Université de Savoie Année 10/11

MATH301 (6 ECTS)

Mathématiques générales : Analyse

Stéphane Simon

6 décembre 2010

Table des matières

Chapitre 1

Suites

1.1 Rappels

Définition 1.1.1 Soit E un ensemble. Une *suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou simplement (u_n)) *à valeurs* E est une application u de $\mathbb{N}$ dans E. L'image de n est le $n-$*ième terme* de la suite.

Remarque 1.1.1

1. En général ici, $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$.
2. Si $n_0 \in \mathbb{N}$, on considère quelquefois la suite *tronquée* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$; la notation « pour $n >> 1$ » signifiera « $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)$ ».

Exemple 1.1.1 Soient $a, r \in \mathbb{C}$.

1. On pose
$$\begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = u_n + r \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$
(u_n) est la suite *arithmétique de raison* r et de *premier* terme a. Par récurrence sur n, on obtient $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = a + nr$.
2. On pose
$$\begin{cases} u_0 & = a \\ u_{n+1} & = ru_n \quad \text{si } n \geqslant 0 \end{cases}$$
(u_n) est la suite *géométrique de raison* r et de *premier* terme a. Par récurrence sur n, on obtient $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = ar^n$.

Définition 1.1.2 Une suite (u_n) *converge* vers $l \in E$ si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) : |u_n - l| < \epsilon.$$

La suite est *convergente* et $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est **la** *limite*. Si la suite n'est pas convergente alors elle est *divergente*.

Remarque 1.1.2

1. Si la limite d'une suite existe alors elle est unique.
2. On a $|\cdot|_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} \equiv |\cdot|_{\mathbb{R}}$.

Exemple 1.1.2 Si $|r| < 1$ alors la suite géométrique de raison r et de premier terme a converge vers 0.

Proposition 1.1.1 Soit (u_n) (resp. (v_n)) une suite réelle convergente vers l (resp. l'). On suppose $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0) : u_n \leqslant v_n$. Alors $l \leqslant l'$.

Remarque 1.1.3 Si $u_n < v_n$ alors on n'a pas nécessairement $l < l'$.

Exemple 1.1.3 $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 0$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Théorème 1.1.1 (d'encadrement) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites réelles telles que $\lim u_n = \lim w_n = l$. On suppose $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0) : u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Alors (v_n) est convergente et $\lim v_n = l$.

Définition 1.1.3 Soit $A \subset \mathbb{R}$, A non vide. La partie A est *majorée* par $M \in \mathbb{R}$ si $\forall a \in A : a \leqslant M$. **La** *borne supérieure* M d'une partie majorée A de $\mathbb{R}$ est le plus petit des majorants de A *i.e.*

1. M est un majorant de A
2. si M' est un majorant de A alors $M \leqslant M'$.

On note $M = \sup A$.

Remarque 1.1.4

1. **(Axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$)** Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
2. La borne supérieure, si elle existe, est unique.

Proposition 1.1.2 Soit $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$ une partie majorée.

$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ (\forall \epsilon > 0)(\exists a \in A) : M - \epsilon < a. \end{cases}$$

Remarque 1.1.5 On définit de manière analogue *minorant* et *borne inférieure*.

Définition 1.1.4 Une partie A de $\mathbb{C}$ est *bornée* si $\{|a| : a \in A\}$ est majorée. En particulier, une partie de $\mathbb{R}$ est bornée ssi elle est majorée et minorée. Une suite (u_n) est *bornée* si $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ est bornée.

Proposition 1.1.3 Une suite réelle (u_n) croissante (resp. décroissante) est majorée (resp. minorée) ssi (u_n) est convergente. Dans ces conditions, $\lim u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\lim u_n = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$).

Exemple 1.1.4 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $u_0 \in I$ et $f : I \to I$ une fonction croissante. On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$. Si $u_0 \leqslant u_1$ (resp. $u_0 > u_1$) alors (u_n) est croissante (resp. décroissante). De plus, si (u_n) est convergente vers $l \in I$ et f continue à gauche (resp. à droite) en l alors l est un point fixe de f.

1.2 Suite extraite, théorème de Bolzano-Weierstrass et suite de Cauchy

Définition 1.2.1 Soient (u_n) une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante (*i.e.* $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) < \varphi(n+1)$). La *suite extraite* ou *sous-suite* de (u_n) par φ est la suite $(u_{\varphi(n)})$.

Exemple 1.2.1 La suite définie par les termes d'indice pair u_{2k} est extraite de (u_n).

Proposition 1.2.1 Une suite extraite d'une suite (u_n) convergente vers l converge aussi vers l.

Dém. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$. Comme φ est strictement croissante, $n \geqslant N \Rightarrow \varphi(n) \geqslant N$. Dés lors, $n \geqslant N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - l| < \epsilon$ et $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l.

Remarque 1.2.1

1. La suite (v_n) définie par $v_0 = u_1$, $v_1 = u_2$, $v_n = u_3$ pour $n \geqslant 2$ n'est pas extraite de (u_n) (sauf si (u_n) est *stationnaire* pour $n \geqslant 3$).
2. On peut extraire successivement des sous-suites en composant des applications $\varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes, de manière transitive (mais *contravariante*). Par exemple, si $(v_n) = (u_{\varphi_1(n)})$ est extraite de (u_n) alors une suite extraite $(w_n) = (v_{\varphi_2(n)})$ de (v_n) s'écrit $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)})$, qui est encore une suite extraite de (u_n).

Théorème 1.2.1 (de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$) De toute suite réelle bornée (u_n) on peut extraire une sous-suite convergente.

Dém. Posons $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, u_{n+k} \geqslant u_n\}$.

– $\mathcal{D}$ est infini. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ défini par $\varphi(0) = \min \mathcal{D}$ et $\varphi(n+1) = \min \mathcal{D} \setminus \{\varphi(0), \ldots, \varphi(n)\}$ pour $n \geqslant 0$. L'application φ est strictement croissante donc $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de (u_n), croissante par définition de $\mathcal{D}$ et majorée par hypothèse. D'où la convergence de $(u_{\varphi(n)})$.

– $\mathcal{D}$ est fini. Dés lors, $(\forall n > d = \max \mathcal{D})(\exists k \in \mathbb{N}^*) : u_{n+k} < u_n$. Posons $\varphi(0) = n_0 = d+1$; il existe $\varphi(1) = n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} < u_{n_0}$. Comme $n_1 \notin \mathcal{D}$, il existe $\varphi(2) = n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} < u_{n_1}$. On construit de proche en proche une suite stritement décroissante $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ extraite de (u_n), minorée. D'où la convergence de (u_{n_k}).

Définition 1.2.2 Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Remarque 1.2.2 La condition unique $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$ n'entraîne pas la convergence de l'une des suites ($u_n = (-1)^n$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n+1}$). Cependant :

Théorème 1.2.2 Deux suites réelles adjacentes convergent vers la même limite.

Définition 1.2.3 Une suite (u_n) est de *Cauchy* si $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall p, q \geqslant N)$: $|u_p - u_q| < \epsilon$.

Proposition 1.2.2 Une suite de Cauchy est bornée.

Exercice 1.2.1 Démontrer la proposition précédente.

Théorème 1.2.3 Une suite (réelle ou complexe) est convergente ssi elle est de Cauchy.

Exercice 1.2.2 Montrer la condition nécessaire.

Remarque 1.2.3 En particulier, la détermination de la limite n'est pas nécessaire pour assurer la convergence d'une suite de Cauchy (*réelle ou complexe* !).

1.3 Équivalents

Dans ce paragraphe, on va traiter l'équivalence de fonctions réelles ou complexes, d'une variable réelle, le cas des suites est analogue (au voisinage de $a = +\infty$). On considère l'ensemble des fonctions définies sur un voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, sauf éventuellement en a, du type $]a-\delta, a+\delta[$, $[a, a+\delta[$, $]b, +\infty[$ (*i.e.* $a = +\infty$) ou leur symétrique.

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1 La fonction f est *négligeable devant* g si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists V \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g}(a))(\forall x \in V - \{a\}) : |f(x)| \leqslant \epsilon |g(x)|.$$

On notera $f =_a o(g)$ ou simplement $f = o(g)$ (*notation de Landau*).

Proposition 1.3.1

$$f = o(g) \Leftrightarrow (\exists V \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g}(a))(\exists \omega : V \to \mathbb{C}) : f = \omega g \text{ avec } \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$

Remarque 1.3.1 f est négligeable devant la fonction nulle (ou devant elle-même) ssi il existe un voisinage de a sur lequel f est nulle.

Exemple 1.3.1 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 1$. On a :

$$n^\alpha = o(a^n),\ a^n = o(n!) \text{ et } n! = o(n^n).$$

En effet, $\dfrac{n^\alpha}{a^n} = e^{n(\frac{\ln n}{n}\alpha - \ln a)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$; soit $n \geqslant n_0 \geqslant a$ alors $0 \leqslant \dfrac{a^n}{n!} \leqslant \left(\dfrac{a}{n_0+1}\right)^{n-n_0} \displaystyle\prod_{k=1}^{n_0} \frac{a}{k}$; enfin, $\dfrac{n!}{n^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Définition 1.3.2 La fonction g *domine* f en a, noté $f =_a O(g)$, si

$$(\exists A > 0)(\exists V \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g}(a))(\forall x \in V - \{a\}) : |f(x)| \leqslant A |g(x)|.$$

Exemple 1.3.2 $x^2 + x + \ln x = O(x^2)$.

Proposition 1.3.2 Soient f, g et h des fonctions définies sur un voisinage commun de a.

1. $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$.

2. $f = o(h) \wedge g = o(h) \Rightarrow f + g = o(h)$.
3. $(f = O(g) \wedge g = o(h)) \vee (f = o(g) \wedge g = O(h)) \Rightarrow f = o(h)$.
4. $f = o(g) \Rightarrow \lambda f = o(g)$.

En particulier, $\{f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{C}) : f = o(h)\}$ est un ev.

Définition 1.3.3 Les fonctions f et g sont *équivalentes* en a, noté $f \sim_a g$ (ou simplement $f \sim g$), si

$$f - g =_a o(g).$$

Proposition 1.3.3 L'équivalence entre fonctions est une relation d'équivalence.

Proposition 1.3.4 Si g ne s'annule pas sur un voisinage (*épointé*) de a alors

$$f \sim g \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f}{g}(x) = 1.$$

De même,

$$f \sim g \Leftrightarrow \frac{1}{f} \sim \frac{1}{g}.$$

Proposition 1.3.5

$$f \sim g \Leftrightarrow (\exists V \in \mathcal{V}_{\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g}(a))(\exists \omega : V \to \mathbb{C}) : f = (1 + \omega) g \text{ avec } \lim_{x \to a} \omega(x) = 0.$$

Exemple 1.3.3

1. $\cosh x \sim_{+\infty} \dfrac{e^x}{2}$ et $\sinh x \sim_{-\infty} -\dfrac{e^{-x}}{2}$.
2. $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ (*formule de Stirling*).
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$; en réalité, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma$ (*constante d'Euler*).

Remarque 1.3.2 Si $f = o(g)$, $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$ alors $f_1 = o(g_1)$.

1.3.2 Opérations

Proposition 1.3.6 (Compatibilté avec le produit) Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

Corollaire 1.3.1 Si $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ et f_2 sans zéro sur un voisinage de a, alors $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$.

Proposition 1.3.7 Si f prend des valeurs positives (resp. strictement positives) et $f \sim g$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$ (resp. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$) :$f^\alpha \sim g^\alpha$.

Dém. $f \sim g \Leftrightarrow \exists w \to 0 : f = (1 + \omega) g$. Donc, si $\alpha \geqslant 0$ alors $f^\alpha = g^\alpha (1 + \omega)^\alpha = g^\alpha (1 + \alpha\omega + \tilde{\omega}\omega) = g^\alpha (1 + \omega(\alpha + \tilde{\omega}))$. Et $\omega(\alpha + \tilde{\omega}) \to 0$. Le cas $\alpha < 0$ se démontre de manière analogue.

Proposition 1.3.8
$$e^f \sim e^g \Leftrightarrow f - g \to 0.$$

Dém. $e^f \sim e^g \Leftrightarrow e^{f-g} \to 1 \Leftrightarrow f - g \to 0.$

Corollaire 1.3.2 Si f est à valeurs $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 1$ (mais éventuellement infinie) alors
$$f \sim g \Rightarrow \ln f \sim \ln g.$$

Dém. Posons $\tilde{f} = \ln f$ et $\tilde{g} = \ln g$. On a $f \sim g \Leftrightarrow \tilde{\omega} = \tilde{f} - \tilde{g} \to 0$. Comme f ne tend pas vers 1, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $|\tilde{g}| > \epsilon_0$. Donc $\dfrac{\ln f}{\ln g} - 1 = \dfrac{\tilde{\omega}}{\ln g} \to 0$ *i.e.* $\ln f \sim \ln g$.

Remarque 1.3.3

1. La condition suffisante est fausse : en effet, si $f(x) = x$ et $g(x) = x^{1+\frac{1}{\ln x}}$ alors $\ln f = \ln x = \ln x + 1 - 1 = \ln g + \omega \ln g$ avec $\omega = -\frac{1}{\ln g}$. Donc $\ln f \sim_{+\infty} \ln g$. En revanche, $\dfrac{g}{f} = x^{\frac{1}{\ln x}} \to e$ *i.e.* $f \not\sim g$.
2. $f = 1 + x \sim_0 1 + x^2$ cependant $\ln f \sim x \not\sim_0 x^2 \sim \ln g$.

Si $f_1(x) = 1 + x$, $f_2(x) = -1$, $g_1(x) = 1$ et $g_2(x) = -1$ alors $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ mais $f_1 + f_2 \not\sim g_1 + g_2$. Cependant :

Proposition 1.3.9 Soient $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$.

1. Si $g_2 = o(g_1)$ alors $f_1 + f_2 \sim g_1$.
2. S'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $g_2 \sim \alpha g_1$ alors
   (a) si $\alpha \neq -1$ alors $f_1 + f_2 \sim (1+\alpha) g_1$
   (b) si $\alpha = -1$ alors $f_1 + f_2 = o(g_1)$.

Dém.

1. Par défnition car $g_1 + g_2 + o(g_1) = g_1 + o(g_1)$.
2. (a) $f_1 = g_1 + o(g_1)$ et $f_2 = \alpha g_1 + o(g_1)$. D'où $f_1 + f_2 = (1+\alpha)g_1 + o(g_1)$
   (b) Le calcul précédent reste valable.

Dans un situation favorable on a en fait :

Proposition 1.3.10 Sous les notations de la proposition précédente, si on suppose en outre $g_1 > 0$ et $g_2 > 0$ alors $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$.

Chapitre 2

Séries

2.1 Préliminaire sur les intégrales généralisées

On considère une fonction f règlée sur tout intervalle $[a, x]$ de $[a, +\infty[$ (*i.e.* les limites à gauche et à droite de f existent en chaque point de $[a, x]$). La fonction f est donc *intégrable* au sens de Riemann sur $[a, x]$ ou *localement intégrable* sur $[a, +\infty[$. Pour $x \geqslant a$, on note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ son intégrale de Riemann sur $[a, x]$.

Exemple 2.1.1

1. Les fonctions continues par morceaux sont règlées.
2. Les fonctions monotones sont règlées.

Remarque 2.1.1 Une application sur $[a, b]$ est règlée ssi elle est limite uniforme de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Proposition 2.1.1 L'application F est continue (en fait, continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable en dehors d'un ensemble au plus dénombrable) sur $[a, +\infty[$. Si f est continue à gauche (resp. à droite) en un point alors F est dérivable à gauche (resp. à droite) en ce point.

Définition 2.1.1 L'*intégrale généralisée*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt$$

converge si $\lim_{X \to +\infty} F(X)$ existe et dans ce cas

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{X \to +\infty} F(X).$$

Sinon, l'intégrale généralisée *diverge*.

Exemple 2.1.2 $\int_0^1 \ln t dt$ est convergente. En effet, si $t = e^{-u}$ alors

$$\int_0^1 \ln t dt = \int_0^{+\infty} u(-e^{-u})du = \left[ue^{-u}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} -e^{-u}du = \left[e^{-u}\right]_0^{+\infty} = -1.$$

Proposition 2.1.2 Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une application localement intégrable. Alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow (\exists M \in \mathbb{R}_+)(\forall x \in [a, +\infty[) : \int_a^x f(t)dt \leqslant M.$$

Dém. Comme $f \geqslant 0$, F est croissante. Donc $\lim\limits_{X\to+\infty} F(X)$ existe ssi F est majorée.

Exemple 2.1.3

1. $$\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{\beta t} dt : \begin{cases} \text{converge} & \text{si } \beta < 0 \text{ ou } (\beta = 0 \text{ et } \alpha < -1) \\ \text{diverge} & \text{sinon.} \end{cases}$$
   - Si $\beta < 0$ alors, par croissance comparée, il existe $X_{\alpha,\beta} \geqslant 1$ tel que $x \geqslant X_{\alpha,\beta} \Rightarrow x^\alpha e^{\frac{\beta}{2}x} < 1$. D'où $x \geqslant X_{\alpha,\beta} \Rightarrow x^\alpha e^{\beta x} < e^{\frac{\beta}{2}x}$. Il s'ensuit que $\int_{X_{\alpha,\beta}}^{+\infty} t^\alpha e^{\beta t} dt$ existe et donc $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{\beta t} dt$ converge.
   - Si $\beta = 0$ et $\alpha < -1$ alors $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{\beta t} dt$ est en fait une intégrale de Riemann convergente.
   - Si $\beta > 0$ ou ($\beta = 0$ et $\alpha \geqslant -1$) alors $(\exists X_{\alpha,\beta} \geqslant 1)(\forall t \geqslant X_{\alpha,\beta}) : t^\alpha e^{\beta t} \geqslant \frac{1}{t}$. Or,

   $$\int_{X_{\alpha,\beta}}^X \frac{dt}{t} = \ln(\frac{X}{X_{\alpha,\beta}}) \text{ pour } X \geqslant X_{\alpha,\beta}.$$

   Par conséquent, $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{\beta t} dt$ diverge.

2. Si f est une fonction *causale d'ordre exponentielle* alors $\mathcal{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ est bien définie pour $p > a$ (où a désigne l'*abscisse de convergence*) et s'appelle la *transformée de Laplace* de f.

Proposition 2.1.3 Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ localement intégrables telles que $\exists x_0 \geqslant a : f_{|[x_0,+\infty[} \leqslant g_{|[x_0,+\infty[}$. Alors

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

Dém.

1. $\int_a^X f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^X f$. Ainsi la convergence de $\int_a^{+\infty} f$ est équivalente à celle de $\int_{x_0}^{+\infty} f$. Or, $\int_{x_0}^{+\infty} g$ converge par hypothèse et majore $\int_{x_0}^X f$ pour tout $X \geqslant x_0$. D'où le résultat en vertu de la proposition précédente.
2. est la contraposée de 1.

Proposition 2.1.4 Soient $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ localement intégrables. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f}{g}(x) = l > 0$ alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ sont de même nature.}$$

Dém. Comme $l > 0$, il existe $X \geqslant a$ tel que

$$x \geqslant X \Rightarrow \frac{l}{2} g(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{3l}{2} g(x).$$

Par suite, si $\int_X^{+\infty} f(t)dt$ est convergente (resp. divergente) alors $\int_X^{+\infty} g(t)dt$ est convergente (resp. divergente) d'après la proposition précédente. Et réciproquement.

Exemple 2.1.4 Soit $p : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ (la restriction d')une fonction polynomiale de degré $d > 1$ (par exemple, $p(x) = a_d x^d + \cdots + a_0$ avec $a_d > 0$ et $a_i \geqslant 0$ pour $0 \leqslant i < d$). Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{p(t)}$ converge.

Corollaire 2.1.1 Soient f et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ localement intégrables. On suppose $f \sim_{+\infty} g$. Alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ sont de même nature.}$$

Proposition 2.1.5 (Critère de Cauchy pour les limites) Soient $x_0 \in [a, b]$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application. Alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x, y \in [a, b[: |x - x_0| < \eta, |y - x_0| < \eta) : |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Remarque 2.1.2 On a une proposition analogue pour la limite en $+\infty$.

Théorème 2.1.1 (Critère de Cauchy pour les intégrales) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ localement intégrable.

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge} \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists X \geqslant a)(\forall B \geqslant A \geqslant X) : \left| \int_A^B f(t)dt \right| < \epsilon.$$

Dém. On applique le critère de Cauchy pour la limite en $+\infty$ à la fonction F.

Exemple 2.1.5 (Intégrale de Fresnel) On considère $\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$. En posant $x = t^2$, on obtient

$$\text{pour } B \geqslant A > 0, \int_A^B \cos t^2 dt = \int_{A^2}^{B^2} \frac{\cos x}{2\sqrt{x}} dx.$$

En intégrant par partie, il vient :

$$\left[\frac{\sin x}{2\sqrt{x}} \right]_{A^2}^{B^2} + \frac{1}{4} \int_{A^2}^{B^2} \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

D'où la convergence de $\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt$.

Définition 2.1.2 Une application $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est *absolument intégrable* si

$$\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$$

converge. Dans ce cas, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est *absolument convergente*.

Théorème 2.1.2 $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Dém. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge, il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall A, B \geqslant M$: $\int_A^B |f(t)|dt < \epsilon$. Or, $|\int_A^B f(t)dt| \leqslant \int_A^B |f(t)|dt$.

Exemple 2.1.6

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ est absolument convergente.
2. Si f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ alors $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi xt}dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et s'appelle la *transformée de Fourier* de f.

Remarque 2.1.3 Lorsque f est intégrable mais non absolument intégrable (sur $[a, b[$), on parle d'intégrale *semi-convergente.*

Exemple 2.1.7 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente (non absolument convergente !).

2.2 Série numérique

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1 La *série* de *terme général* (u_n) est la suite (s_n) des *sommes partielles* de la suite (u_n) *i.e.*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

et est notée $\sum u_n$.

Exemple 2.2.1 Soit (u_n) la suite géométrique de raison r et de premier terme a. La suite (u_n) converge ssi $a = 0$ ou $r = 1$ ou $|r| < 1$; de plus,

$$\forall n \in \mathbb{N} : s_n = \begin{cases} a\dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r} & \text{si } r \neq 1, \\ (n+1)a & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 2.2.2 Une série $\sum u_n$ est *convergente* si la limite (de la suite) des sommes partielles (s_n) existe *i.e.*

$$\exists S \in \mathbb{C} : S = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La *somme* de $\sum u_n$ est S.

Exemple 2.2.2

1. $\forall k \in \mathbb{N}^* : \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Donc $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$. Dés lors $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge vers 1. Plus généralement, si $u_n = a_n - a_{n+1}$ alors $s_n = a_0 - a_{n+1}$. Donc (s_n) converge ssi (a_n) converge et dans ce cas $\sum u_n$ a pour somme $a_0 - \lim a_n$.

2. On a $\ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(k+1) - \ln(k)$. D'où la divergence de $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série *exponentielle* $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente et $e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Proposition 2.2.1 Soit $\sum u_n$ une série de terme général (u_n).

1. $\sum u_n$ converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ la suite (r_n) définie par $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ tend vers 0. Dans ce cas, $s_n \to S$ et $r_n = S - s_n$.

Dém.

1. Comme $\sum u_n$ converge, la suite des sommes partielles est de Cauchy. En particulier, $u_n = s_n - s_{n-1}$ tend vers 0.
2. Par définition de la convergence de (s_n).

Remarque 2.2.1 La suite (r_n) est la suite des *restes* de la série convergente $\sum u_n$.

Corollaire 2.2.1 $(u_n) \not\to 0 \Rightarrow \sum u_n$ ne converge pas.

Remarque 2.2.2 La réciproque est fausse.

Exemple 2.2.3

1. Une suite géométrique de raison r converge vers 0 ssi $a = 0$ ou $|r| < 1$. Dans ce cas, $\sum u_n$ converge vers $\frac{a}{1-r}$ ou 0 (si $r = 1$ et $a = 0$). Par exemple, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.
   Exercice : calculer le reste de la série.
2. La série $\sum_{n\geqslant 1} \ln(1+\frac{1}{n})$ n'est pas convergente bien que $(\ln(1+\frac{1}{n}))$ tende vers 0.

Remarque 2.2.3 La série (*réelle ou complexe*) $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est de Cauchy. Autrement dit :

Théorème 2.2.1 $\sum u_n$ converge ssi $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(\forall p \geqslant 0) : |s_{n+p} - s_n| < \epsilon$.
D'où :

Proposition 2.2.2 La nature d'une série $\sum u_n$ reste inchangée en modifiant un nombre fini de termes de (u_n) (évidemment, la limite, si elle existe, peut être différente).

Proposition 2.2.3 Soient $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ deux séries convergentes de sommes S et S' respectivement.

1. La série de terme général $(u_n) + (u'_n) := (u_n + u'_n)$ converge vers $S + S'$.
2. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors la série de terme général $\lambda(u_n) := (\lambda u_n)$ converge vers λS.

Remarque 2.2.4

1. Ainsi, l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On verra que l'on peut munir un de ses sous-espaces vectoriels d'une structure de $\mathbb{K}-$algèbre.
2. Si l'une seule des 2 séries $\sum u_n$ ou $\sum v_n$ est divergente alors $\sum u_n + v_n$ est aussi divergente. En revanche, si les 2 séries sont divergentes il peut arriver que la série somme soit convergente.

2.2.2 Séries à termes positifs

Résultats généraux

Proposition 2.2.4 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow (s_n) \text{ est majorée.}$$

Dém. Comme $u_n \geqslant 0$, (s_n) est croissante. Or (s_n) converge ssi (s_n) est majorée.

Définition 2.2.3 Une série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 2.2.5 Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Dém. Comme $\sum |u_n|$ est convergente, elle est de Cauchy. Or, $|s_q - s_p| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |u_k|$ donc (s_n) est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et donc converge.

Remarque 2.2.5 Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Exemple 2.2.4 (important) Étudions la série $\sum \frac{1}{n}$. On a $s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Donc la série *harmonique* (ou de *Riemann* avec $\alpha = 1$) est divergente.

Remarque 2.2.6 L'exemple précédent ne présage pas de la convergence de la série *alternée* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (qui n'est pas à termes positifs) !

Définition 2.2.4 Si $\sum u_n$ converge mais $\sum |u_n|$ diverge alors la série $\sum u_n$ est *semi-convergente.*

Exemple 2.2.5 (non trivial) La série $\sum \frac{\sin n}{n}$ est semi-convergente.

Critères de comparaison entre séries à termes positifs

Proposition 2.2.6 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N : u_n \leqslant v_n$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Dém. Comme la nature de $\sum u_n$ reste inchangée si l'on modifie les N premiers termes de (u_n), on peut supposer $u_i = v_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant N-1$. La suite des sommes partielles (s_n) de (u_n) est croissante car $u_n \geqslant 0$. Par hypothèse, elle est dominée par la suite des sommes partielles (s'_n) de (v_n) qui est convergente vers S'. Donc (s_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} s_n = S \leqslant S'$.

Remarque 2.2.7 Si $\sum u_n$ est divergente alors $\sum v_n$ aussi.

Exemple 2.2.6 $\sum \frac{\sin n}{n(n-1)}$ est convergente.

Corollaire 2.2.2 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n = O(v_n)$ alors

$$\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Dém. Il existe $\alpha \geqslant 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_n \leqslant \alpha v_n$. Et on applique la proposition précédente.

Corollaire 2.2.3 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs pour n assez grand. Si $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N) : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ alors

$$\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Dém. On a $\dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{u_N}{v_N} = \alpha > 0$ pour $n \geqslant N$ *i.e.* $u_n = O(v_n)$.

Corollaire 2.2.4 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. S'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geqslant N : \alpha u_n \leqslant v_n \leqslant \beta u_n$ alors

$$\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

Dém. On a $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Exemple 2.2.7

1. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{2^n + 5}{3^n - 11}$. Alors $u_n > 0$ pour $n \geqslant 3$. De plus $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \dfrac{1 + \frac{5}{2^n}}{1 - \frac{11}{3^n}}$. Donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; elle est donc convergente.
2. Ce corollaire fournit une nouvelle preuve de la divergence de la série harmonique par comparaison avec la série équivalente $(\ln(1 + \frac{1}{n}))$.

Proposition 2.2.7 Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ localement intégrable. Alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge ssi } \exists (X_n) \subset [a, +\infty[\text{ avec } \lim X_n = +\infty : \left(\int_a^{X_n} f(t)dt\right)_n \text{ converge.}$$

Remarque 2.2.8 Cette proposition est fausse si f n'est pas positive pour $x >> 1$.

Proposition 2.2.8 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ localement intégrable telle qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$: $f_{|[x_0,+\infty[}$ soit positive et décroissante. Alors $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.
Dém. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = f(n)$. En modifiant f sur un intervalle majoré, on peut supposer f positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} : f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k).$$

En sommant terme à terme, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} u_k \leqslant \int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Remarque 2.2.9 Si $v_n = u_0 + \cdots + u_n - \displaystyle\int_0^n f(t)dt$ avec f positive décroissante, alors (v_n) est une suite positive et décroissante (car $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - \int_n^{n+1} f(t)dt$). Donc converge.

Exemple 2.2.8 La suite $(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dt}{t})_n$ est convergente ; autrement dit : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \to \gamma > 0$; la limite est la *constante d'Euler* $\gamma \simeq 0,577$. Ce qui fournit une nouvelle preuve de la divergence de la série harmonique.

Corollaire 2.2.5 (Série de Riemann) La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est

$$\begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \alpha > 1 \\ \text{divergente} & \text{si } \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Dém. On considère la fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ et on applique la proposition précédente.

Remarque 2.2.10 La série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, définie pour $\Re(s) > 1$, peut être prolongée à $\mathbb{C} - \{1\}$ (de manière analytique) : c'est la fonction ζ (*zêta*) de Riemann.

Corollaire 2.2.6 (Série de Bertrand) La série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{\ln^\alpha(n)}{n^\beta}$ est

$$\begin{cases} \text{convergente} & \text{si } \beta > 1 \text{ ou } (\beta = 1 \text{ et } \alpha < -1) \\ \text{divergente} & \text{si } \beta < 1 \text{ ou } (\beta = 1 \text{ et } \alpha \geqslant -1). \end{cases}$$

Dém. On considère $f(x) = \dfrac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta}$ sur $[2, +\infty[$. Alors $f \searrow$ pour $x >> 1$ ssi $\beta > 0$ ou ($\beta = 0$ et $\alpha \leqslant 0$). On compare dans ce cas la série à l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} u^\alpha e^{(1-\beta)u} du$. Or, une étude de la convergence de cette intégrale montre qu'elle est CV ssi $\beta > 1$ ou ($\beta = 1$ et $\alpha < -1$). De plus, si $0 < \beta < 1$ ou ($\beta = 1$ et $\alpha \geqslant -1$) ou ($\beta = 0$ et $\alpha \leqslant 0$), la même étude conclut à sa divergence. Enfin, si $\beta < 0$ ou ($\beta = 0$ et $\alpha > 0$) alors la série est grossièrement DV.

2.2.3 Règles de convergence

Comparaison avec une série géométrique

Proposition 2.2.9 (Règle de d'Alembert) Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n \neq 0$ pour $n >> 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$.

1. si $l < 1$ alors la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente ;
2. si $l > 1$ alors la série $\sum u_n$ est (*grossièrement*) divergente.

Dém.

1. Soit $l < q < 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$: $|u_n| \leqslant q^{n-n_0}|u_{n_0}|$. Par comparaison avec la série à termes positifs $|u_{n_0}|q^{-n_0} \sum q^n$ qui converge, on en déduit que $\sum u_n$ est (absolument) convergente.
2. Soit $1 < q < l$. Pour $n >> 1$, $|u_n| \geqslant q^{n-n_0}|u_{n_0}|$. Donc (u_n) ne tend pas vers 0.

Remarque 2.2.11 Le cas $l = 1$ est dit *douteux*.

Exemple 2.2.9

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. La série de terme général $(\frac{z^n}{n!})$ est (absolument) convergente. En effet, si $z \neq 0$ alors $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|z|}{n+1}$. En fait cette série est *normalement* convergente dans tout disque fermé.
2. Si $u_n = \frac{1}{n}$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \to 1$.
3. Si $u_n = \frac{1}{n^2}$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$.

Soit (u_n) une suite réelle. Si (u_n) est **majorée** (resp. **minorée**) la suite (v_n) définie par $v_n = \sup_{m \geqslant n} u_m$ (resp. $v_n = \inf_{m \geqslant n} u_n$) a un sens et est convergente. On note sa limite $\overline{\lim}\ u_n$ (resp. $\underline{\lim}\ u_n$).

Corollaire 2.2.7 (Règle de d'Alembert améliorée) Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n \neq 0$ pour $n >> 1$.

1. si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant q < 1$ (*i.e.* $\overline{\lim} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$) alors la série $\sum u_n$ est (absolument) convergente ;
2. si $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$ (notamment si $\underline{\lim} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$) alors la série $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.

Proposition 2.2.10 (Règle de Cauchy) Soit $\sum u_n$ une série telle que $\lim \sqrt[n]{|u_n|} = l$.

1. Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ est (absolument) convergente ;
2. si $l > 1$ alors $\sum u_n$ est (grossièrement) divergente.

Dém.

1. Soit $l < q < 1$. Pour $n >> 1$: $|u_n| \leqslant q^n$. D'où la convergence (absolue).
2. Soit $1 < q < l$. Pour $n >> 1$: $|u_n| \geqslant q^n$. D'où la divergence (grossière).

Corollaire 2.2.8 (Règle de Cauchy améliorée) Soit $\sum u_n$ une série.

1. Si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$ alors $\sum u_n$ est (absolument) convergente ;
2. si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$ alors $\sum u_n$ est divergente.

Dém. Notons $v_n = \sup_{m \geqslant n} |u_m|^{\frac{1}{m}}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant v_n$. Comme $\overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim v_n = l < 1$, la série majorante $\sum v_n^n$ est convergente (d'après la règle de Cauchy ordinaire).
2. La suite (u_n) ne converge pas vers 0.

Exemple 2.2.10

1. Soit $\sum u_n$ la série de terme général $u_n = \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{n}\right)^n + \left|\sin \frac{2n\pi}{3}\right|^n$ pour $n \geqslant 1$. Comme $a^n + b^n \leqslant (a+b)^n$ pour $a, b \geqslant 0$, $|u_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{10} + \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}+1}{10} + \frac{1}{n} < \frac{\sqrt{96}}{10}$ pour $n >> 1$. Donc $\overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$. D'où la convergence (absolue) de $\sum u_n$.

2. Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ alors $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1.$
3. Si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ alors $\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1.$

Remarque 2.2.12 (Comparaison des règles de d'Alembert et Cauchy) Soit $\sum u_n$ une série telle que $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$. Alors $\lim \sqrt[n]{|u_n|} = l$.
Distinguons 2 cas. Pour tout $0 < \epsilon << 1$:

1. $l > 0$: il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$n \geqslant n_0 \Rightarrow (l-\epsilon)^{n-n_0}|u_{n_0}| < |u_n| < (l+\epsilon)^{n-n_0}|u_{n_0}|.$$
Donc
$$n \geqslant n_0 \Rightarrow (l-\epsilon)\left(\frac{|u_{n_0}|}{(l-\epsilon)^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}} < |u_n|^{\frac{1}{n}} < (l+\epsilon)\left(\frac{|u_{n_0}|}{(l+\epsilon)^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}}.$$
2. $l = 0$: $0 \leqslant |u_n|^{\frac{1}{n}} < \epsilon \left(\dfrac{|u_{n_0}|}{\epsilon^{n_0}}\right)^{\frac{1}{n}}$ et $\lim \sqrt[n]{|u_n|} = 0$.

D'où $\lim \sqrt[n]{|u_n|} = l$.

Comparaison avec les séries de Riemann

Proposition 2.2.11 Soient $\sum u_n$ une série à termes positifs et $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$.

1. Si $l \in \mathbb{R}_+^*$ alors
$$\sum u_n \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1.$$
2. Si $l = 0$ et $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $l > 0$ (éventuellement $+\infty$) et $\alpha \leqslant 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Dém.

1. Si $n >> 1$ alors $\dfrac{l}{2n^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3l}{2n^\alpha}$. Ainsi $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature.
2. Si $n >> 1$ alors $u_n \leqslant \dfrac{1}{2n^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$, la série $\dfrac{1}{2}\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ qui domine $\sum u_n$, converge.
3. Si $n >> 1$ alors $u_n \geqslant \dfrac{\min(1, \frac{l}{2})}{n^\alpha}$, dont la série diverge.

Exemple 2.2.11

1. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On considère la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n^\beta}$ (qui est à termes positifs pour $n >> 1$, ssi $\beta \geqslant 0$). Posons, $\alpha = \beta + 1$. Alors $v_n = n^\alpha u_n = n^\beta \sin\dfrac{1}{n^\beta}$.
   (a) Si $\beta > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. Ainsi, $\sum u_n$ converge.
   (b) Si $\beta = 0$ alors la série diverge.
   (c) Si $\beta < 0$ alors (la série n'est plus à termes positifs et) c'est plus compliqué... (si $\beta = -1$ la série est semi-convergente)

2. Soient $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ pour $n > 1$. On peut remarquer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que les règles de d'Alembert ou de Cauchy ne permettent pas de conclure. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $n^\alpha u_n = e^{\ln n(\alpha - \ln(\ln n))}$. Ansi, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim n^\alpha u_n = 0$. D'où la convergence de la série $\sum u_n$.

Proposition 2.2.12 (Règle de Duhamel) Soient $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs pour $n >> 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

1. Si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge.

Dém.

1. Soit $1 < \beta < \alpha$. Alors, $1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n}) \leqslant 1 - \frac{\beta}{n} + o(\frac{1}{n})$. De sorte que, pour $n >> 1$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \frac{\frac{1}{(n+1)^\beta}}{\frac{1}{n^\beta}}.$$

   On conclut que $\sum u_n$ converge.
2. Soit $\alpha < \beta < 1$. On a ici, pour $n >> 1$:

$$\frac{\frac{1}{(n+1)^\beta}}{\frac{1}{n^\beta}} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

   On conclut que $\sum u_n$ diverge.

Remarque 2.2.13

1. Cette règle lève certains cas douteux du critère de d'Alembert.
2. Si $\alpha < 0$ alors $\sum u_n$ est bien sûr divergente.

Exemple 2.2.12 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!}.$$

Remarquons que u_n est de signe constant pour $n >> 1$ (suite *presque nulle* ssi $a \in \mathbb{Z}_-^*$). Soit $a \notin \mathbb{Z}_-^*$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(a+n+1)}{n+1}$. Dés lors, $u_n \to 1$ quand $n \to +\infty$. Plus précisément :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1+\frac{a+1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = (1+\frac{a+1}{n})(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})) \\ &= 1 - \frac{-a}{n} + o(\frac{1}{n}).\end{aligned}$$

On conclut que $\sum u_n$ converge ssi $a \leqslant -1$.

2.2.4 Sommation par tranches (ou paquets)

Partition donnée par une application strictement croissante

Soient $\sum u_n$ une série et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante telle que $\varphi(0) = 0$; ainsi, $\mathbb{N} = \sqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec $A_n = \{\varphi(n), \dots, \varphi(n+1)-1\}$. On note $v_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$ et $s'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Proposition 2.2.13

$$\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow \sum v_n \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} s'_n = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Dém. Comme $s'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\varphi(n+1)-1} u_k$, la suite (s'_n) est extraite de (s_n) par $\varphi(\cdot + 1) - 1$. Par hypothèse, (s_n) converge vers S donc (s'_n) converge aussi vers S.

Remarque 2.2.14 La réciproque est fausse. En effet, si $u_n = (-1)^n$ et $\varphi(n) = 2n$ alors $v_n = 0$ pour tout n. Mais $u_n \not\to 0$.

Proposition 2.2.14 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs à partir d'un certain rang. On a :

$$\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s'_n.$$

Dém. On peut supposer $u_n \geqslant 0$ pour tout n. Comme φ est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $s_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{\varphi(n+1)-1} u_k = s'_n$. Par hypothèse, (s'_n) est convergente, donc (s_n) est croissante et majorée d'où $S \leqslant S'$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N} : s'_n \leqslant s_{\varphi(n+1)} \leqslant S$. Finalement $S = S'$.

Proposition 2.2.15 Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et si $n \mapsto \varphi(n+1) - \varphi(n)$ est majoré alors

$$\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} s'_n.$$

Dém. Soit $\epsilon > 0$. Comme (s'_n) est convergente vers S', il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant N' \Rightarrow |s'_n - S'| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Notons $L = \max_{m\in\mathbb{N}} \varphi(m+1) - \varphi(m)$. Comme (u_n) tend vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n| < \frac{\epsilon}{2L}.$$

Posons $N = \max(\varphi(N'), n_0 + L - 1)$. Soit $n \geqslant N$. Il existe un unique $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(m) \leqslant n < \varphi(m+1)$. Remarquons que $\varphi(m+1) > \varphi(N') \Rightarrow m \geqslant N'$ d'une part. Et d'autre part, $\varphi(m) \geqslant n_0$. Dés lors :

$$\begin{aligned}
|s_n - S'| &\leqslant |s_n - s'_m| + |s'_m - S'| < |\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{m} v_k| + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leqslant |\sum_{k=n+1}^{\varphi(m+1)-1} u_k| + \frac{\epsilon}{2} \leqslant \sum_{k=\varphi(m)}^{\varphi(m+1)-1} |u_k| + \frac{\epsilon}{2} \leqslant L\frac{\epsilon}{2L} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Exemple 2.2.13 Soit la série $\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Posons $\varphi(n) = 2n$. Le terme général de cette série tend vers 0 et $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n+1) - \varphi(n) = 2$. Notons $u_0 = 0$ et $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n > 0$. Alors $v_0 = 1$ et pour $n > 0$: $v_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{2n(2n+1)}$. Il s'ensuit que $\sum v_n$ est convergente, donc $\sum u_n$ converge vers la même somme que celle de $\sum v_n$.

Commutativité des séries absolument convergentes

Soit $\varphi \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$, une permutation de $\mathbb{N}$. Si $\sum u_n$ est une série, notons $\sum v_n$ la série « déduite par φ » de terme général $v_n = u_{\varphi(n)}$. On note (s'_n) la suite des sommes partielles de (v_n) *i.e.* $s'_n = \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)}$.

Proposition 2.2.16 Soient $\sum u_n$ une série absolument convergente et $\varphi \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$. Alors

$$\sum v_n \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} s'_n = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Dém. Soit $\epsilon > 0$. Comme $(\sum_{k=0}^{n} |u_k|)_n$ est de Cauchy, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant m \geqslant N' \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |u_k| < \epsilon.$$

Posons $N = \max_{0\leqslant i\leqslant N'}(N', \varphi^{-1}(i))$. Soit $n \geqslant N$. Si $p = \max_{0\leqslant i\leqslant n}(n, \varphi(i))$ alors

$$s_n - s'_n = \sum_{k=0}^{p} \epsilon_k u_k$$

avec $\epsilon_k = 0$, 1 ou -1.
Soit $k \in \{0, \ldots, N'\}$ *i.e.* $j = \varphi^{-1}(k) \in \{\varphi^{-1}(0), \varphi^{-1}(1), \ldots, \varphi^{-1}(N')\}$; en particulier $j \leqslant n$. Donc $\forall k \in \{0, \ldots, N'\} : \epsilon_k = 0$. Il s'ensuit que :

$$|s_n - s'_n| \leqslant \sum_{k=N'+1}^{p} |u_k| < \epsilon$$

Autrement dit, $(s_n - s'_n)_n$ tend vers 0. Enfin, comme $s_n = s'_n + (s_n - s'_n)$ et que (s_n) est convergente vers S, on déduit que (s'_n) converge aussi vers S. En outre, le résultat reste inchangé en raisonnant sur les séries $\sum |u_n|$ et (donc) $\sum |v_n|$. On conclut que $\sum v_n$ converge absolument.

Définition 2.2.5 La série $\sum u_n$ est *commutativement convergente* si

$$\forall \varphi \in \mathfrak{S}(\mathbb{N}) : \sum u_{\varphi(n)} \text{ est convergente.}$$

Remarque 2.2.15 Si $\sum u_n$ est semi-convergente (*i.e.* $N_+ = \{n \in \mathbb{N} : u_n > 0\}$ et $N_- = \{n \in \mathbb{N} : u_n < 0\}$ sont infinis) alors la série n'est pas commutativement convergente. Considérons par exemple la série semi-convergente $\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (convergeant vers $\ln 2$). La série

$$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12})+\cdots+(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)}-\frac{1}{2(2n+2)})+\cdots$$

est convergente donc de même somme que :

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})+\cdots+(\frac{1}{2(2n+1)}-\frac{1}{2(2n+2)})+\cdots=\frac{1}{2}\sum_{n>0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Plus généralement : $(\forall S \in \overline{\mathbb{R}})(\exists \varphi \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})) : S = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)}$.

Théorème 2.2.2

$$\sum u_n \text{ commutativement convergente } \Leftrightarrow \sum u_n \text{ absolument convergente.}$$

2.2.5 Séries alternées

Définition 2.2.6 Une série réelle $\sum u_n$ est *alternée* si $\forall n \in \mathbb{N} : u_n u_{n+1} \leqslant 0$. Autrement dit, il existe une suite positive (a_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n a_n$ ou bien $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^{n+1} a_n$.

Exemple 2.2.14 La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est alternée.

On traitera uniquement le cas $u_n = (-1)^n a_n$.

Théorème 2.2.3 Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée. Si (a_n) est décroissante à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ alors $\sum(-1)^n a_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N} : |r_n| \leqslant a_{n+1}$.

Dém. Soit $p >> 1$. On a $s_{2p+2} = s_{2p} - a_{2p+1} + a_{2p+2} \leqslant s_{2p}$. De même, $s_{2p+3} = s_{2p+1} + a_{2p+2} - a_{2p+3} \geqslant s_{2p+1}$. De plus, $s_{2p+1} - s_{2p} = -a_{2p+1}$. Posons $V_p = s_{2p}$ et $W_p = s_{2p+1}$. Alors $(V_p) \searrow$, $(W_p) \nearrow$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} V_p - W_p = 0$. Ainsi, (V_p) et (W_p) sont adjacentes et convergent vers la même limite. D'après un résultat classique, (s_n) converge vers $\lim\limits_{p\to+\infty} s_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} s_{2p+1} = S$. Enfin, $(s_{2p}) \searrow S$ (resp. $(s_{2p+1}) \nearrow S$) donc $\forall p >> 1 : s_{2p+1} \leqslant S \leqslant s_{2p+2} \leqslant s_{2p}$. D'où :

$$|r_n| = |S - s_n| \leqslant \begin{cases} s_{2p} - s_{2p+1} = a_{2p+1} & \text{si } n = 2p \\ s_{2p+2} - s_{2p+1} = a_{2p+2} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}.$$

Exemple 2.2.15 Nouvelle preuve de la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

2.2.6 Produit de séries

Définition 2.2.7 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. Le *produit de Cauchy* $\sum u_n * \sum v_n$ est la série $\sum w_n$ de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.

Remarque 2.2.16 On a immédiatement $\sum u_n * \sum v_n = \sum v_n * \sum u_n$.

Proposition 2.2.17 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs de somme U et V respectivement. Alors

$$\sum u_n * \sum v_n \text{ est convergente de somme } U.V.$$

Dém. Notons U_n, V_n et W_n les sommes partielles de rang n. On a :

$$W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}.$$

La série $\sum u_n * \sum v_n$ est donc convergente. De plus $W \leqslant U.V \leqslant W$. D'où l'égalité.

Théorème 2.2.4 (de Mertens) Soient $\sum u_n$ une série absolument convergente et $\sum v_n$ une série convergente. Alors $\sum u_n * \sum v_n$ est convergente et converge vers le produit des sommes.

2.2.7 Transformation d'Abel

Définition 2.2.8 Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \alpha_n a_n$ où (α_n) est une suite scalaire. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Alors, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$:

$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}) A_{n+k} - \alpha_{n+1} A_n + \alpha_{n+p+1} A_{n+p}.$$

Cette égalité est la *transformation d'Abel*.
On a aussi :

$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k} A_{n+k} - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_{n+k+1} A_{n+k}.$$

Théorème 2.2.5 Soit $\sum u_n$ une série telle que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \alpha_n a_n$ et

1. la suite (A_n) est bornée ;
2. la suite (α_n) converge vers 0 ;
3. la série $\sum |\alpha_n - \alpha_{n+1}|$ est convergente.

Alors

$$\sum u_n \text{ converge.}$$

Dém. Soit $\epsilon > 0$. Notons $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |A_n| + 1$. Comme $\lim \alpha_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geqslant n_0 \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\epsilon}{3M}.$$

Comme $\sum |\alpha_n - \alpha_{n+1}|$ est de Cauchy, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$m' \geqslant n' \geqslant N' \Rightarrow \sum_{l=n'+1}^{m'} |\alpha_l - \alpha_{l+1}| < \frac{\epsilon}{3M}.$$

Soient $n \geqslant N = \max(n_0, N')$ et $p \geqslant 0$. En appliquant la transformation d'Abel, il vient :

$$|s_{n+p} - s_n| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k| = |\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}| \leqslant M \sum_{k=1}^{p} |\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1}| + M(|\alpha_{n+1}| + |\alpha_{n+p+1}|) < \epsilon.$$

On en déduit que la suite (s_n) est de Cauchy, donc converge.

Exemple 2.2.16 On considère la *suite de Syracuse* :

$$\begin{cases} a'_0 = 15 \\ a'_{n+1} = \begin{cases} \frac{a'_n}{2} & \text{si } a'_n \text{ est pair} \\ 3a'_n + 1 & \text{si } a'_n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

et la suite réelle (α_n) définie par $\alpha_n = \frac{1}{n+(-1)^{n+1}}$. Si $a_n = (-1)^n a'_n$ alors la suite $u_n = \alpha_n a_n$ vérifie les hypothèses du théorème d'Abel car (a'_n) est *essentiellement* $3-$périodique et $|\alpha_{n+1} - \alpha_n| \leqslant \frac{3}{(n-1)^2}$ pour $n > 1$.

Corollaire 2.2.9 Le résultat précédent subsiste si l'on remplace la condition 3. par :

la suite (α_n) est réelle et décroissante.

Exemple 2.2.17

1. Encore une preuve de la convergence de $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
2. Plus généralement, soit (α_n) une suite réelle décroissante convergeant vers 0. Alors la série $\sum \alpha_n e^{int}$ converge pour $t \not\equiv 0[2\pi]$. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}| = \left|\frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - e^{it}|}.$$

   En particulier, pour tout $\alpha > 0$, les séries $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum \frac{\cos n}{n^\alpha}$ sont convergentes.

Remarque 2.2.17 Ces résultats sont en général d'un usage délicat et doivent être invoqués uniquement si les règles usuelles ont échoué.

2.2.8 Calcul approché

Le calcul approché de la somme s d'une série convergente $\sum u_n$ est empreint d'une erreur ϵ qui se décompose en une *erreur systématique* $\epsilon_1 := |s_n - s|$ et une erreur de calcul numérique due à l'approximation de $(u_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$, $\epsilon_2 := (n+1)\theta$, si l'erreur d'approximation sur u_k est inférieure à θ (donnée par le fabriquant du calculateur) *i.e.*

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

On cherchera à rendre ϵ plus petit qu'une précision fixée.

Série à termes positifs comparable à une série géométrique

1. On suppose $(\exists r \in]0,1[)(\forall n \in \mathbb{N}) : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r$. Alors

$$s - s_n \leqslant u_{n+1}\frac{1}{1-r} \leqslant u_0\frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

2. On suppose $(\exists r \in]0,1[)(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n^{\frac{1}{n}} \leqslant r$. Alors

$$s - s_n \leqslant u_{n+1}\frac{1}{1-r} \leqslant \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

3. On suppose que $u_n = f(n)$ avec f positive et décroissante d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$. Alors

$$s - s_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Série alternée

On suppose $u_n = (-1)^n a_n$ où a_n est un suite positive décroissante de limite 0. On a déjà démontré que

$$|s - s_n| \leqslant a_{n+1}.$$

Plus précisément, $s - s_n$ est du signe de u_{n+1} *i.e.* s_n est une valeur par *défaut* (resp. *excès*) de s si n est impair (resp. pair).

Chapitre 3

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}-$ev de dimension n ; la base canonique est $(e_1, \ldots, e_n)$ avec pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$; si $x \in \mathbb{R}^n$ alors $x = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

3.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 Une *norme* sur $\mathbb{R}^n$ est une application $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telle que

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n : N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (*séparation*)
2. $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(\forall \lambda \in \mathbb{R}) : N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (*positive homogénéité*)
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (*1ère inégalité triangulaire*)

Exemple 3.1.1

1. $N(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$ (*valeur absolue*)
2. $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (*norme euclidienne*)
3. $||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (*norme* 1)
4. $||x||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ (*norme infinie*)
5. Soit $p \geqslant 1$; $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ($p-$*norme*).

Proposition 3.1.1 Soient N_1 et N_2 des normes sur $\mathbb{R}^n$. Les applications $N = N_1 + N_2$ et $N' = \max(N_1, N_2)$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.1.2 (2nde inégalité triangulaire) Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y).$$

Dém. On a $N(x) \leqslant N(x - y) + N(y)$. En inversant le rôle de x et y et en remarquant que $N(x - y) = N(y - x)$, on obtient $N(y) \leqslant N(x - y) + N(x)$.

Définition 3.1.2 Une *distance* sur $\mathbb{R}^n$ est une applicaton $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telle que

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*séparation*)
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = d(y, x)$ (*symétrie*)
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n : d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (*1ère inégalité triangulaire*)

Remarque 3.1.1 On a $d(x, x) = 0 \leqslant d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$. Donc $d \geqslant 0$ est (en fait) conséquence des conditions 1.-3.

Proposition 3.1.3 (2nde inégalité triangulaire) Soit d une distance sur $\mathbb{R}^n$.

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n : |d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y).$$

Définition 3.1.3 La *distance associée à* (ou *induite par*) la norme N est l'application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x, y) = N(x - y)$.

Exemple 3.1.2 Sur $\mathbb{R}$, l'application définie par $d(x, y) = |x - y|$ est la distance associée à la norme $|\cdot|$.

Remarque 3.1.2 Si d est la distance associée à une norme N alors on a bien sûr $N \geqslant 0$ (car $N(x) = d(0, x)$).

Définition 3.1.4 Deux normes N_1 et N_2 sur $\mathbb{R}^n$ sont *équivalentes* si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

Remarque 3.1.3 C'est une relation d'équivalence sur la collection des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.1.3

1. $||\cdot||_\infty \leqslant ||\cdot||_1 \leqslant n||\cdot||_\infty$ (*optimal*)
2. $||\cdot||_\infty \leqslant ||\cdot||_2 \leqslant \sqrt{n}||\cdot||_\infty$ (*optimal*)
3. On déduit de 1. et 2. que $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes. Plus précisément, $||\cdot||_2 \leqslant ||\cdot||_1 \leqslant \sqrt{n}||\cdot||_2$ (*optimal*).

Théorème 3.1.1 Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Définition 3.1.5 Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. La *boule ouverte* (resp. *boule fermée*, resp. *sphère*) de *centre* $a \in \mathbb{R}^n$ et de *rayon* $r \in \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - a) < r\}$$

(resp.

$$B'(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - a) \leqslant r\},$$

resp.

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x - a) = r\}).$$

Remarque 3.1.4

1. Si $r > 0$ alors $a \in B(a,r) \subseteq B'(a,r)$.
2. Si $r < 0$ alors ces 3 sous-ensembles sont vides ; $B(a,0) = \varnothing$ et $B'(a,0) = S(a,0) = \{a\}$.
3. $S(a,r) = B'(a,r) \setminus B(a,r) = B'(a,r) \cap B(a,r)^c$.
4. Si d est la distance induite par la norme N alors $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(a,x) < r\}$.
5. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ *normé* et $r \geqslant 0$. Alors $B(a,r)$ (resp. $B'(a,r)$, resp. $S(a,r)$) est égale à $t_a \circ h_r(B(0,1))$ (resp. $t_a \circ h_r(B'(0,1))$, resp. $t_a \circ h_r(S(0,1))$).

Exemple 3.1.4 Dessin

3.1.2 Notion de topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.1.6 Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Un *voisinage* V de a est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui contient une boule ouverte (non vide !) centrée en a ; l'ensemble des voisinages de a est $\mathcal{V}(a)$.

Exemple 3.1.5 Une boule ouverte (ou fermée) de rayon > 0 centrée en a est un voisinage de a.

Remarque 3.1.5 Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, l'ensemble des voisinages pour la norme euclidienne coïncide avec celui pour une norme quelconque. En effet, soient N une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$. Il suffit de montrer une (séquence d')inclusion(s) de boules ouvertes. Notons $\alpha N \leqslant || \cdot ||_2 \leqslant \beta N$. Soit $r > 0$, il vient :

$$B_2(a, \alpha r) \subseteq B_N(a,r) \subseteq B_2(a, \beta r).$$

Proposition 3.1.4 Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $V \in \mathcal{V}(a)$.

1. Si $V \subseteq A$ alors $A \in \mathcal{V}(a)$.
2. Si $W \in \mathcal{V}(a)$ alors $V \cap W \in \mathcal{V}(a)$.

Définition 3.1.7 Un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^n$ est *ouvert* si pour tout $a \in \Omega$, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ contenu dans Ω.

Proposition 3.1.5 Une partie Ω est ouverte ssi $(\forall a \in \Omega)(\exists r > 0) : B(a,r) \subseteq \Omega$.

Exemple 3.1.6

1. Une boule ouverte est un ouvert ; soit $x \in B(a,r)$. Posons $\rho = r - d(a,x) > 0$. Si $d(x,y) < \rho$ alors $d(a,y) \leqslant d(a,x) + d(x,y) < r$. Donc $B(x,\rho) \subseteq B(a,r)$.
2. $\mathbb{R}^n$ est ouvert ; $\varnothing$ est ouvert.

Proposition 3.1.6 Une partie Ω est ouverte ssi Ω est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 3.1.7

1. Une intersection finie d'ouverts est ouverte.

2. Une réunion d'ouverts est ouverte.

Définition 3.1.8 Un sous-ensemble F est *fermé* si $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ouvert.

Exemple 3.1.7

1. Une boule fermée est un fermé. Soit $x \notin B'(a,r)$. Posons $\rho = d(a,x) - r > 0$. Si $d(x,y) < \rho$ alors $d(a,y) \geqslant d(a,x) - d(x,y) > d(a,x) - \rho = r$. De sorte que $\mathbb{R}^n \setminus B'(a,r)$ est ouvert.
2. Une partie finie de $\mathbb{R}^n$ est fermée ; les sous-ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés dans $\mathbb{R}$. Une sphère est fermée.
3. $\mathbb{R}^n$ et $\varnothing$ sont fermés.
4. $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3.1.1 Énoncer la proposition analogue à la précédente pour les fermés.

Définition 3.1.9 Une partie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est *bornée* si il existe $R \geqslant 0$ tel que $\forall a \in A$: $N(a) \leqslant R$. Autrement dit, $A \subseteq B'(0,R)$.

Remarque 3.1.6 Cette définition est (en fait) indépendante de la norme (dans $\mathbb{R}^n$!).

Exemple 3.1.8 Un sous-ensemble fini, une boule, une sphère, un pavé (*i.e.* produit d'intervalles bornés), l'ensemble des termes d'une suite de Cauchy ou une union finie de bornés sont des parties bornées de $\mathbb{R}^n$. Un sev non réduit à 0 d'un $\mathbb{R}-$ev normé est non borné.

Définition 3.1.10 Une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ est *compacte*.

Exemple 3.1.9

1. Une boule fermée est une partie compacte
2. Une partie finie est compacte.

Proposition 3.1.8 L'intersection d'un fermé et d'un compact est compacte.

Exemple 3.1.10 Une sphère est compacte.

Définition 3.1.11 La suite (u_p) de $\mathbb{R}^n$ *converge* vers $l \in \mathbb{R}^n$ si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathbb{N})(\forall p \geqslant P) : N(u_p - l) < \epsilon.$$

On note $l = \lim\limits_{p \to +\infty} u_p$ la *limite* de (u_p).

Remarque 3.1.7 La convergence et la valeur de la limite ne dépendent pas de la norme choisie (dans $\mathbb{R}^n$).

Proposition 3.1.9 Soient (u_p) une suite de $\mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}^n$. C.S.S.E.

1. $\lim\limits_{p \to +\infty} u_p = l$
2. $\lim\limits_{p \to +\infty} N(u_p - l) = 0$
3. $(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathbb{N})(\forall p \geqslant P) : u_p \in B(l, \epsilon)$
4. $(\forall V \in \mathcal{V}(l))(\exists P \in \mathbb{N})(\forall p \geqslant P) : u_p \in V$.

Dém.
1. $\Rightarrow$ 2. Par définition.
2. $\Rightarrow$ 3. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant P \Rightarrow N(u_p - l) < \epsilon$. Autrement dit, $p \geqslant P \Rightarrow u_p \in B(l, \epsilon)$.
3. $\Rightarrow$ 4. Soit $V \in \mathcal{V}(l)$. Il existe $r > 0$ tel que $B(l, r) \subseteq V$. Soit $P \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant P \Rightarrow u_p \in B(l, r)$. Il s'ensuit : $p \geqslant P \Rightarrow u_p \in V$.
4. $\Rightarrow$ 1. Soit $\epsilon > 0$. Posons $V = B(l, \epsilon) \in \mathcal{V}(l)$. On a : $u_p \in B(l, \epsilon) \Leftrightarrow N(l - u_p) < \epsilon$. D'où le résultat.

Proposition 3.1.10 Soient (u_p) une suite de $\mathbb{R}^n$ et $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$. Notons $(u_p^i)^{1 \leqslant i \leqslant n}$ les n suites coordonnées.

$$\lim_{p \to +\infty} u_p = l \Leftrightarrow \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ la suite } (u_p^i) \text{ converge vers } l_i.$$

Dém. Comme la convergence et la limite ne dépendent pas de la norme choisie, on a :

$$\lim_{p \to +\infty} u_p = l \Leftrightarrow \lim_{p \to +\infty} ||l - u_p||_\infty = 0.$$

Or, $\lim_{p \to +\infty} ||l - u_p||_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \lim_{p \to +\infty} |l_i - u_p^i| = 0$.

Proposition 3.1.11 (Caractérisation séquentielle des fermés) Soit $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$F \text{ est fermé} \Leftrightarrow \text{pour toute suite } (u_p) \text{ de } F \text{ convergente vers } l \in \mathbb{R}^n : l \in F.$$

Dém.
($\Rightarrow$) On va démontrer :
Soit (u_p) une suite de $\mathbb{R}^n$ convergente vers $l \in \mathbb{R}^n$;

$$l \in F^c \Rightarrow u_p \in F^c \text{ pour certains } p \in \mathbb{N}.$$

Supposons donc $l \in \mathbb{R}^n \setminus F$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(l, r) \cap F = \varnothing$. Donc $u_p \notin F$ pour $p >> 1$.
($\Leftarrow$) Soit $a \notin F$. Alors il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \cap F = \varnothing$. Sinon, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $B(a, \frac{1}{p}) \cap F \neq \varnothing$. En choisissant un élément de $B(a, \frac{1}{p}) \cap F$ pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, on définit une suite $(u_p)_{p \geqslant 1}$ à valeurs F. Comme $\lim_{p \to +\infty} u_p = a$ par construction, l'hypothèse entraîne $a \in F \to\leftarrow$. Ainsi, pour r suffisamment petit, $B(a, r) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus F$.

Exemple 3.1.11 Si (u_n) converge vers l alors $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est compact.

Théorème 3.1.2 (de Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente.
Dém. La preuve a déjà été faite dans $\mathbb{R}$. Pour $n \geqslant 2$, on procède par récurrence sur n en remarquant qu'une suite extraite d'une suite convergente est encore convergente.

Définition 3.1.12 Une suite (u_p) de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathbb{N})(\forall q \geqslant p \geqslant P) : N(u_p - u_q) < \epsilon.$$

Théorème 3.1.3 Une suite de $\mathbb{R}^n$ est convergente ssi c'est une suite de Cauchy.

Dém.
($\Rightarrow$) La preuve du cas en une variable s'applique en substituant N à $|\cdot|$.
($\Leftarrow$) Soit (u_p) une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$. En considérant $||\cdot||_\infty$, on constate que $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$: (u_p^i) est une suite de Cauchy réelle. Comme $\mathbb{R}$ est *complet*, ces n suites convergent dans $\mathbb{R}$ vers l_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, respectivement. Autrement dit, (u_p) converge vers $l = (l_1,\ldots,l_n)$.

Théorème 3.1.4 (Critère séquentiel de compacité – Propriété de Bolzano-Weierstrass) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$. Pour que K soit compact il faut et il suffit que de toute suite (u_p) de K on puisse extraire une sous-suite convergeant dans K.
Dém.
($\Rightarrow$) Comme (u_p) est bornée, elle admet une suite extraite convergente dans $\mathbb{R}^n$. Comme K est fermé, sa limite appartient à K.
($\Leftarrow$) La partie K est bornée sinon on pourrait construire une suite non bornée qui n'admet aucune sous-suite de Cauchy. De plus, la conditon séquentielle entraîne le critère séquentiel de fermeture. Donc K est fermé.

3.2 Application continue

3.2.1 Définition et résultats structurels

Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, N_1 (resp. N_2) une norme sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$) et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

Définition 3.2.1 La fonction f est *continue en* $a \in \Omega$ si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in \Omega, N_1(x-a) < \eta) : N_2(f(x) - f(a)) < \epsilon.$$

L'application f est *continue sur* Ω si f est continue en tout point de Ω.

Remarque 3.2.1

1. La définition est en fait, indépendante du choix des normes.
2. Le type des inégalités n'influe pas sur la définition.

Exemple 3.2.1

1. L'application $id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est continue.
2. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est continue et $\Omega' \subseteq \Omega$ alors $f_{|\Omega'}$ est continue.
3. La fonction $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$ est continue car si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors $|x+y-(a+b)| \leqslant ||(x,y)-(a,b)||_1$. Plus généralement, une application linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est continue.
4. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$ est continue car si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors $xy - ab = (x-a)y + a(y-b)$. D'où $|xy-ab| \leqslant \max(|a|,|y|)||(x,y)-(a,b)||_1$. Ainsi, dés que y est borné, $xy-ab$ est contrôlé par $||(x,y)-(a,b)||_1$. Plus généralement, une application multilinéaire sur $\displaystyle\prod_{i=1}^{N} \mathbb{R}^{n_i}$ est continue.

Proposition 3.2.1 Soient $a \in \Omega$, $\Omega' \subseteq \mathbb{R}^m$ tel que $f(\Omega) \subseteq \Omega'$ et $g : \Omega' \to \mathbb{R}^p$. Si f (resp. g) est continue en a (resp. $b := f(a)$) alors $g \circ f$ est continue en a.

Dém. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta' > 0$ tel que $y \in \Omega'$ et $N_2(y-b) < \eta'$ entraîne $N_3(g(y)-g(b)) < \epsilon$. Il existe aussi $\eta > 0$ tel que $x \in \Omega, N_1(x-a) < \eta$ implique $N_2(f(x)-f(a)) < \eta'$. Récapitulons :

$$x \in \Omega, N_1(x-a) < \eta \Rightarrow N_3(g(f(x)) - g(f(a))) < \epsilon.$$

Remarque 3.2.2 Si Ω' est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(b,\epsilon) \subseteq \Omega'$. Si f est continue en a alors il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(a,\eta) \cap \Omega) \subseteq B(b,\epsilon) \subseteq \Omega'$. Ainsi $g \circ f$ est définie sur (le voisinage de a) $B(a,\eta) \cap \Omega$.

Proposition 3.2.2 L'application f est continue en a ssi $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$: f_i est continue en a.

Dém.
($\Rightarrow$) $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$: $f_i = \pi_i \circ f$; comme π_i est une forme linéaire, f_i est continue.
($\Leftarrow$) C'est immédiat en considérant $||\cdot||_\infty$ sur $\mathbb{R}^m$.

Proposition 3.2.3 Soient $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ et $a \in \Omega$.

1. Si f et g sont continues en a alors $f+g$ est continue en a.
2. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f est continue en a alors λf est continue en a.
3. Si f et g sont continues en a alors $f.g := (f_1 g_1, \ldots, f_m g_m)$ est continue en a.

Dém. En appliquant la proposition précédente, il suffit de montrer le cas $m = 1$. La preuve est alors conséquence des faits de l'exemple précédent et du théorème de composition.

Remarque 3.2.3

1. En particulier, $C(\Omega, \mathbb{R}^m)$ est une $\mathbb{R}-$algèbre (de dimension infinie).
2. Les applications polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.2.4 Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$. Si $f(a) \neq 0$ et f est continue en a alors $\dfrac{1}{f}$ est (définie sur un voisinage de a) continue en a.

Dém. Comme f est continue en a, pour x suffisamment voisin de a, $|f(x)| > \dfrac{|f(a)|}{2} > 0$. On a $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(a)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{f(x)f(a)}$. D'où $\left|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{f(a)}\right| \leqslant \dfrac{2}{|f(a)|^2}|f(x)-f(a)|$. Il s'ensuit que $\dfrac{1}{f}$ est continue en a.

Exemple 3.2.2 Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

3.2.2 Quelques critères de continuité

Proposition 3.2.5 (Critère séquentiel de continuité) Soit $a \in \Omega$. Pour que f soit continue en a il faut et il suffit que pour toute suite (u_p) de Ω convergeant vers a on ait $\lim_{p\to+\infty} f(u_p) = f(a)$.

Dém.
($\Rightarrow$) Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $x \in \Omega, N_1(x-a) < \eta$ entraîne $N_2(f(x)-f(a)) < \epsilon$. Comme $(u_p) \subseteq \Omega$ converge vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N \Rightarrow N_1(u_p - a) < \eta$. Donc $(f(u_p))$ converge vers $f(a)$.
($\Leftarrow$) Démontrons la contraposée. Supposons f discontinue en a. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $u_p \in \Omega \cap B_{N_1}(a, \frac{1}{p+1})$ et $f(u_p) \notin B_{N_2}(f(a), \epsilon_0)$. En particulier, $(f(u_p))$ ne converge pas vers $f(a)$.

Exemple 3.2.3 Considérons $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Soit la suite $u_p = (\frac{1}{p}, \frac{1}{p})_{p \geqslant 1}$. Alors $f(u_p) = \frac{1}{2}$. Donc f n'est pas continue en 0.

Remarque 3.2.4 On a $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = \lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$. En particulier, f ne se prolonge pas par continuité en 0.

Remarque 3.2.5 Le critère séquentiel de continuité offre une nouvelle preuve de la continuité de $+$ et $\times$; en effet, si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles convergentes alors (u_n+v_n) et $(u_n v_n)$ convergent respectivement vers la somme et le produit des limites.

Définition 3.2.2 L'application f *admet* $l \in \mathbb{R}^m$ *pour limite en* a (ou *lorsque* x *tend vers* a), notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, si

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall x \in \Omega, N_1(x-a) < \eta) : N_2(f(x)-l) < \epsilon.$$

Proposition 3.2.6 L'application f est continue en a ssi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Dém. C'est la définition de la continuité de f en a.

Exemple 3.2.4 Considérons $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ en tant que fonction rationnelle. En outre : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x,y)| \leqslant |y|$. Par suite, $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$. On conclut à la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.2.7 Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall V \in \mathcal{V}(a) : V \cap \Omega \neq \varnothing$ (*i.e.* a est un point *adhérent* à Ω). On a :
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = l$ ssi la fonction $\hat{f} : \Omega \cup \{a\} \to \mathbb{R}^m$ définie par

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega - \{a\} \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en a.
Dém. C'est une réécriture de la caractérisation de la continuité en termes de limite.

Remarque 3.2.6 L'hypothèse sur a assure que la limite «$\lim_{x \to a}$» a un «contenu».

Définition 3.2.3 La fonction $\hat{f}$ est le *prolongement par continuité* de f en a.

3.2.3 Un (petit) résultat d'optimisation

Théorème 3.2.1 (de Weierstrass) Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue sur le compact K. Alors f est bornée et atteint ses bornes.
Dém. On va le démontrer pour la borne supérieure. Soit $M = \sup_K f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Il existe une suite (t_p) de $f(K)$ telle que $\lim\limits_{p \to +\infty} t_p = M$ (éventuellement $+\infty$). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, soit $u_p \in K$ tel que $t_p = f(u_p)$. La suite (u_p) à valeurs K admet une suite extraite convergente dans K, $(u_{\varphi(p)})$; notons a sa limite. Alors (t_p) converge vers $\lim\limits_{p \to +\infty} f(u_{\varphi(p)}) = f(a)$. Il en résulte que $M = f(a)$ *i.e* $M \in \mathbb{R}$ est réalisé.

Remarque 3.2.7 Cela signifie qu'il existe x_m et x_M dans K tels que

$$\forall x \in K : f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M).$$

3.3 Application différentiable

Sauf mention expresse du contraire, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

3.3.1 Dérivabilité d'une fonction numérique d'une variable réelle

Soient $a \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ est } \textit{dérivable en } a \text{ si } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Cette limite $f'(a)$ est le *nombre dérivé* (ou la *dérivée*) *de* f *en* a. Autrement dit,

$$f \text{ dérivable en } a \text{ ssi } \exists l \in \mathbb{R} : f(x) = f(a) + l \cdot (x - a) + o(x - a)$$

ou encore

$$f \text{ dérivable en } a \text{ ssi } \exists l \in \mathbb{R} : f(a + h) = f(a) + l \cdot h + o(h)$$

Bien sûr, $f'(a) := l$.

Remarque 3.3.1

1. La fonction $h \mapsto o(h)$ est définie sur une voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ (à valeurs $\mathbb{R}$) et satisfait $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{o(h)}{h} = 0$ (avec $o(0) = 0$). On note aussi $o(h) = h\epsilon(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.
2. L'application linéaire (resp. affine) tangente est $\mathbb{R} \ni h \mapsto f'(a) \cdot h$ (resp. $h \mapsto f(a) + f'(a) \cdot h$). L'équation de la tangente au graphe $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \Omega\}$ en $(a, f(a))$ est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
3. La « tangente » est une approximation au premier ordre de f, obtenue en négligeant l'infiniment petit d'ordre 1, $o(h)$. Ainsi, on remplace quelquefois l'équation (*a priori*) non linéaire $f(x) = 0$ par l'équation affine $f(a) + f'(a)(x - a) = 0$.

3.3.2 Définitions

Définition 3.3.1 L'application f est *différentiable en* a si il existe une application linéaire $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ telle que $f(x) = f(a) + L(x - a) + o(x - a)$. On note $df(a) := L$ **la** *différentielle de* f *en* a. L'application f est *différentiable sur* Ω si elle est différentiable en tout point de Ω.

Remarque 3.3.2

1. L'application linéaire L, quelles que soient les normes choisies sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, est continue.

2. L'application o est définie sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ à valeurs (dans un voisinage de $0 \in$) $\mathbb{R}^m$ et satisfait $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{N_1(h)} = 0$ (*i.e.* $\lim_{h\to 0} \frac{N_2(o(h))}{N_1(h)}$) où N_1 (resp. N_2) désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$).
3. Cette définition est indépendante des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$.
4. L'évaluation de $df(a)$ en $h \in \mathbb{R}^n$ est notée $df(a).h$.
5. Quand $n = 1$ la dérivée de f en a est l'évaluation en $h = 1$ de la différentielle $df(a)$ *i.e.* f est différentiable en a ssi f est dérivable en a et $f'(a) = df(a).1$.
6. Être différentiable en a est une propriété locale (*i.e.* ne dépend pas, ni ne présume du comportement de f « loin de » a).

Proposition 3.3.1 La différentielle en un point, si elle existe, est unique.

Dém. Soit $L' \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ satisfaisant la définition de la différentielle en a de f. Comme Ω est ouvert, il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subseteq \Omega$. On a, $\forall h \in B(0, \eta) : (L - L')(h) = o(h)$. Posons $h = \lambda u$ pour $u \in S^{n-1}$ et $\lambda \in [0, \eta[$. Si $\lambda \neq 0$ alors $(L - L')(u) = \frac{o(\lambda)}{\lambda}$. En passant à la limite sur λ, il vient : $\forall u \in S^{n-1}, L(u) = L'(u)$. Finalement, $L = L'$.

Exemple 3.3.1

1. La différentielle en un point (resp. sur Ω) d'une application constante est nulle (resp. identiquement nulle).
2. La différentielle en un point a d'une application linéaire $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est $dL(a) = L$. Autrement dit, la différentielle dL de L est constante (égale à L).
   (a) En particulier, $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})(\forall a, h \in \mathbb{R}^n) : d\pi_i(a).h = h_i$ et
   (b) $d(id_{\mathbb{R}^n}) = id_{\mathbb{R}^n}$.

3.3.3 Résultats structurels

Proposition 3.3.2 Si f est différentiable en a alors f est continue en a.

Dém. f différentiable en $a \Leftrightarrow f(a+h) = f(a)+L(h)+o(h)$. Comme $\lim_{h\to 0} L(h) = \lim_{h\to 0} o(h) = 0$, on obtient $\lim_{h\to 0} f(a + h) = f(a)$ *i.e.* f est continue en a.

Lemme 3.3.1 Si $L \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ alors $(\exists A \in \mathbb{R}_+)(\forall h \in \mathbb{R}^n) : N_2(L(h)) \leqslant AN_1(h)$.

Dém. Si $m = 1$ alors $L(h) = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$ avec $a_i = L(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc $|L(h)| \leqslant (\max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|)||h||_1$. Par équivalence des normes, on obtient le résultat recherché. Si $m > 1$ alors $N_2(L(h)) \leqslant \beta||L(h)||_\infty$.

Remarque 3.3.3

1. La *norme* de L est $||L|| := \inf\{A \in \mathbb{R}_+ : \forall u \in \mathbb{R}^n, N_2(L(u)) \leqslant AN_1(u)\}$; c'est une norme sur $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
2. Plus généralement, si $f \in L(E, F)$ alors f continue ssi $||L||$ a un sens (ou par convention est $< +\infty$).

Proposition 3.3.3 Soient f et g deux applications différentiables en a. On a :

1. $f + g$ est différentiable en a et $d(f + g)(a) = df(a) + dg(a)$;

2. si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λf est différentiable en a et $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$.
3. si $m = 1$ alors
   (a) $f \cdot g$ est différentiable en a et $d(f \cdot g)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$.
   (b) si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est différentiable en a et $d(\frac{1}{g})(a) = -\frac{dg(a)}{g^2(a)}$.

Dém. Soit $h \in \mathbb{R}^n, N_1(h) << 1$.

1.
$$\begin{aligned}(f+g)(a+h) &= f(a+h) + g(a+h)\\ &= f(a) + df(a).h + o_1(h) + g(a) + dg(a).h + o_2(h)\\ &= (f+g)(a) + (df+dg)(a).h + o(h).\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}(\lambda f)(a+h) &= \lambda \cdot f(a+h) = \lambda(f(a) + df(a).h + o(h))\\ &= (\lambda f)(a) + \lambda df(a).h + o(h).\end{aligned}$$

3. (a) $(f \cdot g)(a+h) = (f(a) + df(a).h + o(h)) \cdot (g(a) + dg(a).h + o(h)) = f(a)g(a) + g(a)df(a).h + f(a)dg(a).h + o(h)$. Comme $h \mapsto g(a)df(a).h + f(a)dg(a).h$ est linéaire, on obtient par unicité, $d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$.
   (b)
$$\begin{aligned}\frac{1}{g(a+h)} &= \frac{1}{g(a) + dg(a).h + o(h)} = \frac{1}{g(a)}\left(\frac{1}{1 + \frac{dg(a).h}{g(a)} + o(h)}\right)\\ &= \frac{1}{g(a)}\left(1 - \frac{dg(a).h}{g(a)} + o(h)\right) = \frac{1}{g(a)} - \frac{dg(a).h}{g^2(a)} + o(h).\end{aligned}$$
   Par conséquent, $d(\frac{1}{g})(a) = -\frac{dg(a)}{g^2(a)}$.

Remarque 3.3.4 L'ensemble des applications différentiables en un point est une $\mathbb{R}-$algèbre.

Exemple 3.3.2

1. Une fonction polynomiale est différentiable sur $\mathbb{R}^n$.
2. La différentielle en (a, b) de $(x, y) \overset{\times}{\mapsto} x \cdot y$ est
$$d \times (a, b).h = \pi_2(a, b)d\pi_1(a, b).h + \pi_1(a, b)d\pi_2(a, b)h = bh_1 + ah_2.$$
3. Un quotient d'applications différentiables (en particulier, une fonction rationnelle) est différentiable sur le complémentaire du lieu des points où le dénominateur s'annule. Si f et g sont différentiables en a et $g(a) \neq 0$ alors $d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g(a)}df(a) - f(a)\frac{dg(a)}{g^2(a)} = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{g^2(a)}$.

Proposition 3.3.4 Si f est différentiable en a, Ω' est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g : \Omega' \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $b := f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

Dém.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(a+h) &= g(f(a)+\overbrace{df(a).h+o_1(h)}^{k=O(h)}) = g(b)+dg(b).k+o_2(k)\\ &= g\circ f(a)+dg(b)(df(a).h+o_1(h))+\widetilde{o_2}(h)\\ &= g\circ f(a)+dg(f(a))\circ df(a).h+o(h).\end{aligned}$$

Remarque 3.3.5 On n'a pas supposé $f(\Omega)\subseteq\Omega'$ mais il s'avère que, comme f est continue, $f(a)\in\Omega'$, et Ω' est ouvert, quitte à réduire Ω (à une boule ouverte suffisamment petite centrée en a), on peut supposer $g\circ f$ définie sur Ω.

Exemple 3.3.3 Soit $\gamma:]-1,1[\to\mathbb{R}^n$ un arc dérivable (en 0) tel que $a=\gamma(0)$. Si f est différentiable en a alors$f\circ\gamma$ est dérivable en 0 et $(f\circ\gamma)'(0)=df(a).\gamma'(0)$. En effet, $(f\circ\gamma)'(0)=d(f\circ\gamma)(0).1=df(\gamma(0))\circ d\gamma(0).1=df(a).\gamma'(0)$. En particulier, si f est une fonction numérique et $df(a).h=\sum_{i=1}^n\alpha_ih_i$ alors $(f\circ\gamma)'(0)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\gamma_i'(0)$ où $\gamma'(0)=(\gamma_1'(0),\ldots,\gamma_n'(0))$.

Proposition 3.3.5 L'application f est différentiable en a ssi $\forall i\in\{1,\ldots,m\}$: f_i est différentiable en a. Dans ce cas, $\forall h\in\mathbb{R}^n$: $df(a).h=(df_1(a).h,\ldots,df_m(a).h)$.

Dém.
($\Rightarrow$) Soit $j\in\{1,\ldots,m\}$. On a $f_j=\pi_j\circ f$. Comme π_j est différentiable (sur $\mathbb{R}^m$), f_j est différentiable en a et $df_j(a)=d\pi_j(f(a))\circ df(a)$. Or, π_j étant linéaire, $d\pi_j(b)=\pi_j$. Il en résulte $\pi_j\circ df(a)=df_j(a)$ *i.e.* la j^e composante de $df(a)$ est $df_j(a)$.
($\Leftarrow$) L'application $(df_1(a),\ldots,df_m(a)):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $h\mapsto(df_1(a).h,\ldots,df_m(a).h)$ est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. De plus, si $\mathcal{C}_m=(e_1',\ldots,e_m')$ alors $f(a+h)=f(a)+\sum_{j=1}^m(df_j(a).h+o_j(h)).e_j'$ où $o_j:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$. Or, $(o_1(h),\ldots,o_m(h))=o(h)$ en tant qu'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. D'où le résultat.

3.3.4 Dérivée partielle

Définition et propriétés fondamentales

Définition 3.3.2 Soient $a\in\Omega$ et $i\in\{1,\ldots,n\}$. La *dérivée partielle première de f par rapport à x_i (ou i^e variable) en a*, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, est la dérivée par rapport à t en a_i, si elle existe, de l'*application partielle* $\mathbb{R}\supseteq\Omega_{a_i}\ni t\mapsto f(a_1,\ldots,a_{i-1},t,a_{i+1},\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^m$. Autrement dit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{\substack{t\to a_i\\ t\neq a_i}}\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},t,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a)}{t-a_i}\\ &= \frac{d}{dt}f(a_1,\ldots,a_{i-1},t,a_{i+1},\ldots,a_n)_{|t=a_i}\\ &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\ldots,a_n)-f(a)}{t}\\ &= \frac{d}{dt}f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\ldots,a_n)_{|t=0}\\ &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}.\end{aligned}$$

La *dérivée partielle première de f par rapport à x_i* est l'application $\mathbb{R}^n \supseteq \Omega \ni a \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^m$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existe pour tout $a \in \Omega$.

Remarque 3.3.6

1. Comme Ω est ouvert, la i^e fonction partielle est définie sur un voisinage de a_i.
2. La dérivée partielle, si elle existe, dépend *a priori*, des n variables $x_1, \ldots, x_n$.
3. La dérivée partielle par rapport à une variable donnée, lorsqu'elle existe, s'obtient donc en dérivant formellement par rapport à cette variable spécifique et en laissant constantes les autres variables.

Exemple 3.3.4

1. Si $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} + \sin(x_1)$ alors
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,2) = \frac{d}{dt}\left(e^{2t} + \sin(t)\right)_{|t=1} = \frac{d}{dt}\left(e^{2(1+t)} + \sin(1+t)\right)_{|t=0} = 2e^2 + \cos(1).$$
2. Si $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ désigne la première projection alors les dérivées partielles de π_1 existent sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{\partial \pi_1}{\partial x}(x,y) = 1$ et $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial y}(x,y) = 0$. Plus généralement, soient $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ et $a \in \mathbb{R}^n$. On a $\dfrac{\partial \pi_i}{\partial x_j}(a) = \delta_{ij}$.
3. Si $f(x,y) = \sin(x^2 y) e^{\frac{\tanh(\arctan(x^p y^q))}{1+6\cos^{2s}(x+y)}}$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
4. Si $f(x,y) = \sin(x^2 y)$ alors les dérivées partielles existent sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy\cos(x^2 y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 \cos(x^2 y)$.

Définition 3.3.3 Soit $u \in \mathbb{R}^n$. La *dérivée directionnelle de f en a dans la direction u* est, si la limite existe,
$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) := \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}.$$

Remarque 3.3.7 Comme Ω est ouvert, pour t suffisamment petit, $a + tu \in \Omega$.

Exemple 3.3.5 On considère
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (*dans le quadrant supérieur droit, distinguer les zones* $\{x \leqslant y^2\}$ *et* $\{y^2 < x\}$) et différentiable sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. De plus si $t \in \mathbb{R}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors
$$\frac{f(t(x,y)) - f(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{t^4 xy^3}{t^3(x^2+t^2y^4)} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$$

Donc, $\forall u \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{\partial f}{\partial u}(0) = 0$.

Proposition 3.3.6 Si f est différentiable en a alors les dérivées directionnelles existent en a.

Dém. Si f est différentiable en a alors on a $f(a+tu) = f(a) + tdf(a).u + o(t)$. Donc

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{f(a+tu)-f(a)}{t} = df(a).u.$$

Autrement dit, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(a) = df(a).u$.

Remarque 3.3.8 La réciproque est fausse. En effet, reprenons l'exemple précédent. Il s'ensuit que si f est différentiable en 0 alors $df(0) = 0$ (qui est bien linéaire). Pour $(x,y) \neq 0$, $\dfrac{f(x,y)}{||(x,y)||_2} = \dfrac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$. Si $x = ty^2$ alors $\dfrac{f(ty^2,y)}{||(ty^2,y)||_2} = \dfrac{ty^5}{|y|^5(1+t^2)\sqrt{1+t^2y^2}} = \dfrac{tsign(y)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2y^2}}$. Dés lors, $\displaystyle\lim_{y\to 0^+} \frac{f(ty^2,y)}{||(ty^2,y)||_2} = \frac{t}{1+t^2}$. On conclut que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y)}{||(x,y)||_2}$ n'existe pas.

Corollaire 3.3.1 Si f est différentiable en a alors les dérivées partielles existent en a.

Dém. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial e_i}(a)$.

Proposition 3.3.7

$$\begin{aligned} f \text{ est différentiable en } a \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{f(a+h)-f(a)-\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i}{N_1(h)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{N_2\left(f(a+h)-f(a)-\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i\right)}{N_1(h)} = 0. \end{aligned}$$

Dém.

($\Rightarrow$) Si f est différentiable en a alors ses dérivées partielles premières existent en a et pour $h \in \mathbb{R}^n$, on a $df(a).h = df(a).\displaystyle\sum_{i=1}^n h_i e_i = \sum_{i=1}^n h_i \overbrace{df(a).e_i}^{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$.

($\Leftarrow$) L'application $h \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Donc f est différentiable en a et par unicité, $df(a).h = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i$.

Exemple 3.3.6

1. Si $f(x_1,x_2) = e^{x_1x_2} + \sin(x_1)$ alors $df(1,2).(h_1,h_2) = (2e^2+\cos(1))h_1 + e^2h_2$.
2. Si f et g sont deux fonctions différentiables en a alors pour $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a).$$

D'où, pour $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d(f\cdot g)(a).h &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)g(a)+f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a))h_i \\ &= g(a)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + f(a)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)h_i \\ &= (g(a)df(a)+f(a)dg(a)).h. \end{aligned}$$

i.e. $d(f\cdot g) = fdg + gdf$.

Matrice jacobienne

Définition 3.3.4 Si les dérivées partielles premières de f existent en a alors la *matrice jacobienne de f en a* est la matrice de type (m,n)

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.3.8 Si f est différentiable en a alors la matrice jacobienne de f en a est

$$J_f(a) = mat(df(a), \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_m).$$

Dém. Soit $j \in \{1,\ldots,n\}$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial e_j}(a) = df(a).e_j$ car f est différentiable en a. Or $f = \sum_{i=1}^{m} f_i e'_i$ où $(e'_1,\ldots,e'_m)$ désigne $\mathcal{C}_m$. Donc $df(a).e_j = \sum_{i=1}^{m}(df_i(a).e_j)e'_i = \sum_{i=1}^{m}\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)e'_i$.

Exemple 3.3.7 Le jeu de coordonnées polaires est

$$\mathbb{R}_+^*\times]-\pi,\pi[=\Omega \ni (\rho,\theta) \overset{\varphi}{\mapsto} (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}.$$

L'application φ est différentiable sur Ω et

$$J_\varphi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.3.9 Si f est différentiable en $a \in \Omega$ et $\mathbb{R}^m \supseteq \Omega' \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$ est différentiable en $b := f(a) \in \Omega'$ alors $J_{g\circ f}(a) = J_g(b)J_f(a)$.
Dém. D'après la proposition précédente

$$J_{g\circ f}(a) = mat(d(g\circ f)(a), \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_p) = mat(dg(b), \mathcal{C}_m, \mathcal{C}_p)\cdot mat(df(a), \mathcal{C}_n, \mathcal{C}_m) = J_g(b)J_f(a).$$

Remarque 3.3.9 Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(g\circ f)_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial(g\circ f)_1}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial(g\circ f)_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial(g\circ f)_i}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(g\circ f)_p}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial(g\circ f)_p}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial(g\circ f)_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \text{ (où } (g\circ f)_i = g_i \circ f)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_i}{\partial y_m}(b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1}(b) & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m}(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Corollaire 3.3.2 Si f est différentiable en $a \in \Omega$ et $\mathbb{R}^m \supseteq \Omega' \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$ est différentiable en $b := f(a)$ alors pour $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $i \in \{1, \ldots, p\}$

$$\frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Définition 3.3.5 Si les dérivées partielles premières de f existent et si $m = n$ alors $j_f(a) := \det J_f(a)$ est le *jacobien* de f en a.

Exemple 3.3.8 On a $j_\varphi(\rho, \theta) = \rho$.

Remarque 3.3.10

1. Si $\mathbb{R}^n \supseteq \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ est différentiable en a, $j_f(a) \neq 0 \Leftrightarrow df(a)$ est inversible.
2. Le jacobien indique la modification à apporter au volume d'un *cube infinitésimal* lors d'un changement de variable (par exemple, $dxdy = \rho d\rho d\theta$).

3.3.5 Théorème des accroissements finis

Théorème 3.3.1 (Formule des accroissements finis pour une fonction numérique d'une variable réelle) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Remarque 3.3.11 Ce résultat est faux pour les fonctions vectorielles. Considérons $\exp : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto e^{it}$. Alors exp est c^∞ sur $[0, \pi]$. On a

$\exists c \in]0, \pi[: \exp(\pi) - \exp(0) = e^{i\pi} - e^{i.0} = \exp'(c) \cdot (\pi - 0) \Rightarrow \exists c \in]0, \pi[: |2| = |ie^{ic}|.\pi \rightarrow\leftarrow$

Définition 3.3.6 Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$. Le *segment* $[a,b]$ (resp. *intervalle ouvert* $]a,b[$) est $\{(1-t)a+tb : t \in [0,1]\}$ (resp. $\{(1-t)a+tb : t \in]0,1[\}$).

Théorème 3.3.2 (Formule des accroissements finis pour une fonction numérique de plusieurs variables réelles) Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et $a, b \in \Omega$. Supposons que $[a,b] \subset \Omega$, que f est continue sur $[a,b]$ et différentiable en tout point de $]a,b[$. Posons $h = b - a$ *i.e.* $b = a + h$. Alors

$$\exists \theta \in]0,1[: f(b) - f(a) = df(a+\theta h).h.$$

Dém. Pour $t \in [0,1]$, posons $g(t) = f(a+th)$. Alors g est une fonction numérique d'une variable réelle continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. Il existe donc $\theta \in]0,1[$ tel que $g(1) - g(0) = g'(\theta)$. Or, pour $t \in]0,1[$: $g'(t) = df(a+th).h$, $g(1) = f(b)$ et $g(0) = f(a)$.

Remarque 3.3.12 (Expression à l'aide des dérivées partielles) On a :

$$f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1+\theta h_1, \dots, a_n+\theta h_n)h_i.$$

Définition 3.3.7 Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est *convexe* si $\forall x, y \in C$ le segment $[x,y]$ est entièrement contenu dans C *i.e.* $[x,y] \subseteq C$.

Exemple 3.3.9

1. Un ev et une boule ouverte ou fermée sont convexes.
2. Une sphère de $\mathbb{R}^n$ de rayon > 0 n'est pas convexe.

Corollaire 3.3.3 (Une inégalité des accroissements finis) Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable telle que

$$(\exists M \in \mathbb{R}_+)(\forall a \in \Omega)(\forall h \in \mathbb{R}^n) : N_2(df(a).h) \leqslant M N_1(h). \tag{3.1}$$

Alors

$$(\exists \tilde{M} \in \mathbb{R}_+)(\forall a, b \in \Omega) : N_2(f(b) - f(a)) \leqslant \tilde{M} N_1(b-a).$$

Dém. D'après la formule des accroissement finis,

$$(\forall i \in \{1, \dots, m\})(\exists \theta_i \in]0,1[) : f_i(b) - f_i(a) = df_i(a+\theta_i h).h.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, m\} : |f_i(b) - f_i(a)| &= |df_i(a+\theta_i h).h| \\ &\leqslant ||df(a+\theta_i h).h||_\infty \quad \overbrace{\leqslant \frac{1}{\alpha} N_2}^{\alpha||\cdot||_\infty \leqslant N_2 \leqslant \beta||\cdot||_\infty} \quad (df(a+\theta_i h).h) \\ &\leqslant \frac{M}{\alpha} N_1(h). \end{aligned}$$

Dés lors, $||f(b) - f(a)||_\infty \leqslant \dfrac{M}{\alpha} N_1(h)$ d'où $N_2(f(b) - f(a)) \leqslant \overbrace{\dfrac{\beta}{\alpha} M}^{\tilde{M}} \, N_1(h)$.

Remarque 3.3.13

1. Le scalaire $\tilde{M}$ est un multiple positif de M.
2. À l'aide d'une preuve plus fine, on peut montrer que M convient.
3. Si la condition (3.1) est satisfaite alors l'application f est *à dérivée bornée*.

Définition 3.3.8 S'il existe $k \geqslant 0$ tel que $\forall a, b \in \Omega : N_2(f(a) - f(b)) \leqslant kN_1(a - b)$ alors f est $k-$*Lipschitzienne* (avec une *constante de Lipschitz* $\leqslant k$).

Remarque 3.3.14 L'inégalité des accroissements finis entraîne que f (à dérivée bornée) est $\tilde{M}-$Lipschitzienne sur le convexe Ω.

Corollaire 3.3.4 Si f est différentiable sur un ouvert convexe Ω et $df = 0$ sur Ω alors f est constante sur Ω.

Dém. Soient $a, x \in \Omega$. Comme $\forall x' \in \Omega$, $df(x') = 0$ et Ω est convexe, on applique l'inégalité des accroissements finis avec $M = 0$. Il vient $N_2(f(x) - f(a)) \leqslant 0$ *i.e.* $\forall x \in \Omega$, $f(x) = f(a)$.

3.3.6 Dérivée d'ordre supérieur. Applications de classe c^k

Un critère de différentiabilité

Théorème 3.3.3 Soient $a \in \Omega$ et $\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ une fonction. Si les dérivées partielles premières de f existent en a et si les $n - 1$ premières sont continues en a alors f est différentiable en a.

Dém. On raisonne par récurrence sur n. Translatons la question en $a = 0$ et $f(a) = 0$; posons pour $||x||_1 << 1$:

$$g(x) = g(x_1, \dots, x_n) = f(a + x) - f(a) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a).x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).x_n\right).$$

L'application g est nulle en 0 et admet des dérivées partielles premières également nulles en 0. Il faut et il suffit de montrer que $g(x) = o(x)$.

– $n = 2$: la première des dérivées partielles premières de g est continue en 0. Il faut et il suffit de montrer que $g(x) = o(x_1, x_2)$.

  Soit $\epsilon > 0$. Comme $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$ est continue en 0, il existe $\eta' > 0$ tel que

$$||x||_1 < \eta' \Rightarrow \left|\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right| < \epsilon.$$

  Ainsi, si $||x||_1 < \eta'$ alors $|g(x_1, x_2) - g(0, x_2)| \leqslant \epsilon |x_1|$.
  D'autre part, comme $\dfrac{\partial g}{\partial x_2}(0) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x_2| < \delta \Rightarrow |g(0, x_2)| \leqslant \epsilon |x_2|.$$

  Par suite, si $||x||_1 < \eta = \min(\eta', \delta)$ alors

$$\begin{aligned} |g(x_1, x_2)| &= |g(x_1, x_2) - g(0, x_2) + g(0, x_2)| \\ &\leqslant |g(x_1, x_2) - g(0, x_2)| + |g(0, x_2)| \\ &\leqslant \epsilon(|x_1| + |x_2|) = \epsilon ||x||_1. \end{aligned}$$

  D'où $g(x_1, x_2) = o(x_1, x_2)$.

– $n > 2$: on pose

$$\begin{cases} h_1(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) - g(0, x_2, \ldots, x_n) \\ h_2(x_2, \ldots, x_n) = g(0, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Alors $g = h_1 + h_2$. Comme h_2 ne dépend que de $n-1$ variables et vérifie les hypothèses de l'énoncé, on obtient par récurrence, $h_2 = o(x_2, \ldots, x_n)$. Maintenant, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction (à paramètres) $x_1 \mapsto g_{x_2,\ldots,x_n}(x_1) := g(x_1, \ldots, x_n)$ dont la dérivée est la première dérivée partielle première de g, est continue et nulle en 0, on obtient

$$h_1(x_1, \ldots, x_n) = o(x_1).$$

On conclut en ajoutant les o.

Définition 3.3.9 L'application f est *de classe* c^0 sur Ω si f est continue sur Ω. L'application f est *de classe* $c^{k\geqslant 1}$ ($k \in \mathbb{N}^*$) si toutes ses dérivées partielles premières existent et sont de classe c^{k-1}.

Corollaire 3.3.5 Si f est c^1 alors f est différentiable.

Remarque 3.3.15 La réciproque est fausse –déjà dans $\mathbb{R}$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Considérons

$$f(t) = \begin{cases} |t|^{1+\alpha} \sin \frac{1}{|t|^\beta} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, f (paire) est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(0) = 0$ mais f' n'est pas continue en 0 dés que $\beta \geqslant \alpha$.

Proposition 3.3.10 Si f est c^k alors f est c^{k-1} pour tout $k \geqslant 1$.
Dém. Si $k = 1$ alors c'est le corollaire précedent. Supposons le résultat acquis pour un entier $k \geqslant 1$. Soit donc f de classe c^{k+1}. Par définition, cela signifie que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est c^k. Mais alors $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est c^{k-1}. Par suite, f est c^k.

Corollaire 3.3.6 Pour que f soit c^k il faut et il suffit que f soit c^l pour tout $l \leqslant k$.

Définition 3.3.10 Une *dérivée partielle d'ordre* $l \in \mathbb{N}^*$ de f en a est une dérivée partielle première (si elle existe) d'une dérivée partielle d'ordre $l-1$, évaluée en a. On note :

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_i \partial x_{i_1}^{l_1} \cdots \partial x_{i_k}^{l_k}}(a) := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^{l-1} f}{\partial x_{i_1}^{l_1} \cdots \partial x_{i_k}^{l_k}}\right)(a)$$

avec $i, i_j \in \{1, \ldots, n\}$, $l_j \in \mathbb{N}^*$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$ et $1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} l_j = l$.

Remarque 3.3.16 Il est quelquefois commode d'écrire une dérivée partielle d'ordre l sous la forme :

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}(a)$$

avec $(l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} l_j = l$.

Exemple 3.3.10

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

   Alors f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles secondes existent en tout point de $\mathbb{R}^2$. On a par exemple :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$$
   et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x.$$
   Donc
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) = 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0) = -1.$$

2. Si $d \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{R}_d[x_1, \ldots, x_n]$ alors ses dérivées partielles sont des fonctions polynomiales, celles d'ordre d sont constantes et celles d'ordre $d+1$ sont nulles.

Définition 3.3.11 Une fonction f est *de classe* c^∞ si f est c^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 3.3.11 Une fonction rationnelle est c^∞ sur son domaine de définition.

Proposition 3.3.11 Pour que f soit c^k il faut et il suffit que ses dérivées partielles d'ordre $l \leqslant k$ soient c^{k-l}.

Proposition 3.3.12 Pour que f soit $c^{k\geqslant 1}$ il faut et il suffit que f et ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant k-1$ soient différentiables et que ses dérivées partielles d'ordre k soient continues.

Dém.
($\Rightarrow$) Comme f est $c^{k\geqslant 1}$, ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant k-1$ sont (au moins) c^1. Donc différentiables. Par hypothèse, ses dérivées partielles d'ordre k sont continues.
($\Leftarrow$) Les dérivées partielles d'ordre $k-1$ étant différentiables et leurs dérivées partielles premières étant continues, les dérivées partielles d'ordre $k-1$ sont c^1. Par suite, les dérivées partielles d'ordre $k-2$ ont des dérivées partielles premières c^1 et sont donc c^2. De proche en proche, on obtient que les dérivées partielles d'ordre 1 sont c^{k-1} *i.e.* f est c^k.

Remarque 3.3.17 Si f est c^k alors sa *différentielle* df en tant qu'application $df : \Omega \to (\mathbb{R}^n)^m \simeq \mathbb{R}^{mn}$ est c^{k-1} (où l'on a identifié $\mathbb{R}^{n*}$ avec $\mathbb{R}^n$).

Théorème 3.3.4 Le résultat structurel sur les applications différentiables s'adapte mot pour mot en remplaçant « différentiable en a » par « de classe c^k ».

Exemple 3.3.12 La norme euclidienne est c^∞ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Définition 3.3.12 L'application f est *k fois différentiable en a* si ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant k-1$ existent sur un voisinage de a et sont différentiables en a.

Proposition 3.3.13 L'application f est k fois différentiable en a ssi ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant k-1$ existent sur un voisinage de a et sont continues en a et les $(k-1)$-ièmes sont différentiables en a.

Lemme 3.3.2 Soit $\gamma : [0,1] \xrightarrow{c^0} \mathbb{R}$ dérivable sur $[0,1[$. Alors

$$|\gamma(1) - \gamma(0) - \gamma'(0)| \leqslant \sup_{t \in [0,1[} |\gamma'(t) - \gamma'(0)|.$$

Dém. Posons $\delta(t) = \gamma(t) - \gamma'(0).t$. Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à δ (la borne supérieure du second membre étant éventuellement infinie).

Théorème 3.3.5 (de Schwarz) Soit $\mathbb{R}^2 \supseteq \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Si f est deux fois différentiable en a alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a). \tag{3.2}$$

Dém. On peut supposer $a = 0$, $f(0) = 0$ et $df(0) = 0$. Pour $u, v \in \mathbb{R}^2$ assez petits, posons

$$q(u,v) := f(u+v) - f(u) - f(v).$$

Posons aussi, pour $t \in [0,1]$:

$$\gamma(t) := f(u+tv) - f(tv).$$

On a $q(u,v) = \gamma(1) - \gamma(0)$. Donc

$$|q(u,v) - \gamma'(0)| = |\gamma(1) - \gamma(0) - \gamma'(0)| \leqslant \sup_{t \in [0,1]} |\gamma'(t) - \gamma'(0)|$$

grâce au lemme qui précède.
Soit $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= df(u+tv).v - df(tv).v \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u+tv)v_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2}(tv)v_2\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(tv)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(tv)v_2\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(u+tv) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(tv)\right) v_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(u+tv) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(tv)\right) v_2 \\
&= \Bigg[\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)(u_1+tv_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)(u_2+tv_2) \\
&- \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)(tv_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)(tv_2)\right) + o(u) + o(v)\Bigg] v_1 \\
&+ \Bigg[\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)(u_1+tv_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0)(u_2+tv_2) \\
&- \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)(tv_1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0)(tv_2)\right) + o(u) + o(v)\Bigg] v_2 \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)u_1v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)u_2v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)u_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0)u_2v_2 + o(||u||^2 + ||v||^2).
\end{aligned}$$

D'où $\gamma'(t) - \gamma'(0) = o(||u||^2 + ||v||^2)$ et

$$q(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)u_1v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)u_2v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)u_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0)u_2v_2 + o(||u||^2 + ||v||^2).$$

En considérant $\tilde{\gamma}(t) = f(v+tu) - f(tu)$, on obtient (car $q(u,v) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$) :

$$q(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0)u_1v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)u_1v_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)u_2v_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0)u_2v_2 + o(||u||^2 + ||v||^2).$$

Par conséquent

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0)\right) u_2v_1 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0)\right) u_1v_2 = o(||u||^2 + ||v||^2).$$

On conclut ainsi à la symétrie recherchée.

Remarque 3.3.18 Le théorème de Schwarz donne une condition suffisante pour la symétrie (3.2). En voici d'autres, indépendantes :

1. Si f est différentiable en a et si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent sur un voisinage de a et sont continues en a alors (3.2) est satisfaite.
2. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent sur un voisinage de a et si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ est continue en a alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ existe et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$.

Exemple 3.3.13 L'application f de l'exemple précédent n'est pas deux fois différentiable en 0.

Définition 3.3.13 Soit f est une fonction numérique. La *matrice hessienne* de f en a est la matrice carrée d'ordre n des dérivées partielles secondes de f, si elles existent, évaluée en a :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3.3.7 Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ est deux fois différentiable en a alors

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n\} : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Dém. Comme la différentiabilité de f est équivalente à celle de ses composantes, il (faut et il) suffit de le prouver pour une fonction. Soient $i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$. Le corollaire résulte (par définition d'une dérivée partielle) du théorème de Schwarz en posant $x = x_i$ et $y = x_j$.

Corollaire 3.3.8 Si la fonction numérique f est deux fois différentiable en a alors $H_f(a)$ est symétrique.

Remarque 3.3.19 Il s'ensuit que $H_f(a) : M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(H,K) \mapsto {}^tHH_f(a)K$ est la forme polaire de la forme quadratique $H \mapsto {}^tHH_f(a)H$ (dont on déterminera la signature pour étudier les extrema de f).

Corollaire 3.3.9 Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sum_{j=1}^{k} l_j = l$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application l fois différentiable en $a \in \Omega$ alors

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k : \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1}^{l_1} \cdots \partial x_{i_k}^{l_k}}(a) = \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}^{l_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}^{l_{\sigma(k)}}}(a).$$

Remarque 3.3.20 Ceci signifie que la différentielle d'ordre l en a est symétrique.

3.3.7 Formule de Taylor

Définition 3.3.14 Si f est l fois différentiable en $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on note

$$d^l f(a).h^l := \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_l \leqslant n} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_l}}(a) h_{i_1} \cdots h_{i_l}.$$

Remarque 3.3.21 On notera

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_l \leqslant n} \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_l}}(a) h_{i_1} \cdots h_{i_l} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{1 \leqslant i_2, \ldots, i_l \leqslant n} \frac{\partial^l f}{\partial x_i \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_l}}(a) h_{i_2} \cdots h_{i_l} \right) h_i \\ &= (d^l f(a).h^{l-1}).h = (d^{l-1}(df)(a).h^{l-1}).h \end{aligned}$$

Théorème 3.3.6 (Formule de Taylor) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une application k fois différentiable en $a \in \Omega$. Pour $N_1(h) << 1$:

$$f(a+h) = \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{l!} d^l f(a).h^l + o(h^k).$$

Dém. Dans ce qui suit, h désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$ suffisamment petit et quitte à considérer les composantes, on suppose $m = 1$. On raisonne par récurrence sur k.

- Si $k = 1$ alors c'est la définition de la différentiabilité de f en a.
- On suppose la formule vraie pour un entier $k \geqslant 1$ et la fonction f, $k+1$ fois différentiable en a. Pour $t \in [0, 1]$, posons

$$g(t) = f(a+th) - \sum_{l=0}^{k+1} \frac{t^l}{l!} d^l f(a).h^l.$$

Comme g est dérivable sur $[0, 1]$, il existe $t \in]0, 1[$ tel que $g(1) - g(0) = g'(t)$. Or

$$\begin{aligned} g'(t) &= df(a+th).h - \sum_{l=1}^{k+1} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} d^l f(a).h^l \\ &= \left(df(a+th) - \sum_{l=0}^{k} \frac{t^l}{l!} d^{l+1} f(a) h^l \right).h. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, $df(a+th) - \sum_{l=0}^{k} \frac{t^l}{l!} d^{l+1} f(a) h^l = o(h^k)$. Donc $g'(t) = o(h^{k+1})$ et finalement :

$$f(a+h) = \sum_{l=0}^{k+1} \frac{1}{l!} d^l f(a).h^l + o(h^{k+1}).$$

Remarque 3.3.22 $f(a+h) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{l_1+\cdots+l_n=l} \frac{1}{l_1!\cdots l_n!} \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_n^{l_n}}(a).h_1^{l_1} \cdots h_n^{l_n} + o(h^k).$

Exemple 3.3.14

1. Si $n = k = 2$ et $m = 1$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = f(x,y) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)k^2\right) + o((h,k)^2). \end{aligned}$$

2. Si $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 + \sin(x^2 y)$ alors

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0) + df(0).(x,y) + \frac{1}{2} d^2 f(0).(x,y)^2 + o((x,y)^2) \\ &= x^2 - 3xy + y^2 + o((x,y)^2) = \overbrace{(x - \frac{3}{2}y)^2 - \frac{5}{4}y^2}^{\text{non dégénéré}} + o((x,y)^2) \end{aligned}$$

La partie principale de ce développement limité change de signe, donc 0 est un *point selle*.