} g : & ]-1,1] & \to & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases} \end{array}$$

sur $]-1,1]$.

2. Même si $(f_n)$ est une suite monotone de fonctions continues (monotones) sur un intervalle compact, la limite $f$ peut être discontinue... (la convergence simple est insuffisante pour préserver la continuité).
3. Dans l'exemple ci-dessus, on trouve :
   (a) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to1^-}\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to1^-} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to1^-} x^n = 1 = f(1)$

## 2.1.2 Série de fonctions

Soient $X \subseteq \mathbf{C}$ et $(f_n) : X \to \mathbf{C}$ une suite de fonctions.

**Définition 2.1.2.1** La *série de fonctions* $\sum f_n$ est la suite des sommes partielles $(S_n)$, où $S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$, de la suite $(f_n)$ *i.e.*

$$(\forall x \in X)(\forall n \in \mathbf{N}), S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

**Exemple 2.1.2.2** Si $\begin{array}{lll} f_n : & [0,1] & \to \mathbf{R} \\ & x & \mapsto n \cdot x \end{array}$ alors $\sum f_n$ est la suite de fonctions $(S_n)$ définie par $S_n(x) := \dfrac{n(n+1)}{2} \cdot x$ pour $x \in [0,1]$.

**Convergence simple**

**Définition 2.1.2.3** La série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement (CS)* vers $S$ sur $Y \subseteq X$ si $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} S$ sur $Y$ ; on note aussi $\sum f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} S$ sur $Y$. Autrement dit,

$$\forall x \in Y, S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(x).$$

La *somme* de la série est la *fonction* $S : Y \to \mathbf{C}$ définie par

$$\forall x \in Y, S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

**Exemple 2.1.2.4**

1. La série $\sum n \cdot x$ converge sur $Y = \{0\}$.
2. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers $S \equiv \dfrac{1}{1-x}$ mais diverge sur $[-1,1]$.
3. Posons, pour $n \in \mathbf{N}$, $g_n = f_{n+1} - f_n$. Alors $\sum\limits_{k=0}^{n} g_k = f_{n+1} - f_0$. Ainsi, l'étude d'une suite de fonctions est un cas particulier de l'étude d'une série de fonctions.

**Proposition 2.1.2.5** Si $\sum f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} S$ sur $Y \subseteq X$ alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} 0$ sur $Y$.

**Dém.** Soit $x \in Y$. Comme la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente, la suite des sommes partielles $(S_n(x))$ est convergente vers $S(x)$. En particulier, $(S_n(x) - S_{n-1}(x))_{n\geqslant 1}$ est une suite numérique qui converge vers 0. Or, pour $n \geqslant 1$, $S_n(x) - S_{n-1}(x) = f_n(x)$.

**Remarque 2.1.2.6** Tout comme dans le cas des séries numériques, la convergence du terme général $f_n$ vers 0, ne présume pas de la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

**Convergence normale**

**Définition 2.1.2.7** La série $\sum f_n$ converge *normalement (CN)* sur $Y$ si il existe une série réelle à termes positifs $\sum \alpha_n$ convergente telle que

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\forall x \in Y), |f_n(x)| \leqslant \alpha_n.$$

(*ou, plus généralement,* $(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N)(\forall x \in Y), |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$.)

**Exemple 2.1.2.8**

1. Soit $0 < a < 1$. La série $\sum x^n$ est normalement convergente sur $[-a,a]$ car la série de terme général $(\alpha_n) = (a^n)$ est convergente et $(\forall n \in \mathbf{N})(\forall x \in [-a,a]), |x^n| \leqslant \alpha_n$.
2. En revanche, $\sum x^n$ n'est pas normalement convergente sur $]-1,1[$ car $\forall n \in \mathbf{N}$, $\|x^n\|_\infty = 1$. Dés lors, si une telle suite $(\alpha_n)$ existait on aurait $\alpha_n \geqslant 1$ ; la série $\sum \alpha_n$ serait donc divergente.
3. Même si $\sum f_n$ converge (*uniformément*) et $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il est possible que $\sum f_n$ ne converge pas normalement. En effet, si $f_n = \frac{1}{n+1} 1_{\{\frac{1}{n+1}\}} : [0,1] \to \mathbf{R}$ pour $n \in \mathbf{N}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ et $\sum f_n$ converge (*uniformément*) mais $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

**Remarque 2.1.2.9** On peut reformuler la définition de la manière suivante : $\sum f_n$ est normalement convergente sur $Y$ s'il existe une série à termes positifs convergente $\sum \alpha_n$ telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sup\limits_{x\in Y} |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$. On note $\|f\|_{\infty,Y} := \sup\limits_{x\in Y} |f(x)|$ (on omet l'indication $Y$ dans la notation $\|\cdot\|_{\infty,Y}$ si aucune confusion n'est à craindre).

**Proposition 2.1.2.10** Si $\sum f_n$ converge normalement sur $Y$ alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ sur $Y$ *indépendamment* de $x \in Y$.

**Dém.** Par définition de la convergence normale, $(\forall x \in Y)(\forall n \in \mathbf{N})$, $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$ (indépendant de $x$). D'où le résultat car $(\alpha_n)$ tend vers 0 (car $\sum \alpha_n$ converge).

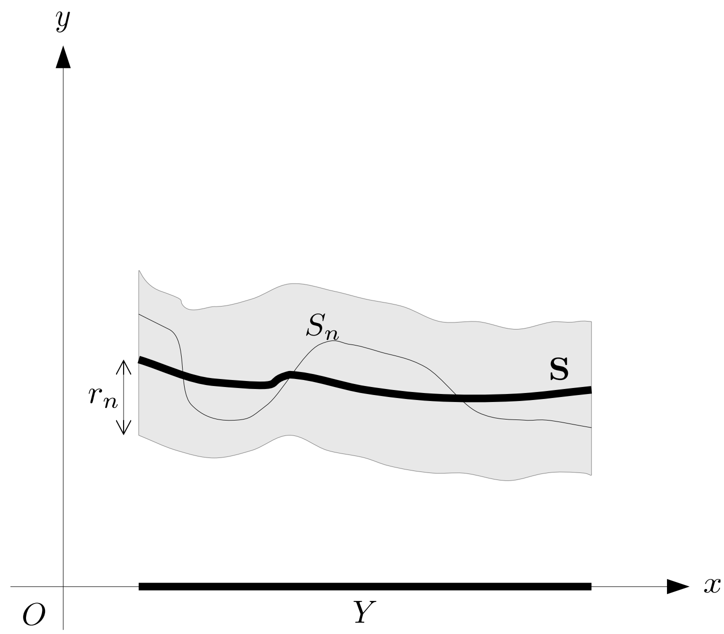
**Remarque 2.1.2.11** Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$.

**Proposition 2.1.2.12** Si $\sum f_n$ converge normalement sur $Y$ alors

$$\exists S : Y \to \mathbf{R}, \sum f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} S \text{ sur } Y.$$

**Dém.** Soit $x \in Y$. Comme $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, posons $S(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Par définition, on a $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |f_n(x)| \leqslant r_n$ où $(r_n)$ désigne la suite des restes de la série numérique $\sum \alpha_n$ *i.e.* $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} S$ sur $Y$.

**Remarque 2.1.2.13** À nouveau, on observe ici que la convergence est indépendante de $x \in Y$ (car on a $\|S - S_n\|_\infty \leqslant r_n$).




$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CN} S$ sur $Y$

**Théorème 2.1.2.14 (Interversion des limites)** Soient $\sum f_n$ une série de fonctions sur $X \subseteq \mathbf{C}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ et $a \in \mathbf{C}$.

$$\left.\begin{array}{l} \sum f_n \text{ converge normalement sur } X \\ \forall n \in \mathbf{N}, b_n = \lim\limits_{x\to a} f_n(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} b_k = \ell \in \mathbf{C} \\ \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \ell \end{array}\right.$$

**Dém.** Pour tout $x \in X$ et $n, p \in \mathbf{N}$, $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \leqslant r_n$. Notons, pour $n \in \mathbf{N}$, $\ell_n = \lim\limits_{x\to a} S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. En passant à la limite sur $x$ dans l'inégalité précédente, il vient $|\ell_{n+p} - \ell_n| \leqslant r_n$. Ainsi $(\ell_n)$ est de Cauchy dans $\mathbf{C}$ donc converge vers une limite $\ell = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$. Notons $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. Alors,

$$(\forall x \in X)(\forall n \in \mathbf{N}), |S(x) - \ell| \leqslant |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - \ell| \leqslant r_n + |S_n(x) - \ell|.$$

Maintenant, soit $\epsilon > 0$ et $x \neq a$. Il existe $N \in \mathbf{N}$ et $\delta_{\epsilon,N} > 0$ tels que

$$r_N < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } |x - a| < \delta \Rightarrow |S_N(x) - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$$

(car $|S_N(x) - \ell| \leqslant |S_N(x) - \ell_N| + |\ell_N - \ell|$).
Autrement dit,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \neq a, |x - a| < \delta \Rightarrow |S(x) - \ell| < \epsilon.$$

D'où $\lim\limits_{x\to a} S(x) = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x) = \ell$.

**Remarque 2.1.2.15**

1. En réalité, un notion de convergence plus faible que la convergence normale (*convergence uniforme*) mais non traitée ici est suffisante.
2. La proposition peut se réécrire sous la forme condensée suivante : si $\sum f_n$ est normalement convergente et $\forall n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe alors
$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} S_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} S_n(x).$$
3. On a un énoncé analogue avec $a = \pm\infty$.

**Exemple 2.1.2.16**

1. L'exemple de la suite de fonctions $(f_n)_n \equiv (x^n)_n$ sur $[0,1]$ se reformule à l'aide de la série télescopique $\sum(f_n - f_{n+1})$ qui converge normalement sur $[0,a]$ pour $0 \leqslant a < 1$ mais pas sur $[0,1[$ (car $|x^n - x^{n+1}| = |x^n(1-x)| \leqslant (1-\frac{1}{n})^n \frac{1}{n} \leqslant \alpha_n$). On trouve d'ailleurs :
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to a} \left(1 - x^{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - a^{n+1}\right) = 1 = \lim\limits_{x\to a} 1 = \lim\limits_{x\to a} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - x^{n+1}\right) & \text{si } a < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to 1^-} \left(1 - x^{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - 1^{n+1}\right) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = \lim\limits_{x\to 1^-} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - x^{n+1}\right) & \text{si } a = 1 \end{cases}$$
2. Considérons maintenant la série géométrique $\sum x^n$. Elle converge normalement sur $[0,a]$ pour $a < 1$. On obtient ici :
$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{1 - x} = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) \text{si } a < 1$$

**Corollaire 2.1.2.17 (Continuité en un point)** Soient $\sum f_n$ une série de fonctions sur $X \subseteq \mathbf{C}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ et $a \in X$.

$$\left.\begin{array}{l} \sum f_n \text{ converge normalement sur } X \\ \forall n \in \mathbf{N}, f_n \text{ continue en } a \end{array}\right\} \Rightarrow \text{la somme } S \text{ est continue en } a.$$

**Dém.** Par continuité de $f_n$ en $a$, on obtient $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(a) = S(a)$ par définition de la somme $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ (la série $\sum f_n$ étant normalement convergente sur $X$). Enfin, $\lim\limits_{x\to a} S(x) = S(a)$ par le théorème d'interversion des limites. D'où la continuité de $S$ en $a$.

**Remarque 2.1.2.18** On dit que l'on peut passer à la limite sous le signe $\sum$.

**Corollaire 2.1.2.19 (Continuité globale)** Soient $\sum f_n$ une série de fonctions sur $X \subseteq \mathbf{C}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$.

$$\left.\begin{array}{l}\sum f_n \text{ converge normalement sur } X\\ \forall n \in \mathbf{N}, f_n \text{ continue sur } X\end{array}\right\} \Rightarrow S \text{ continue sur } X$$

**Exemple 2.1.2.20**

1. En particulier, la somme de la série $\sum x^n$ est continue sur $]-1,1[$ car elle est continue sur $[-a,a]$ pour tout $a \in [0,1[$.
2. Étudions la série $\sum \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$.

   On a $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x}{(1+x^2)^k} = \begin{cases} x \cdot \frac{1-\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{1-\frac{1}{1+x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   D'où,
   $$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1+x^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$
   Ainsi, $\sum \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$.

   La convergence n'est pas normale sur $\mathbf{R}$ sinon la somme $S$ serait continue sur $\mathbf{R}$ (en tant que limite «normale» de la série de fonctions continues $\sum \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbf{R}$). Or, $S$ n'est pas continue en 0.

   Soit $a > 0$. Si $|x| \geqslant a > 0$ alors $0 < \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{1+a^2} < 1$. Pour $n \geqslant 1$,
   $$\left|\frac{x}{(1+x^2)^n}\right| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+a^2)^{n-1}}.$$
   Or, $\sum \dfrac{1}{(1+a^2)^n}$ est convergente donc $\sum \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ est normalement convergente sur $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$.

**Remarque 2.1.2.21** En réalité, y compris dans le cas d'une convergence simple, l'ensemble de discontinuité d'une série (convergente) de fonctions continues, reste petit (au *sens de Baire*).

**Proposition 2.1.2.22 (Dérivabilité)** Soient $\sum f_n$ une série de fonctions dérivables sur un intervalle *borné* $I \subset \mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ et $a \in I$.

$$\underbrace{\begin{array}{l}\sum f_n' \text{ converge normalement sur } I \text{ vers } g\\ \sum f_n(a) \text{ est convergente (resp. absolument convergente)}\end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$\overbrace{\begin{array}{l}\sum f_n \text{ converge (resp. normalement) sur } I \text{ vers } S\\ S \text{ est dérivable sur } I \text{ et } S' = g\end{array}}$$

**Dém.** Comme $\sum f_n'$ est normalement convergente, $\forall n \in \mathbf{N}, \|f_n'\|_\infty \leqslant \alpha_n < +\infty$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in I$, $|f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \|f_n'\|_\infty |x-a|$. D'où,

$$\text{pour } x \in I,\ |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \alpha_n diam(I).$$

Ainsi, $\sum (f_n - f_n(a))$ est normalement convergente sur $I$ borné. Comme $\sum f_n(a)$ est convergente par hypothèse, on en déduit que $\sum f_n$ converge sur $I$ (en fait, indépendamment de $x \in I$ car $\forall x \in I$, $f_n(x) = f_n(a) + f_n(x) - f_n(a)$) vers sa somme $S$.
Maintenant posons, pour $n \in \mathbf{N}$ :

$$\begin{array}{rccl} g_n : & I & \to & \mathbf{C} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f_n'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array} \quad \text{qui est continue sur } I.$$

En particulier, la série de fonctions continues $\sum g_n$ est normalement convergente (en comparant à $\sum \alpha_n$) sur $I$. Mais alors,

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) \overset{IL}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(a).$$

d'après le résultat de continuité d'une série normalement convergente de fonctions continues. Or, pour $x \neq a$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(x) = \frac{1}{x-a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a)\right).$$

Par suite,

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a)\right) = \lim_{x\to a} \frac{S(x) - S(a)}{x-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(a) = g(a).$$

On obtient que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable en $a$ de dérivée $S'(a) = g(a)$. Comme, *a posteriori*, $a$ est arbitraire, $\forall x \in I$, $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = g(x)$.

**Remarque 2.1.2.23**

1. Ce résultat est faux si la convergence de la série des dérivées n'est pas assez forte (ici, on exige la convergence normale de $\sum f_n'$).
2. La convergence de $\sum f_n$ est indépendante de $x \in I$ mais on n'a pas convergence normale de $\sum f_n$ en général si $\sum f_n(a)$ n'est pas AC.
3. On dit que l'on peut «dériver terme à terme».

**Exemple 2.1.2.24** Soit $R \geqslant 0$. La série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge en $x = 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$ est dérivable sur $]-R, R[$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ pour $n \geqslant 1$. De plus la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum \dfrac{x^n}{n!}$ est normalement convergente sur $[-R, R]$. Ainsi, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ est dérivable sur $]-R, R[$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ pour $|x| < R$. Comme $R$ est arbitraire, exp est $C^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

**Corollaire 2.1.2.25** Soit $\sum f_n$ une série de fonctions dérivables sur un intervalle $I \subseteq \mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$.

$$\underbrace{\begin{array}{l}\sum f_n' \text{ converge normalement sur } I \text{ vers } g\\ \sum f_n \text{ est convergente}\end{array}}_{\Downarrow}$$
$$\overbrace{S \text{ est dérivable sur } I \text{ et } S' = g}$$

**Dém.** Il suffit de remarquer que tout point $x$ de $I$ appartient à un intervalle borné.

**Proposition 2.1.2.26 (Intégrabilité)** Soient $\sum f_n$ une série de fonctions sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ et $a \in I$.

$$\left.\begin{array}{l}\sum f_n \text{ converge normalement sur } I\\ \forall n \in \mathbf{N}, f_n \text{ est localement intégrable sur } I\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{la somme } S \text{ est localement intégrable sur } I\\ \forall x \in I, \displaystyle\int_a^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^x f_n(t)dt\right).\end{array}\right.$$

**Dém.** On admet que la limite «normale» $S$ de $\sum f_n$ est localement intégrable. Pour $x \in I$, la série numérique $\sum \int_a^x f_n(t)dt$ est convergente car absolument convergente (car $\sum f_n$ est normalement convergente). Si $(r_n)$ désigne la suite des restes de la série numérique $\sum \alpha_n$ alors $\forall t \in I$, $|(S-S_n)(t)| \leqslant r_n$. Donc, pour $x \in I$ :

$$\left|\int_a^x S(t)dt - \int_a^x S_n(t)dt\right| = \left|\int_a^x (S - S_n)(t)dt\right| \leqslant \int_a^x |S - S_n|(t)dt \leqslant r_n|a - x|.$$

D'où le résultat en faisant $n \to +\infty$.

**Remarque 2.1.2.27**

1. On dit que l'on peut «intégrer terme à terme» ou passer à la limite sous le signe $\displaystyle\int$ sur $I$.
2. Si $I$ est borné alors la convergence est indépendante de $x \in I$ (et en fait, normale ici).

**Exemple 2.1.2.28** Soit $\sum \dfrac{e^{int}}{1+n^2}$ pour $t \in \mathbf{R}$. La série de fonctions continues de terme général $\left(\dfrac{e^{int}}{1+n^2}\right)$ est normalement convergente sur $\mathbf{R}$. En particulier, sa somme $S$ est continue sur $\mathbf{R}$ et $\forall a \leqslant b$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b \frac{e^{int}}{1+n^2}dt = \int_a^b S(t)dt.$

**Corollaire 2.1.2.29 (Dérivabilité** $2^e$**)** Soient $\sum f_n$ une série de fonctions $C^1$ sur un intervalle $I \subset \mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{C}$ et $a \in I$.

$$\underbrace{\begin{array}{l}\sum f_n' \text{ converge normalement sur } I \text{ vers } g\\ \sum f_n(a) \text{ est convergente}\end{array}}_{\Downarrow}$$
$$\overbrace{\begin{array}{l}\sum f_n \text{ converge sur } I \text{ vers } S\\ S \text{ est } C^1 \text{ sur } I \text{ et } S' = g.\end{array}}$$

**Dém.** Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $f_n'$ est continue, elle est (localement) intégrable et $\forall x \in I$, $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)dt$. En sommant sur $n$, terme à terme, on obtient en vertu du théorème d'intégration appliqué à $\sum f_n'$ :

$$S(x) := \ell + \int_a^x g(t)dt \text{ où } \ell = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(a).$$

Enfin, comme $g$ est continue, $S$ est $C^1$ et $S' = g$ (et $S(a) = \ell$).

**Remarque 2.1.2.30** Si $I$ est borné alors la convergence est indépendante de $x \in I$.

## 2.2 Série entière

### 2.2.1 Introduction

**Définition 2.2.1.1** Soit $(a_n)$ une suite numérique. La *série entière* associée est la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} \underbrace{a_n z^n}$ de monômes en $z$.

$$\begin{cases} \mathbf{C} & \xrightarrow{f_n} \mathbf{C} \\ z & \mapsto a_n z^n \end{cases}$$

**Remarque 2.2.1.2**

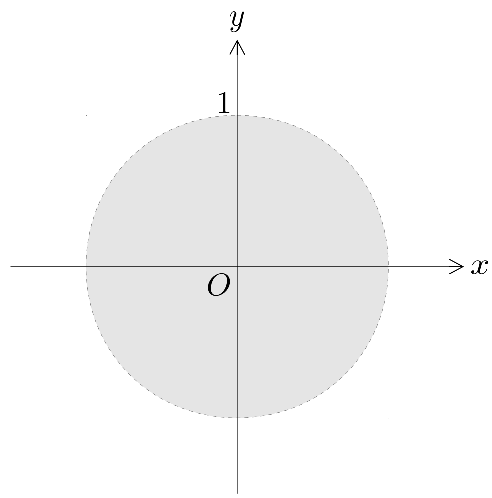
1. (a) La somme partielle d'ordre $n$ est un polynôme de degré $\leqslant n$.
   (b) Cette notion généralise celle de polynôme ($(a_n)$ presque nulle).
2. De nombreuses fonctions de la physique s'écrivent de cette manière.
3. Si $f$ est $C^\infty$ alors on obtient une somme partielle de ce type (à tout ordre $n$) à l'aide de la formule de Taylor.

**Questions** :

1. Sur quel sous-ensemble «maximal» de $\mathbf{C}$, cette série converge-t-elle ?
2. Quelles sont les propriétés des fonctions obtenues comme somme d'une telle série entière (régularité, annulation, ensembles de niveau, similitude avec des polynômes) ?

**Remarque 2.2.1.3**

1. $\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ & z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{array}$ est la série entière associée à la suite $(a_n)$ définie par $a_n = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 0$.
2. Si $a_n = (-1)^n$ alors $\sum (-1)^n z^n = \sum (-z)^n$. C'est la série géométrique de 1^er^ terme 1 et de raison $-z$. Cette série converge (absolument) ssi $|z| < 1 \Leftrightarrow z \in D(0,1)$. Et $\forall z \in D(0,1)$, $S(z) = \dfrac{1}{1+z}$.




*Disque de convergence* de la série $\sum(-1)^n z^n$

En réalité, la série converge normalement sur $D'(0,r)$ pour $r<1$.

### 2.2.2 Rayon de convergence

**Proposition 2.2.2.1** $\exists! R \in [0,+\infty]$ tel que $\forall z \in \mathbf{C}$, on ait :

1. $|z|<R \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument
2. $|z|>R \Rightarrow \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

**Dém.**

1. Posons $\mathcal{R} = \{r \in \mathbf{R}_+ : \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty\}$. Alors $\mathcal{R} \neq \varnothing$ car $0 \in \mathcal{R}$. D'autre part, soit $r_0 \in \mathcal{R} - \{0\}$ (le cas $\mathcal{R} = \{0\}$ est évident) :

$$0 \leqslant r \leqslant r_0 \Rightarrow |a_n| r^n = \overbrace{\left(\frac{r}{r_0}\right)^n}^{\leqslant 1} |a_n| r_0^n \leqslant |a_n| r_0^n$$

(*en réalité* $\sum |a_n| r^n$ *converge encore pour* $r<r_0$ *dès que* $(|a_n| r_0^n)_n$ *est bornée*)

Ainsi, $r_0 \in \mathcal{R} \Rightarrow [0,r_0] \subset \mathcal{R}$. Par conséquent $\mathcal{R}$ est un intervalle de $\mathbf{R}_+$ contenant 0 donc

$$\mathcal{R} = \begin{cases} [0,+\infty[ & \text{si } \sum a_n r^n \text{ est absolument convergente pour tout } r \geqslant 0 \\ [0,R] & \text{si } \sum a_n r^n \text{ est absolument convergente pour tout } 0 \leqslant r \leqslant R \\ [0,R[ & \text{si } \sum a_n r^n \text{ est absolument convergente pour tout } 0 \leqslant r < R \end{cases}$$

et $R = \sup \mathcal{R}$ (éventuellement $+\infty$).

2. Si $R=+\infty$ alors il n y a rien à démonter. Sinon, soit $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $|z_0|>R$.
Supposons que $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. Autrement dit, $(\exists M \in \mathbf{R}_+)(\forall n \in \mathbf{N}) : |a_n z_0^n| \leqslant M$.
Soit maintenant $z \in \mathbf{C}$ tel que $R<|z|<|z_0|$. Alors

$$|a_n z^n| = \left|\frac{z}{z_0}\right|^n |a_n||z_0|^n \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Donc $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Par suite, $|z| = r > R \rightarrow\leftarrow$.
Ainsi, $|z|>R \Rightarrow (a_n z^n)_n$ non bornée ; en particulier, $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

**Remarque 2.2.2.2** La preuve montre en fait $R = \sup\{r \in \mathbf{R}_+ : (|a_n| r^n)_n \text{ bornée}\}$.

**Définition 2.2.2.3** Le «nombre» positif ou nul $R$ est le *rayon de convergence* ; $D(0,R)$ est le *disque de convergence.*

**Remarque 2.2.2.4**

1. On ne sait rien de la convergence sur $\mathcal{C}(0,R) := \{|z| = R\}$.
2. Compte-tenu de la proposition, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ admettent le même rayon de convergence. Pour déterminer $R$, on utilisera donc une règle de convergence des séries à termes positifs (Cauchy, d'Alembert,...) appliquée à $\sum |a_n z^n|$.

**Exemple 2.2.2.5**

1. $\sum z^n$ admet $R = 1$ pour rayon de convergence.
2. (a) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ ; pour $z \neq 0, n > 0$, $\frac{\frac{|z|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|z|^n}{n}} = |z|\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |z|$. Donc $\sum \frac{z^n}{n}$ est absolument convergente sur $D(0,1)$ (et grossièrement divergente sur $\complement D'(0,1)$.)

   **Remarque 2.2.2.6** $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge tandis que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

   (b) $\sum n z^n$ : $R = 1$ (aussi !)
3. $\sum 2^{n^2} z^n$ admet $R = 0$ pour rayon de convergence car $|2^{n^2} z^n|^{\frac{1}{n}} = 2^n |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty > 1$ si $z \neq 0$.
4. $\sum \frac{z^n}{n!}$ ; pour $z \neq 0$, on a $\frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *i.e.* $R = +\infty$. On pose $\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbf{C}$.
5. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ a pour rayon de convergence 1. On pose $Log(1+z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ pour $|z| < 1$

   (à nouveau, observer le cas limite $\begin{array}{l} \nearrow z = 1 \\ \searrow z = -1 \end{array}$).

## 2.2.3 Opérations sur les séries entières

**Proposition 2.2.3.1** Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum a'_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectif $R$ et $R'$. Alors

1. $\sum (a_n + a'_n) z^n$ admet $\rho \left\{ \begin{array}{ll} = \min(R,R') & \text{si } R \neq R' \\ \geqslant R & \text{si } R = R' \end{array} \right.$ pour rayon de convergence.

   Et $|z| < \rho \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + a'_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a'_n z^n$.
2. Si $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$ alors $\sum (\lambda a_n) z^n$ admet encore $R$ pour rayon de convergence.
3. $\left(\sum a_n z^n\right) * \left(\sum a'_n z^n\right)$ admet $\rho' \geqslant \min(R,R')$ pour rayon de convergence. De plus,

$$\forall z \in D(0,\rho'), \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{c_n}_{\sum_{k=0}^{n} a_k a'_{n-k}} z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a'_n z^n\right).$$

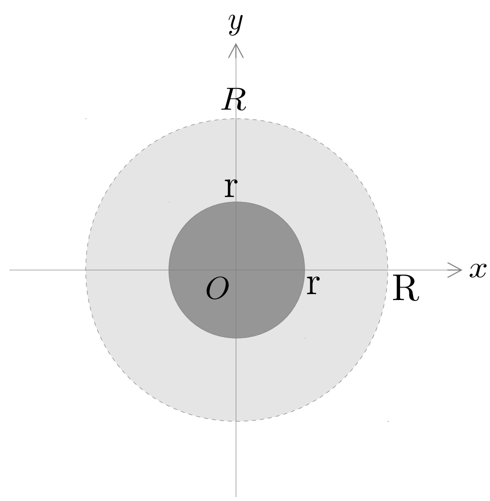
**Exemple 2.2.3.2**

1. $a_n = 1 + 2^n \Rightarrow R = \frac{1}{2}$,
   $a'_n = 1 - 2^n \Rightarrow R = \frac{1}{2}$.
   Mais $\sum(a_n + a'_n)z^n$ admet $\rho = 1$ pour rayon de convergence.
2. $a_n = 1$ pour $n \in \mathbf{N} \Rightarrow R = 1$,
   $a'_0 = 1$, $a'_1 = -1$, $a'_n = 0$ pour $n \geqslant 2 \Rightarrow R' = +\infty$.
   Mais le rayon de convergence $\rho'$ de $\left(\sum a_n z^n\right) * \left(\sum a'_n z^n\right)$ est égal à $+\infty$ car $\forall n \geqslant 1, c_n = 0$.

### 2.2.4 Qualité de la convergence

**Proposition 2.2.4.1** Soient $\sum a_n z^n$ une sére entière de rayon de convergence $R > 0$ et $0 \leqslant r < R$. Alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D'(0, r)$.

**Dém.**




Disque de convergence $D(0, R)$ et disque de convergence normale $D'(0, r)$

En effet, $\forall z \in D'(0, r)$, $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$. Or, la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente car $r < R$. Donc $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur $D'(0, r)$.

**Remarque 2.2.4.2** En particulier, la convergence est indépendante de $z \in D'(0, r)$ à $r < R$ fixé.

### 2.2.5 Régularité d'une série entière

**Proposition 2.2.5.1** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Alors

1. $\begin{array}{ccc} D(0,R) & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{array}$ est continue sur $D(0, R)$.
   En particulier, $\begin{array}{ccc} f : ]-R, R[ & \to & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ l'est aussi.
2. La série entière dérivée $\sum(n+1)a_{n+1}z^n$ admet $R$ pour rayon de convergence. De plus, $f$ est dérivable sur $]-R, R[$ et $\forall x \in ]-R, R[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$.

3. La fonction $f$ est intégrable sur tout segment $[a,b] \subset ]-R,R[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est bien définie, de classe $C^1$ et est la primitive de $f$ s'annulant en $x=0$ *i.e.*

$$\forall x \in ]-R,R[, F(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ et } F'(x) = f(x).$$

De plus, la série entière primitivée $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ admet $R$ pour rayon de convergence.

**Dém.**

1. Comme la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque $D'(0,r) \subset D(0,R)$ et que $z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $D'(0,r)$, on en déduit que la somme (de la série de fonctions) $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue en tout point de $D(0,R)$.
2. Notons $\rho'$ le rayon de convergence de $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$.
Si $z \neq 0$ alors $|(n+1)a_{n+1}z^n| = (n+1)|a_{n+1}||z|^n \geqslant |a_{n+1}||z|^n = \frac{1}{|z|}|a_{n+1}||z|^{n+1}$. Ainsi, $|z| < \rho' \Rightarrow \sum a_n z^n$ converge absolument. Or, $\sum a_n z^n$ converge absolument $\Rightarrow |z| \leqslant R$. D'où, $\rho' \leqslant R$.
D'autre part, soit $z_0 \in D(0,R) - \{0\}$ et $|z| < |z_0|$. Alors :

$$\begin{aligned} |(n+1)a_{n+1}z^n| &= (n+1)\left|\frac{z}{z_0}\right|^n |a_{n+1}||z_0|^n = (n+1)\left|\frac{z}{z_0}\right|^n \frac{1}{|z_0|}|a_{n+1}||z_0|^{n+1} \\ &\leqslant \frac{1}{|z_0|}|a_{n+1}||z_0|^{n+1} \text{ pour } n \text{ suffisamment grand.} \end{aligned}$$

Dés lors, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ est normalement convergente sur $D'(0,|z_0|)$ pour $|z_0| < R$. Par suite, $\rho' \geqslant R$. On conclut $\rho' = R$.
Soit $r < R$. Comme $x \mapsto (n+1)a_n x^n$ est dérivable sur $[-r,r]$, $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ converge normalement sur $[-r,r]$ et $\sum a_n x^n$ converge en $x=0$, $f$ est dérivable sur $[-r,r]$. Donc, $\forall x \in ]-R,R[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$.
3. La fonction $f$ est (par restriction) continue sur $]-R,R[$, donc localement intégrable. De plus, la série $\sum a_n x^n$ étant normalement convergente, la fonction $f$ est localement intégrable et

$$\forall x \in ]-R,R[, \int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

Comme $f$ est continue, $F$ est (continûment) dérivable sur $]-R,R[$ et $\forall x \in ]-R,R[$, $F'(x) = f(x)$.
Enfin, notons $\rho''$ le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$. D'après le point précédent, la série entière dérivée admet aussi $\rho''$ pour rayon de convergence. Or la série entière dérivée de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ n'est autre que $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ donc $\rho'' = R$.

**Exemple 2.2.5.2** Pour $z \in \mathbf{C}$ :

1. $\exp(z) = e^z = \exp'(z)$.

2. $\cosh(z) := \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

   $\sinh(z) := \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cosh'(z)$.

   De même, $\sinh' = \cosh$.

   $$\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \tag{2.1}$$

3. $\cos(z) := \cosh(iz) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

   $\sin(z) := \dfrac{\sinh(iz)}{i} = -i \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (i)^{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\cos'(z)$.

   De manière analogue, $\sin' = \cos$.

   $$(2.1) \Leftrightarrow \cos^2 + \sin^2 = 1$$

4. Si $x \in \mathbf{R}$ alors $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}$

5. $\tanh(z) := \dfrac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$ pour $e^{2z} \neq -1$.

   $\tanh' \overset{formelle}{=} 1 + \tanh^2$.

6. $\tan(z) := \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$ pour $e^{2iz} \neq -1$.

   $\tan' = 1 + \tan^2$ ; en particulier, $\tan'(0) = 1 \neq 0$

   $\overset{\text{domaine d'inversibilité}}{\Longrightarrow} \quad (\tan^{-1})'(\tan(y)) = \dfrac{1}{1 + \tan^2(y)}$ *i.e.* $\arctan'(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$.

7. $\arctan'(z) \overset{|z|<1}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} \Rightarrow \arctan(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}$.

**Corollaire 2.2.5.3** Pour tout $p \geqslant 0$, la somme $S$ de la série entière $\sum a_n z^n$ admet un développement limité d'ordre $p$ en 0 donné par

$$S(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k + o(z^p).$$

**Dém.** Par unicité du DL.

**Corollaire 2.2.5.4**

1. La somme d'une série entière est $C^\infty$ sur $]-R, R[$.
2. $\forall p \geqslant 0$, $S^{(p)}(0) = p! a_p$.

**Corollaire 2.2.5.5** Soit $S$ la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$. Alors

$$(\exists \rho > 0)(\forall z \in D(0, \rho)) : S(z) = 0 \Leftrightarrow \forall n \geqslant 0, a_n = 0.$$

**Remarque 2.2.5.6** On peut remplacer $D(0, \rho)$ par $]-\rho, \rho[$.

### 2.2.6 Application (équation différentielle)

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\begin{array}{cccc} f: & ]-1,1[ & \xrightarrow{C^\infty} & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)} \end{array}$.

**Question** : existe-t-il une série entière admettant $f$ pour somme ?

Pour $x \in ]-1,1[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} e^{\alpha \ln(1+x)} = \frac{\alpha}{1+x} f(x)$$

ou encore

$$(1+x)f' - \alpha f = 0.$$

Ainsi, $f$ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène

$$(1+x)y' - \alpha y = 0 \tag{2.2}$$

sous la condition initiale $y(0) = 1$.

$\xRightarrow{\text{théorème de Cauchy-Lipschitz}}$ cette solution (existe ! et) est unique (sur $]-1,+\infty[$).

Cherchons s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme $S$ ($S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$) soit solution de (2.2). On aurait donc pour $x \in ]-R,R[$ :

$$\begin{array}{rll} & (1+x)S'(x) - \alpha S(x) & = 0 \\ \Leftrightarrow & (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n & = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n & = 0 \\ \Leftrightarrow & (a_1 - \alpha a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)a_{n+1} + n a_n - \alpha a_n\right) x^n & = 0. \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a_1 - \alpha a_0 & = 0 \\ (n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n & = 0 \text{ pour } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\begin{cases} a_1 & = \alpha a_0 \\ a_{n+1} & = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n, n \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 & = \alpha a_0 \\ a_{n+1} & = \dfrac{\alpha - n}{n+1} \dfrac{\alpha - (n-1)}{n} \cdots \dfrac{\alpha - 1}{2} a_1, n \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 \text{ donné} \\ a_n = \dfrac{(\alpha-(n-1))(\alpha-(n-2))\cdots(\alpha-1)\alpha}{n!} a_0, n \geqslant 1 \end{cases}$$

Si on impose $S(0) = 1$ alors $a_0 = 1$. D'où, l'unique série entière solution de (2.2) est :

$$1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{(\alpha-(n-1))(\alpha-(n-2))\cdots(\alpha-1)\alpha}{n!} x^n.$$

Si $\alpha \in \mathbf{N}$ alors la suite $(a_n)_n$ est presque nulle et $S$ est en réalité une fonction polynomiale de degré $\alpha$.

Sinon, appliquons la règle de d'Alembert pour déterminer $R$ :

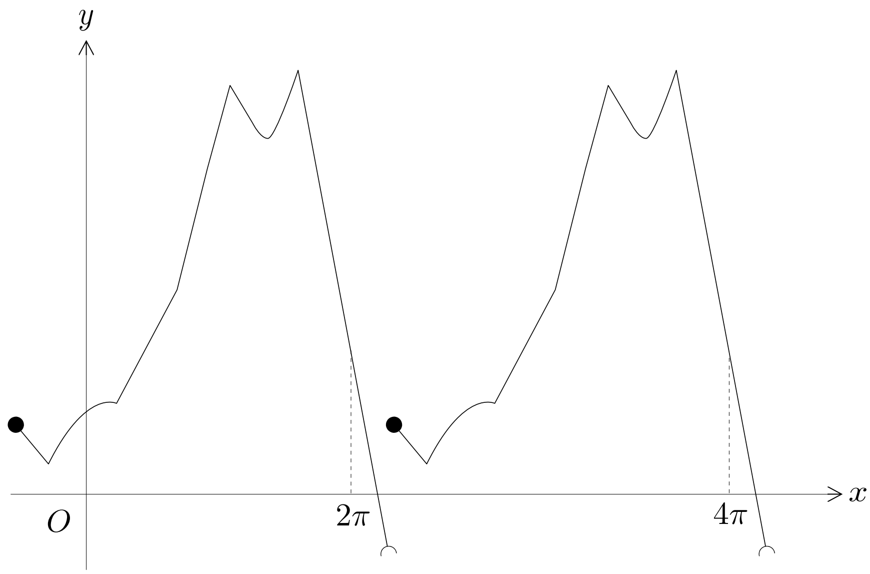
$$x \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}x\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|.$$

Donc $R = 1$.
Ainsi, $\forall x \in ]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\cdots(\alpha-1)\alpha}{n!}x^n$.

## 2.3 Série de Fourier

### 2.3.1 Position du problème

Soit $\begin{array}{llll} f: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$ une application $2\pi$−périodique (*i.e.* $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x+2\pi) = f(x)$, $2\pi$ étant l'élément minimum satisfaisant cette propriété) et (localement) intégrable.




Graphe de $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $2\pi$−périodique continue par morceaux

**Question :** peut-on décomposer un tel signal en une *fondamentale* et ses *harmoniques* ?

**Remarque 2.3.1.1**

1. $f$ est intégrable sur tout segment $[a,b] \subset \mathbf{R}$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall c \in \mathbf{R}, \int_c^{c+2\pi} f(t)dt &= \int_c^0 + \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+c} = \int_0^{2\pi} + \int_c^0 + \int_0^c \\ &= \int_0^{2\pi} f(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt.\end{aligned}$$

2. Si $g$ est $T$−périodique alors $f : x \mapsto g(\frac{T}{2\pi}x)$ est $2\pi$−périodique.

### 2.3.2 Polynôme trigonométrique

**Définition 2.3.2.1** Soient $N \in \mathbf{N}$ et $(c_n)_{-N \leq n \leq N}$ une séquence de nombres complexes. Un *polynôme trigonométrique* est une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ qui s'écrit $P(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$.

Soient $k, n \in \mathbf{Z}$.

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-int}dt = \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n \end{cases} = 2\pi\delta_{kn}. \tag{2.3}$$

En particulier, la famille de fonctions $(e^{ikx})_{k\in\mathbf{Z}}$ est libre.

Soient $k, n \in \mathbf{N}$.

$$(2.4) \qquad \int_0^{2\pi} e^{ikt}\cos(nt)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\cos(nt)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos((k+n)t)+\cos((k-n)t)}{2}dt$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \pi & \text{si } k = n \text{ et } n \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } k = n = 0 \end{cases}.$$

De manière analogue,

$$(2.5) \qquad \int_0^{2\pi} e^{ikt}\sin(nt)dt = i\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kt)\sin(nt)dt = i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos((k-n)t)-\cos((k+n)t)}{2}dt$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ i\pi & \text{si } k = n \text{ et } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = n = 0 \end{cases}.$$

En particulier les familles de fonctions $(\cos(nx))_n$ et $(\sin(nx))_n$ sont libres et linéairement indépendantes entre elles.

**Proposition 2.3.2.2** Soit $P$ un polynôme trigonométrique. Alors

$$P(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \Leftrightarrow P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx).$$

**Dém.**
($\Rightarrow$) $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.
($\Leftarrow$) $\forall x \in \mathbf{R}$, $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

**Corollaire 2.3.2.3 (Relation entres les coefficients exponentiels et trigonométriques pour un polynôme trigonométrique de «degré» $N$)**

1. $\forall n \in [\![0, N]\!]$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.
2. $\forall n \in [\![0, N]\!]$, $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$.

**Proposition 2.3.2.4** Si les *séries* numériques de terme général $(c_n)$ et $(c_{-n})$ (resp. $(a_n)$ et $(b_n)$) sont absolument convergentes alors la série (*trigonométrique*) $c_0 + \sum_{n\geqslant 0}(c_n + c_{-n})e^{inx}$ (resp. $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 0} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$) est normalement convergente.
**Dém.** Immédiat car $|e^{ix}| = 1$ (resp. $|\cos(nx)|, |\sin(nx)| \leqslant 1$).

**Corollaire 2.3.2.5** La somme d'une *série trigonométrique* à coefficients absolument convergents est continue, localement intégrable sur $\mathbf{R}$ et $2\pi$−périodique.

**Exemple 2.3.2.6** Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé.

1. Les séries (entières en $a$) $\sum a^n e^{inx}$, $\sum a^n \cos(nx)$ et $\sum a^n \sin(nx)$ sont normalement convergentes pour $|a| \leqslant r < 1$ (car $R = 1$). De plus,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{inx} = \frac{1}{1 - ae^{ix}} = \frac{1 - ae^{-ix}}{|1 - ae^{ix}|^2}.$$

D'où

$$1 + a\cos(x) + a^2\cos(2x) + \cdots + a^n\cos(nx) + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(nx) = \frac{1 - a\cos(x)}{1 - 2a\cos(x) + a^2}$$

et

$$a\sin(x) + a^2\sin(2x) + \cdots + a^n\sin(nx) + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \sin(nx) = \frac{a\sin(x)}{1 - 2a\cos(x) + a^2}.$$

2. De même la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^n}{n} e^{inx}$ est normalement convergente pour $|a| \leqslant r < 1$ et

$$u(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \cos(nx) + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \sin(nx).$$

Comme $u$ est dérivable (sur $D(0,1)$) et

$$au'(a) = a \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} e^{inx} = \frac{ae^{ix}}{1 - ae^{ix}} = \frac{a\cos(x) - a^2}{1 - 2a\cos(x) + a^2} + i \frac{a\sin(x)}{1 - 2a\cos(x) + a^2}$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}\cos(nx) = \frac{\cos(x) - a}{1 - 2a\cos(x) + a^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}\sin(nx) = \frac{\sin(x)}{1 - 2a\cos(x) + a^2}.$$

Finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \cos(nx) = \int_0^a \frac{\cos(x) - t}{1 - 2t\cos(x) + t^2} dt = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2)$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n} \sin(nx) = \int_0^a \frac{\sin(x)}{1 - 2t\cos(x) + t^2} dt = \arctan\left(\frac{a\sin(x)}{1 - a\cos(x)}\right).$$

## 2.3.3 Coefficients de Fourier

Si $f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}$ alors

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \text{ pour } -N \leqslant n \leqslant N$$

tandis que si $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ alors

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \text{ pour } 0 \leqslant n \leqslant N.$$

Par suite, on pose la

**Définition 2.3.3.1**

1. $\forall n \in \mathbf{Z}$, le *$n$−ième coefficient de Fourier exponentiel* de $f$ est
$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$
2. $\forall n \in \mathbf{N}$, les *$n$−ièmes coefficients de Fourier trigonométriques* de $f$ sont
$$a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \text{ et } b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt.$$

On note $c_n$ (resp. $a_n$ et $b_n$) si aucune confusion n'est à craindre.

**Remarque 2.3.3.2**

1. Ces nombres sont *a priori* complexes. Si $f$ est *réelle* alors $(a_n)$ et $(b_n)$ sont des suites réelles et $(c_{-n})$ est la suite conjuguée de $(c_n)$.
2. On a toujours $b_0 = 0$.
3. Si $f$ est paire (resp. impaire) alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $b_n = 0$ (resp. $a_n = 0$) et $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$ (resp. $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$).
4. Si $f$ et $g$ diffèrent en un nombre fini de points (sur une période !) alors leurs coefficients de Fourier sont égaux.

**Exemple 2.3.3.3** On considère $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $2\pi$−périodique définie par $f_{|[-\pi,0[} \equiv 0$ et $f_{|[0,\pi[} \equiv \pi$. On trouve :

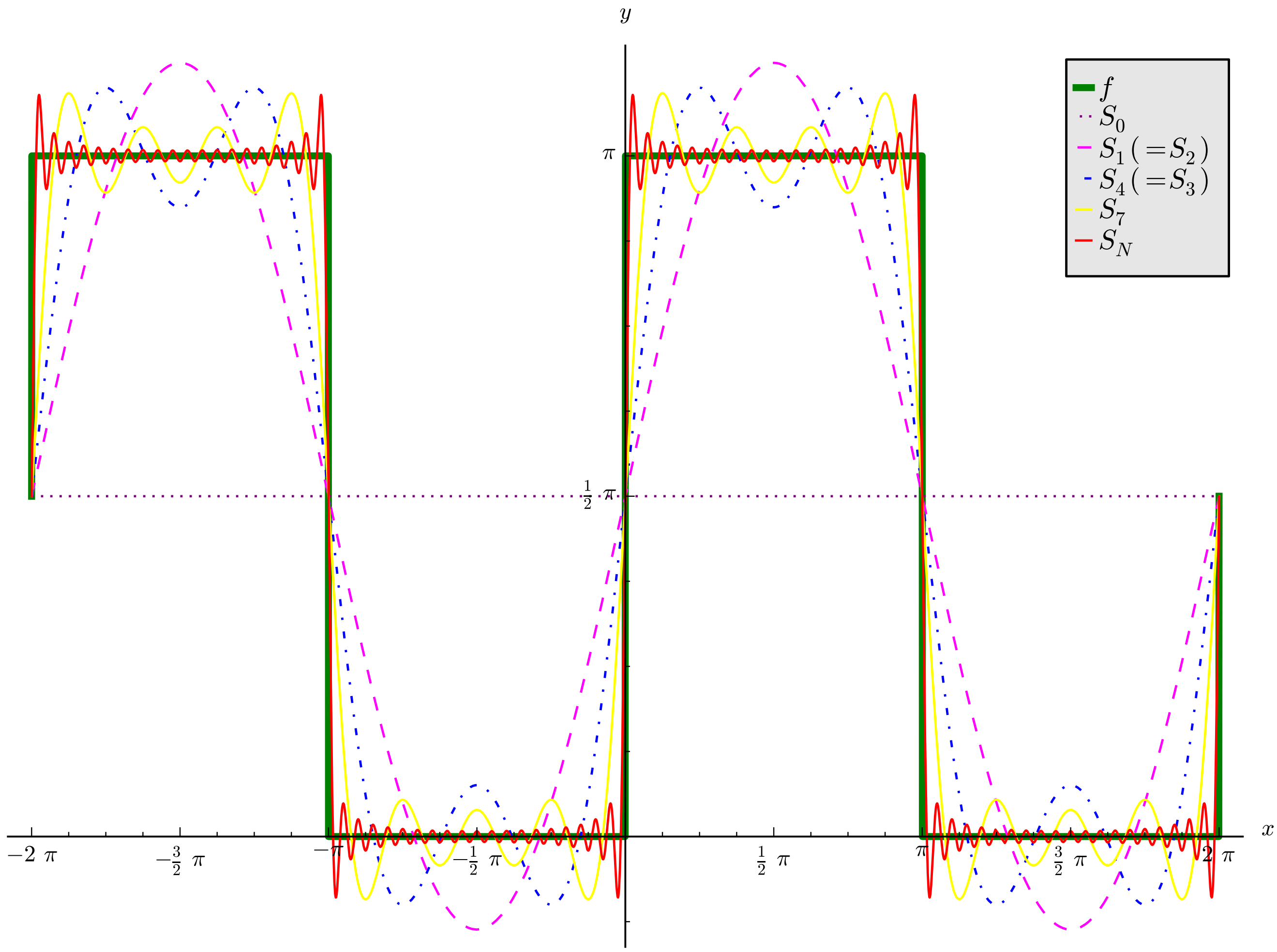
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi dt = \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\cos(nt)dt = 0 \text{ pour } n \geqslant 1 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \pi\sin(nt)dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n} \text{ pour } n \geqslant 1
\end{aligned}$$

On a par exemple :

$$\begin{aligned}
&S_0(x) = \frac{\pi}{2} \\
&S_1(x) = S_0(x) + 2\sin(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sin(x) \\
&S_2(x) = S_1(x) \\
&S_3(x) = S_2(x) + \frac{2}{3}\sin(3x) = \frac{\pi}{2} + 2\sin(x) + \frac{2}{3}\sin(3x) = S_4(x) \\
&S_5(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sin(x) + \frac{2}{3}\sin(3x) + \frac{2}{5}\sin(5x) = S_6(x)
\end{aligned}$$

(*la série de Fourier de $f$ s'écrira :* $\frac{\pi}{2} + 2\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$).

Représentation graphique à l’aide de sage (www.sagemath.org)




```
f1(x) = 0; f2(x) = pi; g = Piecewise([[(-pi,0),f1],[(0,pi),f2]]); f = lambda x:g(x-2*floor((x+pi)/(2*pi))*pi);
a = -2*pi; b = -a;
graph = plot(f,a,b,color=’green’,legend_label=’$f$’,thickness=3,ticks=[pi/2,pi/2],tick_formatter=[pi,pi])
S_0 = g.fourier_series_partial_sum(1,pi); graph +=plot(S_0,x,a,b,color=’purple’,legend_label=’$S_0$’,linestyle=’:’);
S_1 = g.fourier_series_partial_sum(2,pi); graph +=plot(S_1,x,a,b,color=’magenta’,legend_label=’$S_1(=S_2)$’,linestyle=’--’);
S_4 = g.fourier_series_partial_sum(5,pi); graph +=plot(S_4,x,a,b,color=’blue’,legend_label=’$S_4(=S_3)$’,linestyle=’-.’);
S_7 = g.fourier_series_partial_sum(8,pi); graph +=plot(S_7,x,a,b,color=’yellow’,legend_label=’$S_7$’);
N = 39;
S_N = g.fourier_series_partial_sum(N+1,pi); graph +=plot(S_N,x,a,b,color=’red’,legend_label=’$S_N$’);
graph.axes_labels([’$x$’,’$y$’]);
show(graph);
graph.save(’/Users/ssimo/Documents/MATH326-graphe-fourier-1-sage.pdf’)
```

**Proposition 2.3.3.4 (Relations entre les coefficients de Fourier exponentiels et trigonométriques)**

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}$, $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$.

**Exemple 2.3.3.5** Soit $f$ l’application $2\pi$−périodique, $f \equiv 1$ sur $[0, 2\pi]$ ($f$ est un polynôme trigonométrique !). Alors $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{Z}^*$, $c_n = 0$. De même, $a_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = b_n = 0$.
Plus généralement,

**Corollaire 2.3.3.6** Si $f$ est un polynôme trigonométrique alors les suites $(c_n)$ (resp. $(c_{-n})$, resp. $(a_n)$, resp. $(b_n)$) sont *presque* nulles et $\forall n \in \mathbf{N}$, $c_n(f) = c_n$ (resp. $c_{-n}(f) = c_{-n}$, resp. $a_n(f) = a_n$, resp. $b_n(f) = b_n$).

**Proposition 2.3.3.7** Si $f$ est continue par morceaux alors $(c_n)$ (resp. $(c_{-n})$, resp. $(a_n)$, resp. $(b_n)$) converge vers 0.

**Dém.** Il suffit de le démontrer pour $(c_{-n})$ (car $c_{-n} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}e^{-int}dt} = \overline{c_n(\overline{f})}$, et $(a_n)$ et $(b_n)$ s'expriment linéairement en fonction de $(c_n)$ et $(c_{-n})$).

Si $g$ est en escalier alors $\int_0^{2\pi} g(t)e^{int}dt = \sum_{l=0}^{N_g-1} \alpha_l \int_{s_l}^{s_{l+1}} e^{int}dt$ où $0 = s_0 < \cdots < s_{N_g} = 2\pi$ désigne une subdivision de $[0, 2\pi]$ adaptée à $g$. D'où

$$\left|\int_0^{2\pi} g(t)e^{int}dt\right| \leqslant \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{N_g-1} |\alpha_l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soient $\epsilon > 0$ et $(g_k)$ une suite de fonctions en escalier convergeant *uniformément* vers $f$ sur $[0, 2\pi]$ (*i.e.* $\|f - g_k\|_{\infty,[0,2\pi]} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

Comme la convergence de $(g_k)$ vers $f$ est uniforme, il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que $\|f - g_K\|_\infty < \frac{\epsilon}{4\pi}$ donc

$$\left|\int_0^{2\pi} (f - g_K)(t)e^{int}dt\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |(f - g_K)(t)e^{int}|dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme $g_K$ est en escalier, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $n > N \Rightarrow \left|\int_0^{2\pi} g_K(t)e^{int}dt\right| < \frac{\epsilon}{2}$.

Ainsi, $(\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbf{N})(\forall n \geqslant N) : \left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt\right| < \epsilon$. On conclut $\lim_{n\to+\infty} c_{-n} = 0$.

**Corollaire 2.3.3.8 (Riemann-Lebesgue)** Plus généralement, si $f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0.$$

## 2.3.4 Série de Fourier de $f$

**Définition 2.3.4.1** La *série de Fourier* de $f$ est la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ avec

$$f_0 : \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{C} \\ x \mapsto c_0\end{array} \quad \text{et } \forall n \geqslant 1, \quad f_n : \begin{array}{l}\mathbf{R} \to \mathbf{C} \\ x \mapsto c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\end{array}$$

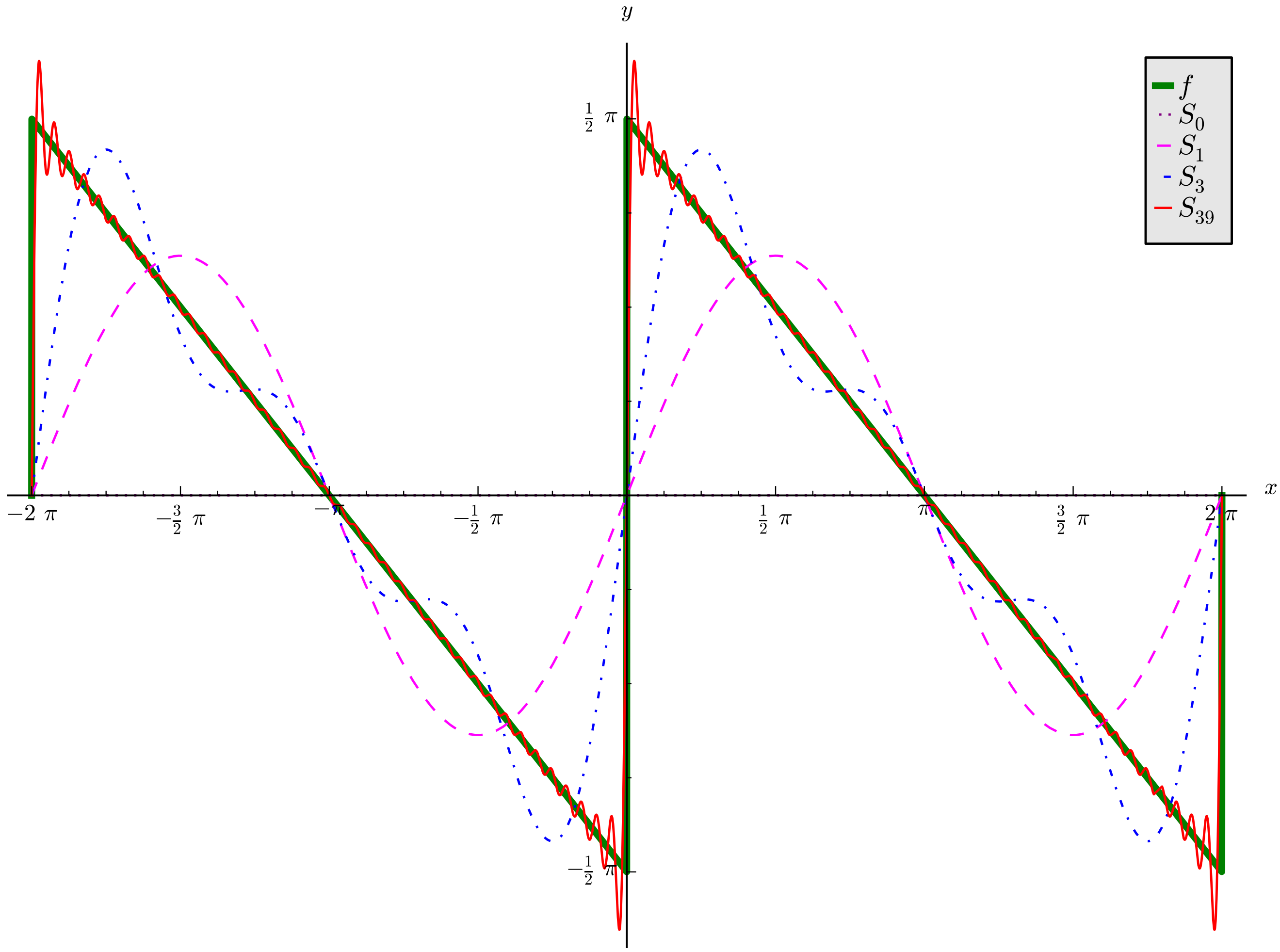
**Remarque 2.3.4.2** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la $n-$ième somme partielle $S_n$ de la série de Fourier de $f$ est :

$$\forall x \in \mathbf{R}, S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)}_{\text{polynôme trigonométrique}}.$$

**Exemple 2.3.4.3** Soit $f$ l'application impaire $2\pi$−périodique définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour $x \in ]0, \pi]$.
Comme cette fonction est impaire, on a $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt$.
Or, $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt = \left[-\frac{(\pi - t)\cos(nt)}{2n}\right]_0^\pi - \frac{1}{2n}\int_0^\pi \cos(nt)dt = \frac{\pi}{2n}$.
Ainsi, la série de Fourier de $f$ est donnée par :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\sin(nx).$$

Représentation graphique à l'aide de sage




**Questions**

1. La série de Fourier de $f$ est-elle convergente ?
2. Si la série de Fourier est convergente, converge-t-elle vers $f$ ?

### 2.3.5 Convergence simple d'une série de Fourier

**Lemme 2.3.5.1** Pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\frac{1}{2} + \cos(t) + \cos(2t) + \cdots + \cos(nt) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

**Dém.** Notons $\sigma_n(t)$ la somme au membre de gauche. On a

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{t}{2}\sigma_n(t) &= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\cos(kt)\\
&= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{t}{2}+kt) + \sin(\frac{t}{2}-kt)\\
&= \sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin((k+\frac{1}{2})t) - \sin((k-\frac{1}{2})t)\\
&= \sin\frac{2n+1}{2}t.
\end{aligned}$$

1. Si $t \not\equiv 0[2\pi]$ alors $\sigma_n(t) = \dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$.
2. Sinon, $\sigma_n$ est $2\pi$−périodique donc il suffit de l'évaluer en $t = 0$. Or $\lim_{t\to 0}\dfrac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = n + \dfrac{1}{2}$ qui n'est autre que $\sigma_n(0)$. En prolongeant la fonction du membre de droite (par continuité) en 0, on obtient bien l'égalité annoncée pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Soient maintenant $k \geqslant 1$ et $x \in \mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt\cos(kx) + \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)dt\sin(kx)\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos k(t-x)dt.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f(t)\cos k(t-x)dt\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt\right]\\
&\overset{lemme}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin\frac{2n+1(t-x)}{2}}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt\\
&\overset{u=\frac{t-x}{2}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{x}{2}}^{\pi-\frac{x}{2}} f(x+2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du\\
&\overset{\pi-périodicité}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2u)+f(x-2u))\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbf{N}, 1 \overset{f\equiv 1}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du.$$

On va supposer que la limite à droite/gauche $f(x^{\pm}) := \lim_{h\to 0^+} f(x \pm h)$ existe. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f(x+2u)+f(x-2u)-(f(x^+)+f(x^-))\right)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}du \\ &\overset{v=2u}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x+v)-f(x^+)+f(x-v)-f(x^-)\right)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})v}{2\sin\frac{v}{2}}dv. \end{aligned} \tag{2.6}$$

**Définition 2.3.5.2** Soient $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ et $x\in\mathbf{R}$. La fonction $f$ est *dérivable à droite* (resp. *à gauche*) en $x$ si $f(x^+)$ (resp. $f(x^-)$) $\in\mathbf{C}$ et $f'_d(x) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x^+)}{h}$ (resp. $f'_g(x) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x^-)}{h} = -\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x-h)-f(x^-)}{h}$) $\in\mathbf{C}$.

**Théorème 2.3.5.3 (de Dirichlet)** Soient $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ une fonction $2\pi$−périodique continue par morceaux et $x\in\mathbf{R}$. Si $f$ est dérivable à droite et à gauche en $x$ alors

$$S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

En particulier, si $f$ est continue en $x$ alors

$$S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

**Dém.** En effet, sous cette hypothèse, $\lim_{v\to 0^+}\frac{f(x+v)-f(x^+)}{v} = f'_d(x)$ (resp. $\lim_{v\to 0^+}\frac{f(x-v)-f(x^-)}{v} = -f'_g(x)$) et

$$\frac{f(x+v)-f(x^+)+f(x-v)-f(x^-)}{v}\frac{v}{2\sin\frac{v}{2}} \underset{v\to 0^+}{\longrightarrow} f'_d(x)-f'_g(x).$$

La fonction de (2.6) est donc intégrable (ici, continue par morceaux, plus généralement *réglée*) sur $[0,\pi]$. En outre, l'intégrale (2.6) tend vers 0 avec $n$.

**Remarque 2.3.5.4**

1. En fait, il suffit que $\frac{f(x+v)-f(x^+)+f(x-v)-f(x^-)}{v}$ reste borné au voisinage de $0^+$ pour que la série de Fourier de $f$ converge en $x$.
2. En réalité, il suffit même que l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi}\frac{f(x+v)-f(x^+)+f(x-v)-f(x^-)}{v}dv$ soit *absolument* convergente pour que la série de Fourier de $f$ converge en $x$.

**Exemple 2.3.5.5** Dans l'exemple précédent, $f_{|]0,\pi]}(x) = \frac{\pi-x}{2}$ $2\pi$−périodique et impaire, $f$ est continue par morceaux et dérivable à droite et à gauche en tout point de $\mathbf{R}$. On a donc

$$\forall x\in\mathbf{R}, \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin(nx) = f(x).$$

En effet, il suffit de considérer $x\in[0,\pi]$ (car $f$ est impaire et $2\pi$−périodique). Deux cas se présentent :

1. $x=0$ : $\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = f(0^{\pm}) = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = 0 = f(0)$.

2. $x \neq 0$ : $f$ est continue en $x$.

En particulier, en posant $x = \frac{\pi}{2}$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(n\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Im(e^{in\frac{\pi}{2}})}{n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

car $e^{in\frac{\pi}{2}} = i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0[4] \\ i & \text{si } n \equiv 1[4] \\ -1 & \text{si } n \equiv 2[4] \\ -i & \text{si } n \equiv 3[4] \end{cases}$.

**Corollaire 2.3.5.6** Soient $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ $2\pi-$périodique, continue par morceaux et $x \in \mathbf{R}$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et

1. $F : [x, x+\alpha[ \xrightarrow{C^1} \mathbf{C}$ telle que $f_{|]x,x+\alpha[} = F_{|]x,x+\alpha[}$
2. $G : ]x-\alpha, x] \xrightarrow{C^1} \mathbf{C}$ telle que $f_{|]x-\alpha,x[} = G_{|]x-\alpha,x[}$.

Alors

1. $f(x^+)$ et $f(x^-)$ existent (dans $\mathbf{C}$)
2. $S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

**Corollaire 2.3.5.7** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ $2\pi-$périodique et $C^1$ par morceaux (*i.e.* $[0, 2\pi] = \bigcup_{l=0}^{N-1} [s_l, s_{l+1}]$ où $0 = s_0 < \cdots < s_N = 2\pi$ désigne une subdivision adaptée de $[0, 2\pi]$ et le prolongement par continuité $\overline{f_l}$ de $f_{|]s_l,s_{l+1}[}$ à $[s_l, s_{l+1}]$ est $C^1$). Alors la série de Fourier de $f$ est simplement convergente sur $\mathbf{R}$ et

$$\forall x \in \mathbf{R}, S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

**Exemple 2.3.5.8** L'exemple précédent rentre en fait dans ce cadre, qui suffit la plupart du temps.

## 2.3.6 Inégalités de Bessel et formule de Parseval

Soient $f$ et $g$ des applications $2\pi-$périodiques et continues par morceaux. Notons

$$(g|f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

C'est un *produit hermitien* sur le $\mathbf{C}-$espace vectoriel des fonctions $2\pi-$périodiques et continues par morceaux. Remarquons :

$$(g|f) = \overline{(f|g)} \text{ et } (f|f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt := ||f||_2^2 \text{ le carré de la } norme\text{−}2.$$

Notons aussi, pour $n \in \mathbf{Z}$, $e_n$ l'application $x \mapsto e^{inx}$. Alors

$$\forall n \in \mathbf{Z}, c_n = (e_n|f).$$

D'autre part, les calculs menés sur les polynômes trigonométriques s'écrivent :

$$\forall n, m \in \mathbf{Z}, (e_n|e_m) = \delta_{nm}.$$

La famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est donc *orthonormée*.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Désignons par $S_n$ la somme partielle de rang $n$ de la série de Fourier de $f$ *i.e.* pour $x \in \mathbf{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ avec $c_k = (e_k|f) = (e_k|S_n)$ pour $-n \leqslant k \leqslant n$. On a :

$$\begin{aligned}(S_n|f - S_n) &= (\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k|f - S_n) = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}(e_k|f - S_n)\\ &= \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k}\,[(e_k|f) - (e_k|S_n)]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $S_n$ et $f - S_n$ sont *orthogonales.*

**Proposition 2.3.6.1 (Inégalité de Bessel)** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une application $2\pi$−périodique et continue par morceaux. Alors, les séries $\sum(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ et $\sum(|a_n|^2 + |b_n|^2)$ sont convergentes et

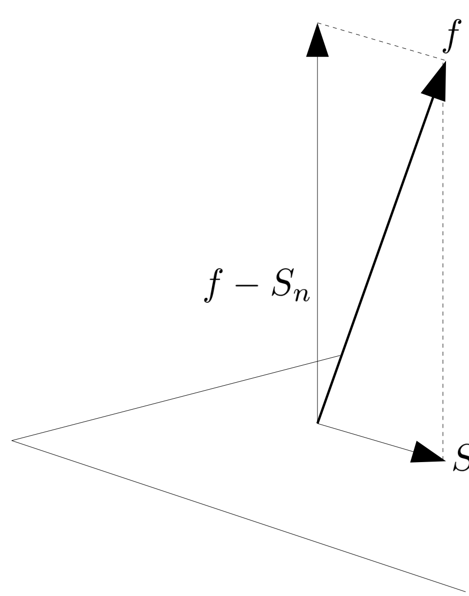
$$|c_0|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty}(|c_k|^2 + |c_{-k}|^2) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

ou encore :

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

**Dém.** Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $f = f - S_n + S_n$. D'où :

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 = (f|f) &= (f - S_n + S_n|f - S_n + S_n)\\ &= (f - S_n|f - S_n) + (f - S_n|S_n) + (S_n|f - S_n) + (S_n|S_n)\\ &= \|f - S_n\|_2^2 + \|S_n\|_2^2 \ (\textit{théorème de Pythagore}).\end{aligned}$$




Or, $\|S_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$. Comme $\|f - S_n\|_2^2 \geqslant 0$, il en résulte :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

En particulier, la série à termes positifs $\sum(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$ est convergente et

$$|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2 dt.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $|a_n|^2 = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 + c_n\overline{c_{-n}} + \overline{c_n}c_{-n}$ et $|b_n|^2 = |c_n|^2 + |c_{-n}|^2 - (c_n\overline{c_{-n}} + \overline{c_n}c_{-n})$,

$$|a_n|^2 + |b_n|^2 = 2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2).$$

Il vient :

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2 dt.$$

En réalité, le résultat est plus précis :

**Théorème 2.3.6.2 (de Parseval)** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une application $2\pi$−périodique et continue par morceaux.

$$|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2 dt$$

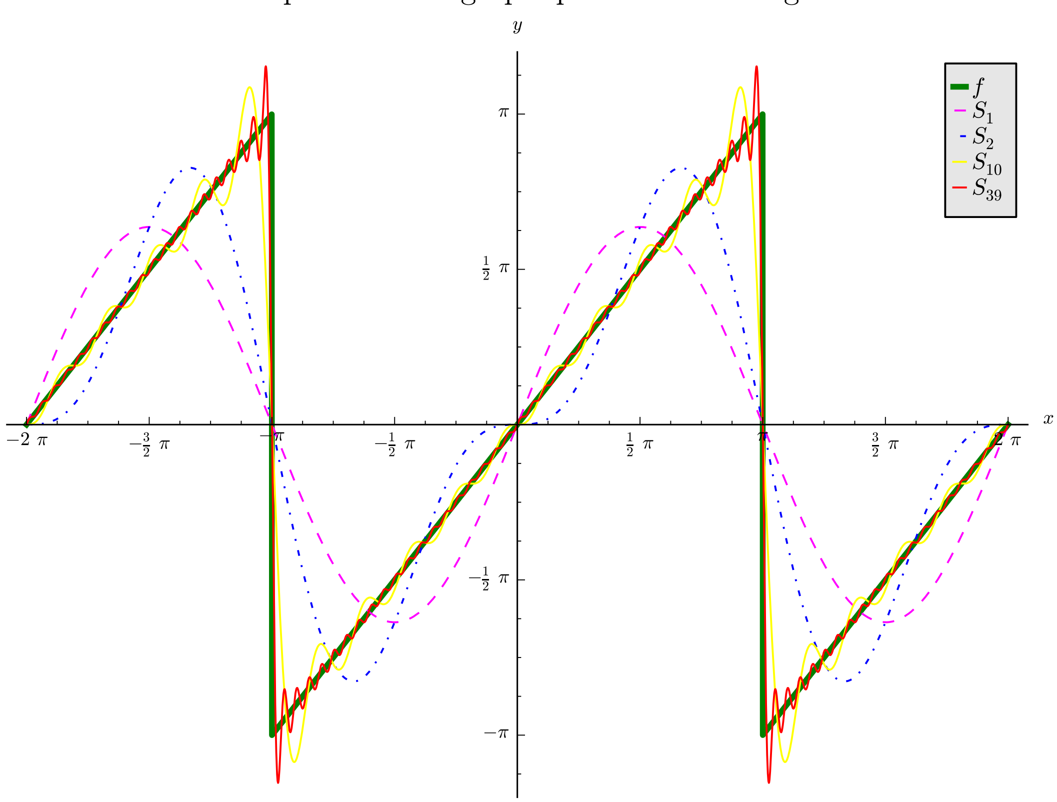
et

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2 dt.$$

**Remarque 2.3.6.3** Si $f$ représente une vibration quelconque (onde, corde, signal électrique, etc.) et $t$ = le temps, alors $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2 dt$ représente l'*énergie totale* de la vibration sur une période. La formule de Parseval dit que cette énergie totale est la somme des énergies de chacune des composantes de la vibration.

**Exemple 2.3.6.4** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $2\pi$−périodique tel que $\forall x \in [-\pi, \pi[,\ f(x) = x$.

Représentation graphique à l'aide de sage



```
g = Piecewise([[(-pi,pi),x]]); f = lambda x:g(x-2*floor((x+pi)/(2*pi))*pi);
a = -2*pi; b = -a;
graph = plot(f,a,b,color='green',legend_label='$f$',thickness=3,ticks=[pi/2,pi/2],tick_formatter=[pi,pi])
S_1 = g.fourier_series_partial_sum(2,pi); graph +=plot(S_1,x,a,b,color='magenta',legend_label='$S_1(=S_2)$',linestyle='--');
S_3 = g.fourier_series_partial_sum(4,pi); graph +=plot(S_3,x,a,b,color='blue',legend_label='$S_3$',linestyle='-.');
S_7 = g.fourier_series_partial_sum(8,pi); graph +=plot(S_7,x,a,b,color='yellow',legend_label='$S_7$');
S_39 = g.fourier_series_partial_sum(40,pi); graph +=plot(S_39,x,a,b,color='red',legend_label='$S_{39}$');
graph.axes_labels(['$x$','$y$']);
show(graph);
graph.save('/Users/ssimo/Documents/MATH326-graphe-fourier-3-sage.pdf')
```

$f$ «impaire» $\Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = 0$.
Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \overbrace{t\sin(nt)}^{paire}\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^\pi \cos(nt)dt}_{0}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}(-\frac{\pi(-1)^n}{n}) \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

D'où :

$$S(f)(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Et

- $\forall x \in ]-\pi,\pi[,\ S(f)(x) = x$
- $S(f)(n\pi) = 0 = \dfrac{\pi-\pi}{2}$.

Appliquons la formule de Parseval :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2}$$

et

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t^2dt = \frac{\pi^2}{3}.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ !$$

### 2.3.7 Convergence normale et uniforme d'une série de Fourier

**Proposition 2.3.7.1** Si $f : \mathbf{R} \xrightarrow{C^1} \mathbf{C}$ et $C^2$ par morceaux alors la série de Fourier converge normalement vers $f$.

**Dém.** Soit $n \in \mathbf{Z}^*$. On a :

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \left[-\frac{f(t)e^{-int}}{in}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{in}\left(\left[-\frac{f'(t)e^{-int}}{in}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}dt\right) \\ &= -\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{s_k}^{s_{k+1}} f''(t)e^{-int}dt. \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbf{Z}^*$, $|c_n| \leqslant \dfrac{\|f''\|_\infty}{n^2}$. D'où la convergence normale de la série de Fourier de $f$, vers $f$ d'après le théorème de Dirichlet.

**Remarque 2.3.7.2** En réalité, $c_n = o(\dfrac{1}{n^2})$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f''(t)e^{-int}dt = 0$.

**Théorème 2.3.7.3** Si $f : \mathbf{R} \overset{C^0}{\to} \mathbf{C}$ et $C^1$ par morceaux alors la série de Fourier de $f$ converge normalement (donc *uniformément*) sur $\mathbf{R}$ vers $f$.

**Dém.** Comme $f$ est en particulier $C^1$ par morceaux le théorème de Dirichlet s'applique et la série de Fourier de $f$ est convergente. De plus, $f$ étant continue,

$$\forall x \in \mathbf{R}, c_0 + \sum_{n\geqslant 1} \left(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\right) \longrightarrow f(x).$$

Notons $\begin{array}{rccl} g: & \mathbf{R} & \to & \mathbf{C} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ n'est pas dérivable en } x \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$. Par hypothèse, $g$ est continue par morceaux.

Soit $n \in \mathbf{Z}^*$ :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{f(t)e^{-int}}{in}\right]_0^{2\pi} - \frac{i}{n}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt\right) \\ &= -\frac{i}{n}c_n(g). \end{aligned}$$

On a bien sur,

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, (|c_n(g)| - \frac{1}{n})^2 \geqslant 0$$

ou encore,

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, \left|\frac{c_n(g)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(|c_n(g)|^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Il vient,

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, |c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2}\left(|c_n(g)|^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

En outre, d'après l'inégalité de Bessel, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(|c_n(g)|^2 + |c_{-n}(g)|^2\right)$ est convergente. Par conséquent la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|)$ est convergente, et la série

$$c_0 + \sum_{n\geqslant 1}\left(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\right)$$

est normalement convergente.

**Exemple 2.3.7.4** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est $2\pi$−périodique et $\forall x \in [-\pi, \pi[$, $f(x) = |x|$, alors la série de Fourier de $f$ converge normalement vers $f$.