Université Savoie Mont Blanc Année 15/16

MATH222-223 (6 ECTS)

Mathématiques générales – Algèbre linéaire I

Stéphane Simon

11 mai 2016

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

1.1 Définition

Définition 1.1.1 Un *espace vectoriel sur* $\mathbf{K}$ (ou un $\mathbf{K}$−espace vectoriel) est un ensemble $E \neq \varnothing$ muni de deux lois :

1. une *addition* <u>interne</u> $E \times E \xrightarrow{+} E$, $(u, v) \mapsto u + v$ telle que
   (a) $\forall u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$, *associativité* de $+$
   (b) $(\exists e \in E)(\forall u \in E)$, $u + e = e + u = u$, e est l'*élément neutre* de $+$; on le note 0
   (c) $(\forall u \in E)(\exists \tilde{u} \in E)$, $u + \tilde{u} = \tilde{u} + u = 0$, $\tilde{u}$ est l'*opposé* de u ; on le note $-u$
   (d) $(*) \forall u, v \in E$, $u + v = v + u$, l'addition est *commutative*.

   Une telle *structure* $(E, +)$ est un *groupe ((*) abélien)*.
2. Une *multiplication* <u>externe</u> $\mathbf{K} \times E \xrightarrow{\cdot} E$, $(\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u$ telle que
   (a) $(\forall \lambda \in \mathbf{K})(\forall u, v \in E)$, $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ *distributivité* de $\cdot$ sur $+$
   (b) $(\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K})(\forall u \in E)$, $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ *distributivité* de $+_{\mathbf{K}}$ sur $\cdot$
   (c) $(\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K})(\forall u \in E)$, $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$
   (d) $\forall u \in E$, $1 \cdot u = u$.

Un élement $v \in E$ est un *vecteur* tandis qu'un élément $\lambda \in \mathbf{K}$ est un *scalaire*. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) alors l'espace vectoriel est *réel* (resp. *complexe*). L'élément neutre 0 est le *vecteur nul*.

Remarque 1.1.2

1. Nous verrons en TD que la condition (*) est redondante. Pour vérifier qu'un ensemble est un $\mathbf{K}$−espace vectoriel, il faudra donc vérifier les 10 $(= 11 - 1)$ axiomes précédents ou s'appuyer sur le cours !
2. On note quelquefois $(E, +, \cdot)$ la donnée d'un espace vectoriel pour expliciter les lois $+$ (interne) et $\cdot$ (*externe*).

Exemple 1.1.3

1. Si E désigne l'espace ordinaire et O son origine alors en faisant correspondre à un point M quelconque de E le vecteur $\overrightarrow{OM}$, on définit sur l'espace ordinaire une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.
2. Considérons l'ensemble $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}$ (n facteurs) des $n-$uplets réels. Pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, posons
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$
On vérifie que cette addition est associative, admet un élément neutre $0 = (0, \ldots, 0)$ et que chaque élément $(x_1, \ldots, x_n)$ admet l'opposé $-(x_1, \ldots, x_n) := (-x_1, \ldots, -x_n)$.
D'autre part, si $\lambda \in \mathbf{R}$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}$, posons
$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$
On vérifie que $\mathbf{R}^n$ devient un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.
De façon analogue, $\mathbf{C}^n$ (resp. $\mathbf{Q}^n$) peut être considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{Q}$).
Par exemple, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ et même $\mathbf{R}$ et $\{0\}$ sont des espaces vectoriels réels ; $\mathbf{C}^2$, $\mathbf{C}^3$ et même $\mathbf{C}$ sont des espaces vectoriels complexes. On a par exemple :
$$(1,2) + (-2,-1) + (1,-1) = (0,0) \text{ et } \frac{3}{2} \cdot (2,-1) = (3, -\frac{3}{2}).$$
3. Soit $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ (*i. e.* pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{K}$). De manière similaire au cas de $\mathbf{K}^n$, on peut définir une addition interne et une multiplication externe sur $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ qui le munissent d'une structure de $\mathbf{K}-$espace vectoriel.
4. Soit E l'ensemble des fonctions réelles définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$. Si $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit bien entendu $f + g$ et $\lambda \cdot f$ par
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$
pour tout $x \in I$. Alors E devient un espace vectoriel.
Au lieu de prendre les fonctions réelles quelconques, on pourrait prendre les fonctions continues, ou les fonctions dérivables, etc.

Remarque 1.1.4 Plus généralement, si $\mathbf{K}$ est un *corps* quelconque (éventuellement *non commutatif*) et E un ensemble muni des opérations précédemment décrites alors E est un espace vectoriel (éventuellement *à gauche*) sur $\mathbf{K}$, son *corps des scalaires.*

1.2 Conséquences des axiomes

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.

1. Si $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ alors $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$. En effet, $\lambda(u - v) + \lambda v = \lambda(u - v + v) = \lambda u$; donc, $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$.
2. En faisant, $v = u$ dans l'égalité 1, on obtient pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda 0 = 0$.

3. En faisant $u = 0$ dans l'égalité 1, on obtient pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et $v \in V$, $\lambda(-v) = -\lambda v$.
4. Si $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et $u \in E$ alors $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$. En effet, $(\lambda - \mu)u + \mu u = (\lambda - \mu + \mu)u = \lambda u$; donc $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$.
5. En faisant, $\lambda = \mu$ dans l'égalité 4, on obtient pour tout $u \in E$, $0u = 0$.
6. En faisant, $\lambda = 0$ dans l'égalité 4, on obtient pour tout $v \in E$ et $\mu \in \mathbf{K}$, $(-\mu)v = -\mu v$.
7. Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u \in E$, $(-\lambda)(-u) = -(-\lambda)u$ d'après 3 puis $-(-\lambda)u = (-(-\lambda))u = \lambda u$ d'après 6. Finalement $(-\lambda)(-u) = \lambda u$.
8. Soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u \in E$. On a $\lambda u = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0$.
   En effet, si $\lambda u = 0$ alors 2 cas se présentent :
   — $\lambda = 0$;
   — $\lambda \neq 0$; mais alors λ est inversible dans $\mathbf{K}$, c-a-d. que l'inverse de λ, $\dfrac{1}{\lambda}$, appartient à $\mathbf{K}$. Donc
   $$0 = \frac{1}{\lambda}0 = \frac{1}{\lambda}(\lambda u) = (\frac{1}{\lambda}\lambda)u = \frac{\lambda}{\lambda}u = u.$$
   D'où la conclusion.
   Réciproquement, si $\lambda = 0$ ou $u = 0$ alors on a bien $\lambda u = 0$.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3.1 Soit E un $\mathbf{K}$−espace vectoriel. Une partie F de E est un *sous-espace vectoriel* de E si

1. $0 \in F$, *non vacuité de* F
2. pour tout $u, v \in F$, $u + v \in F$, *stabilité de* F *par addition*
3. pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u \in F$, $\lambda \cdot u \in F$, *stabilité de* F *par multiplication externe.*

Remarque 1.3.2

1. Si $u \in F$ alors $(-1) \cdot u = -(1 \cdot u) = -u \in F$ par la troisième condition.
2. La condition 1 de la définition est équivalente à la non *vacuité* de F, dès que F vérifie les deux dernières propriétés. En effet, si elle est satisfaite alors $F \neq \varnothing$; réciproquement, si $F \neq \varnothing$ alors il existe $u \in F$, donc $-u \in F$ par la remarque précédente ; par suite, $u - u = 0 \in F$ par la seconde condition.

Théorème 1.3.3 L'ensemble F avec les lois induite par $(u, v) \mapsto u + v$ et $(\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u$ est un $\mathbf{K}$−espace vectoriel.

Exemple 1.3.4

1. La partie $\{0\}$ (resp. E) est le plus petit (resp. grand), au sens de l'inclusion, sous-espace vectoriel de E.
2. Prenons pour E l'espace ordinaire muni de son origine O. Alors $\{O\}$, les droites passant par O, les plans passant par O et E tout entier, sont des sous-espaces vectoriels de E. On verra qu'il n y en a pas d'autre (dans ce cas).
3. Si $E = \mathbf{R}^I$ est l'ensemble des fonctions réelles sur un intervalle I alors le sous-ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbf{R})$ des fonctions continues dans I est un sous-espace vectoriel de E.

4. Une suite $(u_p) \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est *presque nulle* si $u_p = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers p (autrement dit, au-delà d'un rang N, *dépendant* de la suite (u_p)) ; on note $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ ce sous-ensemble du $\mathbf{K}-$espace vectoriel $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Un élément de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})} - \{0\}$ est une suite

$$(u_p) = (0, \dots, 0, u_{p_0}, 0, \dots, 0, u_{p_1}, \dots, u_{p_n}, 0, 0, \dots)$$

où u_{p_k} pour $0 \leqslant k \leqslant n$ sont les seuls termes non nuls de la suite (u_p) ; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

Notons X^k la suite presque nulle $(0, \dots, 0, \overbrace{1}^{k}, 0, \dots)$ pour $k \in \mathbf{N}$. Soit (a_n) une suite presque nulle, $\neq 0$; elle s'écrit donc $(a_n) = (0, \dots, 0, a_{n_0}, 0, \dots, 0, a_{n_1}, \dots, a_d, 0, \dots)$ avec $a_d \neq 0$. Alors

$$(a_n) = a_{n_0} X^{n_0} + \dots + a_{n_l} X^{n_l} + \dots + a_d X^d = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

(avec $a_k = 0$ si $k \notin \{n_0, n_1, \dots, n_l, \dots, d\}$).
En effet,

$$\begin{aligned}
(a_n) &= (0, \dots, 0, \overbrace{a_{n_0}}^{n_0}, 0, \dots) + (0, \dots, 0, \overbrace{a_{n_1}}^{n_1}, 0, \dots) + \dots + (0, \dots, 0, \overbrace{a_d}^{d}, 0, \dots) \\
&= a_{n_0}(0, \dots, 0, \overbrace{1}^{n_0}, 0 \dots) + a_{n_1}(0, \dots, 0, \overbrace{1}^{n_1}, 0, \dots) + \dots + a_d(0, \dots, 0, \overbrace{1}^{d}, 0, \dots) \\
&= a_{n_0} X^{n_0} + a_{n_1} X^{n_1} + \dots + a_d X^d.
\end{aligned}$$

Autrement dit, (a_n) *est* le *polynôme* $P = a_{n_0} X^{n_0} + a_{n_1} X^{n_1} + \dots + a_d X^d$ de variable X, de *degré* $d = \max\{k \in \mathbf{N} : a_k \neq 0\}$ à *coefficients* dans $\mathbf{K}$.
L'ensemble $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ est le $\mathbf{K}-$espace vectoriel (car sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$) des *polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans* $\mathbf{K}$; il est noté $\mathbf{K}[X]$ *i. e.*

$$\mathbf{K}[X] = \{a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n : n \in \mathbf{N}, \forall k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbf{K}\}.$$

Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ alors on dit que $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont les *coefficients* de P et que P est de *degré* n (sous l'hypothèse $a_n \neq 0$; si $\forall k \in \mathbf{N}$, $a_k = 0$ alors $P = 0$ et $deg(0) = -\infty$).

5. En réalité, on peut aussi définir sur $\mathbf{K}[X]$ une multiplication *interne* de la façon suivante : si $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ alors $P \cdot Q = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$ pour $0 \leqslant k \leqslant m+n$.
Muni de cette nouvelle opération, *compatible* avec l'addition et la multiplication externe, $\mathbf{K}[X]$ est une $\mathbf{K}-$*algèbre* qu'on appelle $\mathbf{K}-$*algèbre des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans* $\mathbf{K}$ (avec $deg(P \cdot Q) = deg(P) + deg(Q)$).

Proposition 1.3.5 Soit E un espace vectoriel. Tout intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Dém. Soient $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels et F l'intersection des F_i. Comme 0 appartient à tous les F_i, $0 \in F$. Soient $u, v \in F$. Pour tout $i \in I$, $u, v \in F_i$ et comme F_i est un sous-espace vectoriel $u + v \in F_i$. Donc $u + v \in F$. Enfin, soient $\lambda \in \mathbf{K}$ et $u \in F$. Pour tout $i \in I$, $\lambda u \in F_i$; donc $\lambda u \in F$.

Remarque 1.3.6 En général, une réunion de sous-espaces vectoriels de E (même finie) n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Définition 1.3.7 Soient E un $\mathbf{K}$−espace vectoriel et A une partie de E. Une *combinaison linéaire d'éléments de* A est un élément de E qui est une somme finie de la forme $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$ où $n \in \mathbf{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ et $u_1, \ldots, u_n \in A$.

Remarque 1.3.8

1. Si A est vide alors l'unique combinaison linéaire d'élements de A est la combinaison linéaire vide qui est égale à 0 par définition.
2. Certains λ_i dans la combinaison linéaire ci-dessus peuvent être nuls.

Exemple 1.3.9 Les éléments de A sont eux-mêmes combinaison linéaire d'éléments de A car si $u \in A$ alors $u = 1 \cdot u$ avec $1 \in \mathbf{K}$ et $u \in A$ (par exemple).

Théorème 1.3.10 Soient E un $\mathbf{K}$−espace vectoriel et A une partie de E. Parmi tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A, il y en a un plus petit que les autres, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A.

Dém. Soit F l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de A :

$$F = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i : n \in \mathbf{N}, \lambda_i \in \mathbf{K}, u_i \in A, \forall i \in [\![1, n]\!]\}.$$

Il s'agit de montrer que :

1. F est un sous-espace vectoriel de E contenant A ;
2. Si F' est un sous-espace vectoriel de E contenant A alors $F \subseteq F'$.

1. (a) $0 \in F$ (que $A = \varnothing$ ou que $A \neq \varnothing$, avec $u \in A$ et $\lambda = 0$).

   (b) Soient $u, v \in F$. Il existe $u_1, \ldots, u_n \in A$, $v_1, \ldots, v_m \in A$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ et $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbf{K}$ tels que

   $$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \text{ et } v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m.$$

   Donc, $u + v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_m v_m \in F$.

   (c) Soient $u \in F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $\lambda \cdot u = \lambda \cdot (\lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n) = (\lambda\lambda_1) u_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n) u_n \in F$.

   Ainsi, F est un bien un sous-espace vectoriel de E qui contient A.

2. Montrons maintenant qu'un tel u appartenant à F, appartient aussi à F'. Comme $u_1, \ldots, u_n \in A$ et $A \subseteq F'$, on a $u_1, \ldots, u_n \in F'$. Comme F' est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \in F'$ donc $u \in F'$. Ainsi $F \subseteq F'$.

Définition 1.3.11 Soient E un espace vectoriel et A une partie de E. Le sous-espace vectoriel F du théorème 1.3.10 s'appelle *le sous-espace vectoriel engendré par* A et est noté $vect(A)$ ou $< A >$. On dit aussi que A *engendre* F.

Corollaire 1.3.12 Soient $u_1, \ldots, u_n$ des éléments de E. Le sous-espace vectoriel de E engendré par $u_1, \ldots, u_n$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.

Dém. Il suffit de poser $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ et d'appliquer le théorème 1.3.10.

Corollaire 1.3.13 Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E. Le sous-espace vectoriel G de E engendré par F et F' est $F + F' := \{u + u' : u \in F, u' \in F'\}$.

Dém. Tout d'abord, $F + F' \subseteq G$ car $F, F' \subseteq G$ et G est stable par addition. D'autre part, si $v \in G$ alors $v = u + u'$ où u est combinaison linéaire d'éléments de F et u' combinaison linéaire d'éléments de F'. Donc $u \in F$ et $u' \in F'$. Par suite, $v = u + u' \in F + F'$. D'où $G \subseteq F + F'$. On conclut $G = F + F'$.

Remarque 1.3.14

1. Autrement dit, $vect(F \cup F') = F + F'$.
2. Le corollaire précédent se généralise au cas de $3, 4, \ldots$ (*nombre fini*) sous-espaces vectoriels de E.

Exemple 1.3.15 Soient E l'espace ordinaire muni d'une origine O, F et F' deux droites passant par O. Si $F \neq F'$ alors $F + F'$ est le plan contenant F et F'. Si $F = F'$ alors $F + F' = F$.

1.4 Applications linéaires

Définition 1.4.1 Soient E, F des $\mathbf{K}$−espaces vectoriels et φ une application de E dans F. L'application φ est *linéaire* si

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) \ (\textit{additivité})$$

et

$$\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u) \ (\textit{homogénéité})$$

quels que soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
On dit aussi que φ est un *homomorphisme* de E dans F.

Remarque 1.4.2 Formellement, les lois + et $\cdot$ devraient être indicées par l'espace vectoriel sur lequel elles opèrent *i. e.* $\varphi(u +_E v) = \varphi(u) +_F \varphi(v)$ et $\varphi(\lambda \cdot_E u) = \lambda \cdot_F \varphi(u)$; comme cette rigueur alourdit considérablement l'écriture, on choisit en général de ne pas le préciser en laissant au contexte (ici, *source* ou *but* de φ) le soin de lever l'ambiguité éventuelle.

Exemple 1.4.3

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'application *inclusion*, $j : F \hookrightarrow E$ est une application linéaire.
2. Soit E un $\mathbf{K}$−espace vectoriel. Pour $\lambda \in \mathbf{K}$, considérons l'application $h_\lambda : E \to E$ définie par $h_\lambda(u) = \lambda \cdot u$ pour tout $u \in E$. Cette application est linéaire car
   (a) pour tout $u, v \in E$, $h_\lambda(u + v) = \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v = h_\lambda(u) + h_\lambda(v)$
   (b) pour tout $u \in E$ et tout $\mu \in \mathbf{K}$, $h_\lambda(\mu \cdot u) = \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u = (\mu\lambda) \cdot u = \mu \cdot (\lambda \cdot u) = \mu \cdot h_\lambda(u)$.

   L'application h_λ est l'*homothétie vectorielle* de E *de rapport* λ.
   D'autre part si, $\lambda \neq 0$ alors $h_{\frac{1}{\lambda}} \circ h_\lambda = h_{\frac{1}{\lambda}} \circ h_\lambda = id_E$, ainsi h_λ est *bijective* d'inverse $(h_\lambda)^{-1} = h_{\lambda^{-1}} = h_{\frac{1}{\lambda}}$ (qui est donc aussi linéaire !).
3. Soit E l'espace ordinaire muni d'une origine O. Toute *similitude* de centre O est une application linéaire.
4. Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$. L'application $f \mapsto f'$ est linéaire.

Remarque 1.4.4

1. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.
2. Si une application linéaire φ de E dans F est bijective alors φ^{-1} est une application *linéaire* de F dans E.

   En effet, si $x, y \in F$ alors il existe $u, v \in E$ (en fait, uniques) tels que $\varphi(u) = x$ et $\varphi(v) = y$. Dès lors, $\varphi^{-1}(x + y) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(u + v)) = u + v = \varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)$. De même, si $\lambda \in \mathbf{K}$ alors $\varphi^{-1}(\lambda \cdot x) = \varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi(u)) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda \cdot u)) = \lambda \cdot u = \lambda \cdot \varphi^{-1}(x)$.

Définition 1.4.5 Soient E, F des espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire.

1. Si φ est bijective alors φ est un *isomorphisme* de E sur F. S'il existe un isomorphisme de E sur F alors E et F sont *isomorphes* ; ils ont alors les mêmes propriétés.
2. Si $F = E$ alors φ est un *endomorphisme* de E.
3. Si φ est bijective et $F = E$ alors φ est un *automorphisme* de E.

Exemple 1.4.6

1. Pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, h_λ est un endomorphisme de E.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbf{K} - \{0\}$, h_λ est un automorphisme de E, d'inverse $h_{\frac{1}{\lambda}}$.

Remarque 1.4.7 Un automorphisme est donc une application inversible dans l'ensemble des applications linéaires de E dans E. L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E est un groupe (non abélien en général) appelé *groupe linéaire* de E et noté $GL(E)$.

Définition 1.4.8 Soient E, F deux $\mathbf{K}$−espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Le *noyau* $\ker\varphi$ de φ est le sous-ensemble de E

$$\varphi^{-1}(0) = \{u \in E : \varphi(u) = 0\}$$

et l'*image*, $\operatorname{im}\varphi$, de φ est le sous-ensemble de F,

$$\varphi(E) = \{\varphi(u) : u \in E\} = \{v \in F : \exists u \in E, v = \varphi(u)\}.$$

Théorème 1.4.9 Soient E, F deux $\mathbf{K}$−espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Alors le noyau $\ker\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E et l'image $\operatorname{im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F.

Dém.

On a $\varphi(0 + 0) = \varphi(0) = \varphi(0) + \varphi(0)$ Donc $\varphi(0) = 0$ ainsi $0 \in \ker\varphi \neq \varnothing$. Soient $u, v \in \ker\varphi$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors $\varphi(u + \lambda \cdot v) = \varphi(u) + \lambda \cdot \varphi(v) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$. Donc $u + \lambda \cdot v \in \ker\varphi$.

D'après ce qui précède $0 \in \operatorname{im}\varphi$. Soient $u', v' \in \operatorname{im}\varphi$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $u, v \in E$ tels que $u' = \varphi(u)$ et $v' = \varphi(v)$. Donc $u' + \lambda \cdot v' = \varphi(u) + \lambda \cdot \varphi(v) = \varphi(u + \lambda \cdot v)$ *i. e.* $u' + \lambda \cdot v' \in \operatorname{im}\varphi$.

1.5 Sous-espaces supplémentaires

Définition 1.5.1 Soient F, F' des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Si $E = F + F'$ et $F \cap F' = \{0\}$ alors F, F' sont des *sous-espaces vectoriels supplémentaires dans* E ou sont en *somme directe dans* E ou encore, E est *somme directe* de F et F' ; on le note $E = F \oplus F'$.

Théorème 1.5.2 Soient F, F' des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $E = F \oplus F'$.
2. Tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $v = u + u'$, avec $u \in F$ et $u' \in F'$.
3. $F + F' = E$, et $u \in F$, $u' \in F'$, $u + u' = 0 \Rightarrow u = u' = 0$.

Dém.
$(1 \Rightarrow 2)$ Soit $v \in E$. Comme $E = F + F'$ d'après 1, il existe $u \in F$ et $u' \in F'$ tels que $v = u + u'$. Soit $v = u_1 + u_1'$ une autre décomposition de v avec $u_1 \in F$ et $u_1' \in F'$. Alors $u - u_1 = -(u' - u_1') \in F \cap F'$ donc, $u - u_1 = 0 = u' - u_1'$ car $F \cap F' = \{0\}$; d'où $u_1 = u$ et $u' = u_1'$. Ainsi, l'écriture de v sur $F + F'$ est unique.

$(2 \Rightarrow 3)$ Comme tout vecteur de E se décompose sur $F + F'$, on a $F + F' = E$ d'après 2. Soient $u \in F$ et $u' \in F'$ tels que $u + u' = 0$. Comme $0 \in E$ et que sa décomposition sur $F + F'$ est unique d'après 2, les vecteurs $u \in F$ et $u' \in F'$ sont uniques. Or, $0 \in F$ et $0 \in F'$ et $0 = 0 + 0$. Ainsi, $u = 0$ et $u' = 0$.

$(3 \Rightarrow 1)$ On a déjà $F + F' = E$ d'après 3. Soit $v \in F \cap F'$. On a évidemment $v - v = v + (-v) = 0$ avec $v \in F$ et $-v \in F'$. D'après 3, $v = -v = 0$. Autrement dit, $F \cap F' \subseteq \{0\}$. Comme on a toujours $\{0\} \subseteq F \cap F'$, il vient $F \cap F' = \{0\}$. On conclut $E = F \oplus F'$.

Exemple 1.5.3 Prenons pour E l'espace ordinaire muni d'une origine O. Soient P un plan passant par O et Δ une droite passant par O. Si Δ n'est pas contenue dans P alors Δ et P sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.

Théorème 1.5.4 Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un $\mathbf{K}$–espace vectoriel E. À tout vecteur $v = u_1 + u_2$ où $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$, faisons correspondre le vecteur u_1 de F_1. L'application de E dans F_1 ainsi définie est linéaire, surjective et de noyau F_2.

Dém. Notons $\pi_1 : E \to F_1$ l'application *bien définie* par $\pi_1(v) = \pi_1(u_1 + u_2) = u_1$ où $v = u_1 + u_2$ est la décomposition unique de $v \in E$ sur $F_1 + F_2$.
Soient $v, v' \in E$. Comme F_1, F_2 sont en somme directe dans E, il existe $u_1, u_1' \in F_1$ et $u_2, u_2' \in F_2$ uniques tels que $v = u_1 + u_2$ et $v' = u_1' + u_2'$. Donc $v + v' = u_1 + u_1' + u_2 + u_2'$ est la décomposition unique de $v + v'$ sur $F_1 + F_2$. Par conséquent, $\pi_1(v + v') = u_1 + u_1' = \pi_1(v) + \pi_1(v')$.
Soient $v \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Le vecteur v se décompose de manière unique sur $F_1 \oplus F_2$ donc il existe $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$ uniques tels que $v = u_1 + u_2$. On a donc $\lambda \cdot v = \lambda \cdot (u_1 + u_2) = \lambda \cdot u_1 + \lambda \cdot u_2$ avec $\lambda \cdot u_1 \in F_1$ et $\lambda \cdot u_2 \in F_2$, déterminés de manière unique. Par conséquent, $\pi_1(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot u_1 = \lambda \cdot \pi_1(v)$.
De plus, si $u_1 \in F_1$ alors $u_1 = u_1 + 0$ est l'unique écriture de u_1 sur $F_1 \oplus F_2$ donc $\pi_1(u_1) = u_1$. Ainsi tout vecteur $u_1 \in F_1$ est atteint par π_1, l'image de π_1 $\operatorname{im}\pi_1$, est donc égale à F_1 et π_1 est surjective.
Enfin, soit $v \in E$ tel que $\pi_1(v) = 0$. En reprenant les notations ci-dessus, on a donc $\pi_1(v) = u_1 = 0$. Par conséquent, $\ker \pi_1 = \{v \in E : v = 0 + u_2, u_2 \in F_2\} = \{v \in E : v \in F_2\} = F_2$.

Définition 1.5.5 L'application π_1 ainsi définie est la *projection linéaire de E sur F_1 parallèlement à F_2*.

Remarque 1.5.6 On définit de manière analogue la projection sur F_2 parallèlement à F_1.

Théorème 1.5.7 Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = E$ et $F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right) = \{0\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
2. Tout vecteur $v \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$, avec $u_i \in F_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
3. $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = E$, et $u_1 \in F_1, u_2 \in F_2, \ldots, u_n \in F_n$, $u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 = \cdots = u_n = 0$.

Dém.
$(1 \Rightarrow 2)$ Comme $F_1 + \cdots + F_n = E$, tout vecteur $v \in E$ se décompose sous la forme $v = u_1 + \cdots + u_n$ avec $u_i \in F_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soit $v = u_1' + \cdots + u_n'$ une seconde écriture de v sur $F_1 + \cdots F_n$. On a donc

$$v = u_1 + \cdots + u_n = u_1' + \cdots + u_n' = v.$$

D'où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$u_i - u_i' = u_1' - u_1 + \cdots + u_{i-1}' - u_{i-1} + u_{i+1}' - u_{i+1} + \cdots + u_n' - u_n.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i - u_i' \in F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right)$. Or, d'après 1,

$$u_i - u_i' = 0 \text{ pour } i \in [\![1, n]\!]$$

ou encore

$$u_i = u_i' \text{ pour } i \in [\![1, n]\!].$$

On conclut que l'écriture de $v \in E$ sur $F_1 + \cdots + F_n$ est unique.

$(2 \Rightarrow 3)$ Comme tout vecteur de E se décompose sur $F_1 + \cdots + F_n$, on a déjà $E = F_1 + \cdots + F_n$. Soient $u_1 \in F_1, \ldots, u_n \in F_n$ tels que $u_1 + \cdots + u_n = 0$. On a évidemment $0 + \cdots + 0 = 0$ avec $0 \in F_i$ car chacun des F_i est un sous-espace vectoriel de E. Or, d'après 2, l'écriture du vecteur nul de E sur les F_i est unique. Par conséquent, $u_i = 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

$(3 \Rightarrow 1)$ On a déjà $F_1 + \cdots + F_n$. Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $v \in F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right)$. Alors il existe $u_1 \in F_1, \ldots, u_n \in F_n$ tels que $v = u_i = \sum_{j \neq i} u_j$. Dès lors, $u_1 + \cdots + u_{i-1} + (-u_i) + u_{i+1} + \cdots + u_n = 0$. Comme F_i est un sous-espace vectoriel, $-u_i \in F_i$. D'après 3, cela entraîne $u_1 = \cdots = u_{i-1} = -u_i = u_{i+1} = \cdots = u_n = 0$. Donc $v = u_i = 0$. Ainsi $F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right) \subseteq \{0\}$ et en fait $F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j\right) = \{0\}$ car l'inclusion réciproque est évidente.

Remarque 1.5.8 Lorsque l'une des conditions du théorème précédent est remplie on dit que E est *somme directe* des $F_1, \ldots, F_n$ et on note $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$.

Exemple 1.5.9 Prenons pour E l'espace ordinaire muni d'une origine O. Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 trois droites non coplanaires passant par O. Alors E est somme directe de Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

1.6 Produit d'espaces vectoriels

Soient E_1 et E_2 des $\mathbf{K}$−espaces vectoriels. Nous allons faire de l'ensemble

$$E_1 \times E_2 = \{(u_1, u_2) : u_1 \in E_1, u_2 \in E_2\}$$

un $\mathbf{K}$−espace vectoriel.
Soient $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Posons

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$\lambda \cdot (u_1, u_2) := (\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2).$$

On vérifie facilement les axiomes d'un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ (on a notamment que le vecteur nul de $E_1 \times E_2$ est $0 = (0_{E_1}, 0_{E_2})$).

Définition 1.6.1 Soient E_1 et E_2 deux $\mathbf{K}$−espaces vectoriels. Le $\mathbf{K}$−espace vectoriel $E_1 \times E_2$ est l'*espace vectoriel produit de E_1 et E_2*.

Soit $E_1' = \{(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2 : u_2 = 0\} = \{(u_1, 0) : u_1 \in E_1\} = E_1 \times \{0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $E_1 \times E_2$; de plus, l'application $u_1 \mapsto (u_1, 0)$ est un isomorphisme de E_1 sur E_1'. On identifie généralement E_1 à E_1' à l'aide de cet isomorphisme, que l'on considère donc comme un sous-espace vectoriel de $E_1 \times E_2$. De même, E_2 s'identifie au sous-espace vectoriel $\{0\} \times E_2$ par l'application $u_2 \mapsto (0, u_2)$.
Tout élément $(u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ s'écrit $(u_1, 0) + (0, u_2) = u_1 + u_2$ avec les conventions précédentes. En outre, si $(u_1, u_2) = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in E_1$ et $v_2 \in E_2$ alors $(u_1, u_2) = (v_1, 0) + (0, v_2) = (v_1, v_2)$ donc $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$. Ainsi, tout élément de $E_1 \times E_2$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2. Autrement dit, E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E_1 \times E_2$.
Enfin, l'égalité $(u_1, u_2) = u_1 + u_2$ prouve que si l'on projette (u_1, u_2) sur E_1 parallèlement à E_2 alors on obtient u_1.

Théorème 1.6.2 Soient E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors l'application $\varphi : F_1 \times F_2 \to E$ qui transforme (u_1, u_2) en $u_1 + u_2$ est un isomorphisme de $F_1 \times F_2$ sur E qui se réduit à l'identité sur F_1 et F_2.
Dém. Soient (u_1, u_2), $(v_1, v_2) \in F_1 \times F_2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$\varphi((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) = \varphi((u_1 + v_1, u_2 + v_2)) = u_1 + v_1 + u_2 + v_2 = u_1 + u_2 + v_1 + v_2 = \varphi((u_1, u_2)) + \varphi((v_1, v_2))$$

et

$$\varphi(\lambda \cdot (u_1, u_2)) = \varphi((\lambda \cdot u_1, \lambda \cdot u_2)) = \lambda \cdot u_1 + \lambda \cdot u_2 = \lambda \cdot (u_1 + u_2) = \lambda \cdot \varphi((u_1, u_2)).$$

Donc φ est linéaire.
Soit $v \in E$. Comme $E = F_1 \oplus F_2$, il existe une unique écriture $v = u_1 + u_2$ avec $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$. Autrement dit, pour tout $v \in E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $\varphi((u_1, u_2)) = u_1 + u_2 = v$ *i. e.* φ est bijective ; l'application linéaire φ réalise donc un isomorphisme de $F_1 \times F_2$ sur E.
Soit maintenant $u_1 \in F_1$, où F_1 est identifié au sous-espace vectoriel F_1' de $F_1 \times F_2$ comme précédemment. On a $\varphi(u_1) = \varphi((u_1, 0)) = u_1 + 0 = u_1$. Ainsi, pour tout $u_1 \in F_1$, $\varphi(u_1) = u_1$ *i. e.* $\varphi_{|F_1} = id_{F_1}$. De manière similaire, $\varphi_{|F_2} = id_{F_2}$.

Si $E_1, \dots, E_n$ sont des $\mathbf{K}$−espaces vectoriels, on définit de manière analogue un $\mathbf{K}$−espace vectoriel $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ où chaque E_i s'identifie à un sous-espace vectoriel de E ; on voit comme précédemnent, qu'avec cette identification, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$.
En particulier, si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = \mathbf{K}$, alors $E = \mathbf{K}^n$ et $E_i = \{0\}^{i-1} \times \mathbf{K} \times \{0\}^{n-i}$.

Théorème 1.6.3 Soient E un espace vectoriel et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe dans E. L'application $\varphi : F_1 \times \cdots \times F_n \to E$ qui transforme $(u_1, \dots, u_n)$ en $u_1 + \cdots + u_n$ est un isomorphisme de $F_1 \times \cdots \times F_n$ sur E qui se réduit à l'identité sur chacun des F_i.

1.7 Indépendance linéaire

Théorème 1.7.1 Soient E un $\mathbf{K}$−espace vectoriel et $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une relation de la forme $\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = 0$ dans laquelle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires non tous nuls ;
2. l'un des u_i est combinaison linéaire des autres.

Dém.
$(1 \Rightarrow 2)$ Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} u_i &= -\frac{1}{\lambda_i} \cdot (\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \cdot u_{i-1} + \lambda_{i+1} \cdot u_{i+1} + \cdots + \lambda_n \cdot u_n) \\ &= \mu_1 \cdot u_1 + \cdots + \mu_{i-1} \cdot u_{i-1} + \mu_{i+1} \cdot u_{i+1} + \cdots + \mu_n \cdot u_n. \end{aligned}$$

$(2 \Rightarrow 1)$ Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $u_i = \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \cdot u_{i-1} + \lambda_{i+1} \cdot u_{i+1} + \cdots + \lambda_n \cdot u_n$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$, $\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$. Alors on a bien sûr :

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_{i-1} \cdot u_{i-1} + (-1) \cdot u_i + \lambda_{i+1} \cdot u_{i+1} + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = 0$$

Posant $\lambda_i = -1$, on trouve bien une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires non tous nuls annulant la combinaison linéaire.

Définition 1.7.2 Soient E un $\mathbf{K}$−espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Lorsque l'une des conditions du théorème précédent est remplie, les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont *linéairement dépendants* ou *liés* ou la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est *liée*.
Dans le cas contraire, les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont *linéairement indépendants* ou la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est *libre*. Autrement dit, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ de E est libre si

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Exemple 1.7.3

1. (a) Deux vecteurs u et v sont linéairement dépendants si et seulement si $v = \lambda \cdot u$ avec $\lambda \in \mathbf{K}$ ou $u = \mu \cdot v$ avec $\mu \in \mathbf{K}$; on dit que u et v sont *proportionnels* ou *colinéaires*.
   (b) Soient u et v des vecteurs proportionnels. Distinguons quatre cas :
      i. $u \neq 0$ et $v \neq 0$: soit par exemple, $v = \lambda \cdot u$, donc $\lambda \neq 0$ et on peut aussi écrire $u = \dfrac{1}{\lambda} v$.

ii. $u \neq 0$ et $v = 0$: on a $v = 0 \cdot u$ mais il n'existe aucun scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $u = \lambda \cdot v$.

iii. $u = 0$ et $v \neq 0$: on a $u = 0 \cdot v$ mais il n'existe aucun scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $v = \lambda \cdot u$.

iv. $u = 0$ et $v = 0$: pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $v = \lambda \cdot u$ et $u = \mu \cdot v$.

2. Prenons pour E l'espace ordinaire muni d'une origine O. Soient $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ trois vecteurs. Montrons que ces vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si ils sont coplanaires. Supposons par exemple qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{K}$ tels que $\overrightarrow{OM_3} = \lambda_1 \overrightarrow{OM_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OM_2}$; il existe un plan vectoriel (P) (éventuellement plusieurs) contenant $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$, ce plan contient alors aussi $\overrightarrow{OM_3}$. Réciproquement, supposons les vecteurs coplanaires, si les trois vecteurs sont nuls, ils sont linéairement dépendants, sinon supposons $\overrightarrow{OM_1} \neq 0$; si $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OM_3}$ sont proportionnels à $\overrightarrow{OM_1}$ alors c'est évident, sinon, par exemple $\overrightarrow{OM_2}$ ne l'est pas. Alors $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ génèrent un unique plan qui est (P), contenant aussi $\overrightarrow{OM_3}$; donc $\overrightarrow{OM_3}$ est combinaison linéaire des autres ; autrement dit, ces vecteurs sont linéairement dépendants.

3. La famille (u) est libre si et seulement si $u \neq 0$. En effet, si (u) est libre alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot u = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Donc $1 \cdot u = u \neq 0$; réciproquement, si $u \neq 0$ alors, la condition $\lambda \cdot u = 0$ entraîne $\lambda = 0$ *i. e.* (u) est libre.

Remarque 1.7.4

1. Si $u_1, \ldots, u_n$ sont linéairement indépendants alors ils sont tous distincts car si l'on avait $u_i = u_j$ pour $i \neq j$ alors u_i serait combinaison linéaire des u_k pour $k \neq i$.
2. Si la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre alors toute sous-famille est libre. En particulier, d'après l'exemple 3 ci-dessus, aucun des u_i n'est nul.

Théorème 1.7.5 Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs linéairement indépendants dans un $\mathbf{K}$−espace vectoriel E. Si un vecteur u de E n'est pas combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ alors $(u, u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

Dém. Soient $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda \cdot u + \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = 0$. Comme u n'est pas combinaison linéaire des u_i, on a nécessairement $\lambda = 0$. Mais alors $\lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = 0$. Or, $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Récapitulons,

$$\forall \lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}, \lambda \cdot u + \lambda_1 \cdot u_1 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Remarque 1.7.6

1. Et réciproquement !
2. Le vecteur u n'est pas combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_n$ si et seulement si u n'est pas dans le sous-espace vectoriel engendré par $u_1, \ldots, u_n$.

1.8 Bases d'un espace vectoriel

Définition 1.8.1 Soient E un espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E. La famille $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une *base* de E si $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre et génératrice de E.

Exemple 1.8.2

1. Prenons pour E l'espace ordinaire muni d'une origine O. Soient $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ trois vecteurs non coplanaires. Alors $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3})$ est une base de E.

2. Soit $E = \mathbf{R}^n$. Considérons les vecteurs suivants de $\mathbf{R}^n$:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\dots$$

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

   Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$, appelée *base canonique* de $\mathbf{R}^n$ et notée $\mathcal{C}_n$. En effet, toute relation de la forme $\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = 0$ s'écrit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$ et entraîne $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$; ainsi, $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. D'autre part, tout vecteur $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ s'écrit $u = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n$; ainsi $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de $\mathbf{R}^n$.

Remarque 1.8.3 L'exemple 2 se transcrit mot pour mot lorsque l'on considère $E = \mathbf{K}^n$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$ ou $\mathbf{C}$.

Théorème 1.8.4 Soient E un espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Tout vecteur u de E s'écrit de manière unique sous la forme $u = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires.

Dém. Puisque $e_1, \dots, e_n$ engendrent E, tout vecteur u s'écrit d'une manière au moins sous la forme $u = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n$. Soit $u = \lambda'_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda'_n \cdot e_n$ une seconde écriture alors $(\lambda_1 - \lambda'_1) \cdot e_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n) \cdot e_n = 0$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, cela entraîne $\lambda_i - \lambda'_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Définition 1.8.5 Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $u \in E$. Le vecteur u s'écrit de manière unique $u = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$. Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ s'appellent les *composantes de u dans la base $\mathcal{B}$*.
Si $E = \mathbf{K}^n$ alors le vecteur $u = (x_1, \dots, x_n)$ admet $x_1, \dots, x_n$ *pour composantes dans la base canonique* $\mathcal{C}_n$.

Théorème 1.8.6 Soient E, F des $\mathbf{K}$–espaces vectoriels, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de n vecteurs de F.

1. Il existe une application linéaire et une seule $\varphi : E \to F$ telle que $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$.
2. Pour que φ soit injective, il faut et il suffit que $f_1, \dots, f_n$ soient linéairement indépendants.
3. Pour que φ soit surjective, il faut et il suffit que $f_1, \dots, f_n$ engendrent F.
4. Pour que φ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que $f_1, \dots, f_n$ forment une base de F.

Dém.

1. Tout vecteur $u \in E$ s'écrit d'une seule manière sous la forme $u = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n$. Posons

$$\varphi(u) = \lambda_1 \cdot f_1 + \dots + \lambda_n \cdot f_n.$$

   L'application $\varphi : E \to F$ est bien définie et $\varphi(e_1) = f_1, \dots, \varphi(e_n) = f_n$. Montrons qu'elle est linéaire.

   (a) Soit $v = \mu_1 \cdot e_1 + \dots + \mu_n \cdot e_n \in E$. Alors $u + v = (\lambda_1 + \mu_1) \cdot e_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) \cdot e_n$ est l'unique écriture de $u + v$ sur la base $(e_1, \dots, e_n)$. Donc $\varphi(u+v) = (\lambda_1 + \mu_1) \cdot f_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) \cdot e_n = \varphi(u) + \varphi(v)$.

   (b) De même, pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda \cdot u = (\lambda\lambda_1) \cdot e_1 + \dots + (\lambda\lambda_n) \cdot e_n$. Donc $\varphi(\lambda \cdot u) = (\lambda\lambda_1) \cdot f_1 + \dots + (\lambda\lambda_n) \cdot f_n = \lambda \cdot \varphi(u)$.

D'autre part, soit $\psi : E \to F$ une seconde application linéaire telle que $\psi(e_1) = f_1, \dots, \psi(e_n) = f_n$. Soit $u = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n$ l'écriture unique d'un vecteur u de E sur la base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors

$$\psi(u) = \psi(\lambda_1 \cdot e_1) + \cdots + \psi(\lambda_n \cdot e_n) = \lambda_1 \cdot \psi(e_1) + \cdots + \lambda_n \cdot \psi(e_n) = \lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_n \cdot f_n = \varphi(u).$$

Ainsi, $\psi = \varphi$. D'où l'unicité de φ.

2. ($\Rightarrow$) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_n \cdot f_n = 0$. On a donc $\lambda_1 \cdot \varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n \cdot \varphi(e_n) = 0$ ou encore $\varphi(\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n) = 0$. Comme φ est linéaire injective, cela entraîne $\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n = 0$. D'où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ car $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. Ainsi, $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

   ($\Leftarrow$) Soient $u, v \in E$ tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$. On a donc $\varphi(u - v) = 0$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $u - v = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n$. Donc $\varphi(\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n) = \lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_n \cdot f_n = \varphi(u - v) = 0$. Or, $(f_1, \dots, f_n)$ libre $\Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dès lors, $u - v = 0$ *i. e.* $u = v$ et φ est injective.

3. ($\Rightarrow$) Soit $v \in F$. Comme φ est surjective, il existe $u \in E$ telle que $\varphi(u) = v$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $u = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n$. Donc $v = \varphi(\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n) = \lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_n \cdot f_n$. Ainsi, v est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_n$ *i. e.* $f_1, \dots, f_n$ génèrent F.

   ($\Leftarrow$) Soit $v \in F$. Comme $f_1, \dots, f_n$ génèrent F, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $v = \lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_n \cdot f_n = \varphi(\lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n)$. Posons $u = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n \in E$. Par définition, $\varphi(u) = v$ et φ est surjective.

4. φ isomorphisme $\Leftrightarrow$ φ injective et surjective $\Leftrightarrow$ $(f_1, \dots, f_n)$ libre et génératrice de F.

Théorème 1.8.7 Soient E un espace vectoriel et $F, G, \dots, L$ des sous-espaces vectoriels de E en somme directe dans E. Soient $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F, $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G, $\dots, (l_1, \dots, l_r)$ une base de L. Alors $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, \dots, l_1, \dots, l_r)$ est une base de E.

Dém. Comme $F + G + \cdots + L = E$, tout vecteur $u \in E$ s'écrit comme une somme $u = f + g + \cdots + l$ avec $f \in F, g \in G, \dots, l \in L$. Or, chacun des vecteurs, $f, g, \dots, l$ se décompose sur la base de F, G, $\dots, L$ respectivement. Ainsi, u est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_n, g_1 \dots, g_p, \dots, l_1, \dots, l_r$; la « concaténation » des bases est donc une famille génératrice de E.
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots, \mu_1, \dots, \mu_p, \dots, \nu_1, \dots, \nu_r \in \mathbf{K}$ tels que $\lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_n \cdot f_n + \mu_1 \cdot g_1 + \cdots + \mu_p \cdot g_p + \cdots + \nu_1 \cdot l_1 + \cdots + \nu_r \cdot l_r = 0$. Cette combinaison linéaire appartient à $F + G + \cdots + L$ par définition. Or, une telle écriture est unique par hypothèse de somme directe, donc $\lambda_1 \cdot f_1 + \cdots + \lambda_n \cdot f_n = 0$, $\mu_1 \cdot g_1 + \cdots + \mu_p \cdot g_p = 0$, $\dots$, $\nu_1 \cdot l_1 + \cdots + \nu_r \cdot l_r = 0$. Maintenant, les familles $(f_1, \dots, f_n)$, $(g_1, \dots, g_p)$, $\dots$, $(l_1, \dots, l_r)$ sont libres donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots = \mu_p = \cdots = \nu_1 = \cdots = \nu_r = 0$. D'où la liberté de $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, \dots, l_1, \dots, l_r)$.

Théorème 1.8.8 Soit E un espace vectoriel. Considérons une base de E, concaténation de plusieurs familles disjointes $(f_1, \dots, f_n)$, $(g_1, \dots, g_p)$, $\dots$, $(l_1, \dots, l_r)$. Soient F le sous-espace vectoriel engendré par $f_1, \dots, f_n$, G le sous-espace vectoriel engendré par $g_1, \dots, g_p$, $\dots, L$ le sous-espace vectoriel engendré par $l_1, \dots, l_r$. Alors $F, G, \dots, L$ sont en somme directe dans E.

Dém. Comme $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, \dots, l_1, \dots, l_r)$ est une base de E, $F + G + \cdots + L = E$. Soit $u \in E$; notons $u = f + g + \cdots + l = f' + g' + \cdots + l'$ deux décompositions de u sur $F + G + \cdots + L$. Ces 2 décompositions donnent lieu à 2 combinaisons linéaires de $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, \dots, l_1, \dots, l_r$ qui sont égales car $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p, \dots, l_1, \dots, l_r)$ est une base de E. Ainsi, l'écriture de u sur $F + G + \cdots + L$ est unique.

1.9 Existence de bases

Théorème 1.9.1 Soient E un espace vectoriel, A et A' deux parties finies de E telles que $A \subseteq A'$. On suppose que les vecteurs de A sont linéairement indépendants, et que les vecteurs de A' engendrent E. Alors il existe une base B de E telle que $A \subseteq B \subseteq A'$.

Dém. Considérons les parties B de E telles que $A \subseteq B \subseteq A'$, et qui sont constituées de vecteurs linéairement indépendants ; il existe de telle partie (par exemple A) et il n'en existe qu'un nombre fini (car A' est fini). Choisissons une telle partie B, possédant le maximum d'éléments. Si $u \in A'$, n'appartient pas à B alors les vecteurs de $B \cup \{u\}$ ne sont pas linéairement indépendants (sinon, B ne serait pas maximale). Ainsi, tout vecteur de A' est combinaison linéaire de vecteurs de B. Comme A' engendre E, la partie B engendre elle aussi E. Comme B est constitué de vecteurs linéairement indépendants, B est une base de E.

Remarque 1.9.2 Une base $\mathcal{B}$ est une famille de vecteurs de E tandis que B est une partie de E, ensemble des valeurs de la famille $\mathcal{B}$, que l'on peut identifier (à l'ordre près) ici car les vecteurs de B sont 2 à 2 distincts.

Corollaire 1.9.3 Soient E un espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E engendrant E. Il existe des indices $i_1, \ldots, i_p$ tels que $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_p})$ soit une base de E.

Dém. Posons $A = \varnothing$ et $A' = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Il existe donc $B \subseteq A'$ tel que B soit une base de E.

Définition 1.9.4 Un KKkespace vectoriel est de *dimension finie* s'il peut être engendré par un nombre fini d'éléments.

Exemple 1.9.5

1. L'espace ordinaire (muni d'une origine) est de dimension finie (il peut être engendré, par exemple, par trois vecteurs).
2. L'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ est de dimension finie ; il peut être engendré (par exemple) par n vecteurs.
3. L'espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$ est de *dimension infinie* ; en effet, quelle que soit la famille finie de polynômes $(P_1, \ldots, P_q)$, les degrés des P_i (*i. e.* le plus grand indice k tel que le coefficient a_k soit non nul) sont majorés par un entier N ; alors toutes les combinaisons linéaires des P_i sont de degré $\leqslant N$, de sorte que les P_i ne peuvent engendrer $\mathbf{K}[X]$.

Corollaire 1.9.6 Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

Dém. On applique le corollaire précédent.

Théorème 1.9.7 [de la base incomplète] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E linéairement indépendants. Il existe des vecteurs $u_{p+1}, \ldots, u_q$ de E tels que $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_q)$ soit une base de E.

Dém. Comme E est de dimension finie, il existe $v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs de E engendrant E. Posons $A = \{u_1, \ldots, u_p\}$ et $A' = \{u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_m\}$. D'après le théorème 1.9.1, il existe une base B de E telle que $A \subseteq B \subseteq A'$. La base B « complète » donc la famille libre $(u_1, \ldots, u_p)$.

1.10 Dimension

Lemme 1.10.1 (clé) Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel, $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs de E, et $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}$ des combinaisons linéaires de $u_1, \ldots, u_p$. Alors, $v_1, \ldots, v_{p+1}$ sont linéairement dépendants sur $\mathbf{K}$.

Dém. On va raisonner par récurrence sur p.

i. Si $p = 1$ (*initialisation*) alors l'énoncé s'écrit $v_1 = a_{11} \cdot u_1$ et $v_2 = a_{21} \cdot u_1$ avec $a_{11}, a_{21} \in \mathbf{K}$. Si $a_{11} = a_{21} = 0$ alors $v_1 = v_2 = 0$ sont linéairement dépendants, sinon, $a_{21}v_1 - a_{11}v_2 = 0$ avec a_{11}, a_{21} non tous nuls ; par suite, (v_1, v_2) est liée.

ii. Supposons la propriété vraie pour un entier $p - 1 \geqslant 1$ et soient $v_1, \ldots, v_{p+1}$ des combinaisons linéaires des p vecteurs $u_1, \ldots, u_p$. Ainsi,

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} v_1 & = & a_{11} \cdot u_1 & + & \cdots & + & a_{1p} \cdot u_p \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ v_p & = & a_{p1} \cdot u_1 & + & \cdots & + & a_{pp} \cdot u_p \\ v_{p+1} & = & a_{p+11} \cdot u_1 & + & \cdots & + & a_{p+1p} \cdot u_p. \end{array}\right.$$

Si $a_{i1} = 0$ pour $i \in [\![1, p+1]\!]$ alors les p vecteurs $v_1, \ldots, v_p$, combinaisons linéaires des $p - 1$ vecteurs $u_2, \ldots, u_p$, sont linéairement dépendants par l'hypothèse de récurrence ; *a fortiori*, $v_1, \ldots, v_{p+1}$ sont aussi linéairement dépendants.

Sinon, il existe $i \in [\![1, p+1]\!]$ tel que $a_{i1} \neq 0$. Quitte à permuter des indices, on peut supposer $a_{11} \neq 0$. Dès lors,

$$u_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left(v_1 - (a_{12} \cdot u_2 + \cdots + a_{1p} \cdot u_p)\right).$$

En substituant cette expression de u_1 dans $v_2, \ldots, v_{p+1}$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} v_2 & = & b_{21} \cdot v_1 & + & b_{22} \cdot u_2 & + & \cdots & + & b_{2p} \cdot u_p \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\ v_p & = & b_{p1} \cdot v_1 & + & b_{p2} \cdot u_2 & + & \cdots & + & b_{pp} \cdot u_p \\ v_{p+1} & = & b_{p+11} \cdot v_1 & + & b_{p+12} \cdot u_2 & + & \cdots & + & b_{p+1p} \cdot u_p, \end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} w_2 = v_2 - b_{21} \cdot v_1 & = & b_{22} \cdot u_2 & + & \cdots & + & b_{2p} \cdot u_p \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ w_p = v_p - b_{p1} \cdot v_1 & = & b_{p2} \cdot u_2 & + & \cdots & + & b_{pp} \cdot u_p \\ w_{p+1} = v_{p+1} - b_{p+11} \cdot v_1 & = & b_{p+12} \cdot u_2 & + & \cdots & + & b_{p+1p} \cdot u_p. \end{array}\right.$$

Les p vecteurs $w_2, \ldots, w_{p+1}$ sont combinaison linéaire des $p - 1$ vecteurs $u_2, \ldots, u_p$. L'hypothèse de récurrence (*hérédité*) entraîne donc que les vecteurs $w_2, \ldots, w_{p+1}$ sont linéairement dépendants. Par conséquent, il existe $\lambda_2, \ldots, \lambda_{p+1} \in \mathbf{K}$, non tous nuls, tels que

$$\lambda_2 \cdot w_2 + \cdots + \lambda_{p+1} \cdot w_{p+1} = 0.$$

Autrement dit,

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_{p+1} \cdot v_{p+1} = 0$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p+1}$ non tous nuls.

On déduit de i et ii : quel que soit $p \in \mathbf{N}^*$, $v_1, \ldots, v_{p+1}$ combinaison linéaire de p vecteurs entraîne $v_1, \ldots, v_{p+1}$ linéairement dépendants.

Théorème 1.10.2 Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments.

Dém. Soient $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ deux bases de E. Comme $\mathcal{F}$ est génératrice de E, les e_i sont combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{E}$ est une famille libre, il résulte du lemme précédent que $n < p + 1$ *i. e.* $n \leqslant p$. En inversant les rôles de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, on obtient, $p \leqslant n$. D'où $n = p$.

Définition 1.10.3 La *dimension* d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{K}$ est le cardinal (*i. e.* nombre d'éléments) d'une base ; la dimension de l'espace vectoriel E est notée $\dim_{\mathbf{K}} E$ (ou $\dim E$ si aucune confusion n'est à craindre).

Exemple 1.10.4 L'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$ (sur $\mathbf{K}$) a une base à n éléments. Donc $\dim_{\mathbf{K}} \mathbf{K}^n = n$.

Remarque 1.10.5 Si un espace vectoriel de dimension finie n'est pas réduit à $\{0\}$ alors il contient un vecteur non nul u_1, donc admet des bases $(u_1, \dots, u_n)$ d'après le théorème de la base incomplète. Par suite, $\dim E > 0 \Leftrightarrow E \neq \{0\}$.

Théorème 1.10.6 Tout espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{K}$ est isomorphe à $\mathbf{K}^n$.

Dém. Soient $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E et $\mathcal{C}_n$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. D'après le point 4 du théorème 1.8.6, il existe un isomorphisme φ (et un seul) de E sur $\mathbf{K}^n$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(f_i) = e_i$ où e_i désigne le i–ème vecteur de la base $\mathcal{C}_n$.

Remarque 1.10.7 À isomorphisme près, il existe donc un unique espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{K}$.

Théorème 1.10.8 Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Soient $u_1, \dots, u_p$ des vecteurs engendrant E. Alors $p \geqslant n$. De plus, si $p = n$ alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.
2. Soient $u_1, \dots, u_q$ des vecteurs linéairement indépendants. Alors $q \leqslant n$. De plus, si $q = n$ alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

Dém.

1. D'après le corollaire 1.9.3, on peut extraire de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ une base de E. Or, une base de E possède n éléments, donc $p \geqslant n$. De plus, si $p = n$ alors comme une base possède exactement n éléments, $(u_1, \dots, u_n)$ est (déjà) une base de E.
2. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(u_1, \dots, u_q)$ en une base $\mathcal{B}$ (de cardinal n) de E, donc $q \leqslant n$. De plus, si $q = n$ alors la base $\mathcal{B}$ obtenue par complétion possédant exactement n éléments, on obtient $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$.

Remarque 1.10.9 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Le théorème précédent affirme notamment qu'une famille génératrice possède au moins n vecteurs et qu'une famille libre au plus n éléments.

Théorème 1.10.10 Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. F est de dimension finie.
2. $\dim F \leqslant \dim E$.
3. Si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Dém.

1. Soit $(u_1, \dots, u_q)$ une famille libre de (vecteurs de) F : c'est aussi une famille libre de E donc $q \leqslant n$, est fini. Considérons donc une famille libre maximale de F, $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$. De même que précédemment, $p \leqslant n$. Maintenant, soit $v \in F$. Si $v \notin < u_1, \dots, u_p >$ alors $(u_1, \dots, u_p, v)$ est une famille libre de F. Or $\mathcal{F}$ est maximale ; c'est absurde. Donc $(u_1, \dots, u_p)$ est aussi génératrice de F, qui par suite est de dimension finie.
2. Comme la famille maximale $\mathcal{F}$ du point 1 est une base de F, $\dim F = card(\mathcal{F}) = p \leqslant n = \dim E$.
3. On a $\dim F = \dim E$ *i. e.* $p = n$. Dès lors, $\mathcal{F}$ est une famille libre de E de cardinal n, c'est donc une base de E. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est génératrice de E et $E \subseteq F$. Comme $F \subseteq E$, on obtient $F = E$.

Définition 1.10.11 Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un sous-espace vectoriel de dimension 1 est une *droite*. Un sous-espace vectoriel de dimension 2 est un *plan*. Un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ est un *hyperplan*.

Exemple 1.10.12 Dans l'espace ordinaire muni d'une origine O, les sous-espaces vectoriels peuvent être de dimension 0, 1, 2 et 3. Le seul sous-espace vectoriel de dimension 0 est $\{0\}$. Ceux de dimension 1 sont les droites passant par O, ceux de dimension 2 sont les plans passant par O. Le seul de dimension 3 est E.

Théorème 1.10.13 Soit E un espace vectoriel somme directe de sous-espaces vectoriels E_1, E_2, $\dots, E_p$. Si les E_i sont de dimension finie alors E est de dimension finie et

$$\dim E = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p.$$

Dém. Soient $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ des bases de $E_1, \dots, E_p$ respectivement. Alors la « concaténation » de ces bases est une base de E (d'après le théorème 1.8.7) de cardinal $\dim E_1 + \cdots + \dim E_p$, d'où le résultat.

Théorème 1.10.14 Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sous-espace vectoriel de dimension p.

1. F admet au moins un sous-espace vectoriel supplémentaire.
2. Tout sous-espace vectoriel supplémentaire de F est de dimension $n-p$.

Dém.

1. Soit $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Si $p = n$ alors posons $G = \{0\}$. Sinon, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $e_1, \dots, e_{n-p} \in E$ tels que $(f_1, \dots, f_p, e_1, \dots, e_{n-p})$ soit une base de E ; posons $G = vect(e_1, \dots, e_{n-p})$. Alors $F \oplus G = E$ (d'après le théorème 1.8.8).
2. Soit G un sous-espace vectoriel supplémentaire quelconque de F dans E ; il est de dimension finie. D'après le théorème précédent, $\dim E = \dim F + \dim G$. D'où, $\dim G = n - p$.

1.11 Rang d'une application linéaire

Théorème 1.11.1 (du rang) Soient E, F des $\mathbf{K}$−espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire ; on suppose que E est de dimension finie n. Alors

$$\dim E = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi.$$

Dém. Comme E est de dimension finie, le noyau $\ker\varphi$ admet un sous-espace vectoriel supplémentaire J dans E. Notons $\psi : J \to \operatorname{im}\varphi$ l'application définie par $\psi(u) = \varphi(u)$ quel que soit $u \in J$ (ψ est la restriction $\varphi_{|J}$ considérée à valeurs dans $\operatorname{im}\varphi$). Comme $E = \ker\varphi + J$, on a $\psi(J) = \varphi(J) = \varphi(\ker\varphi + J) = \varphi(E) = \operatorname{im}\varphi$, donc ψ est surjective. D'autre part, si $u, v \in J$ sont tels que $\psi(u) = \psi(v)$ alors $\psi(u-v) = \varphi(u-v) = 0$. Donc $u - v \in J \cap \ker\varphi = \{0\}$ d'où $u - v = 0$ *i. e.* $u = v$. Ainsi, ψ est aussi injective. L'application ψ réalise donc un isomorphisme de J sur $\operatorname{im}\varphi$.
Dès lors, $\operatorname{im}\varphi$ est de dimension finie (car J l'est) et $\dim\operatorname{im}\varphi = n - \dim\ker\varphi$ ou encore

$$\dim E = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi.$$

Définition 1.11.2 Soient E, F des $\mathbf{K}$−espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Le *rang de* φ est la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{im}\varphi$; on note $\operatorname{rg}\varphi = \dim\operatorname{im}\varphi$.

Théorème 1.11.3 Soient E, F des $\mathbf{K}$−espaces vectoriels et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Alors

$$\ker\varphi = \{0\} \Leftrightarrow \varphi \text{ injective.}$$

Dém.
($\Rightarrow$) Soient $u, v \in E$ tels que $\varphi(u) = \varphi(v)$. Alors $\varphi(u-v) = 0$. Or, $\ker\varphi = \{0\}$, d'où $u-v = 0$ *i. e.* $u = v$. Donc φ est injective.
($\Leftarrow$) Comme $\varphi(0) = 0$, φ injective entraîne $\ker\varphi = \{0\}$.

Théorème 1.11.4 Soient E, F des $\mathbf{K}$−espaces vectoriels de dimension finie, $\varphi : E \to F$ une application linéaire et $\rho = \operatorname{rg}\varphi$.

1. On a $\rho \leqslant \dim E$ et $\rho \leqslant \dim F$.
2. Pour que $\rho = \dim E$, il faut et il suffit que φ soit injective.
3. Pour que $\rho = \dim F$, il faut et il suffit que φ soit surjective.

Dém.

1. Comme $\rho = \dim E - \dim\ker\varphi$ d'après le théorème du rang, $\rho \leqslant \dim E$. Par ailleurs, comme $\operatorname{im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F, $\rho \leqslant \dim F$.
2. $\rho = \dim E \Leftrightarrow \dim\ker\varphi = 0$ d'après le théorème du rang. Or, $\dim\ker\varphi = 0 \Leftrightarrow \ker\varphi = \{0\} \Leftrightarrow \varphi$ injective.
3. Comme $\operatorname{im}\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F, la condition $\rho = \dim F$ est équivalente à $F = \operatorname{im}\varphi$ *i. e.* φ est surjective.

Corollaire 1.11.5 Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\varphi : E \to E$ une application linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. φ est un automorphisme de E ;
2. φ est injective ;
3. φ est surjective ;
4. φ est de rang n ;
5. il existe une application linéaire $\psi : E \to E$ telle que $\varphi \circ \psi = id_E$;
6. il existe une application linéaire $\psi : E \to E$ telle que $\psi \circ \varphi = id_E$;

En outre, si l'une de ces conditions est remplie alors $\psi = \varphi^{-1}$.

Dém.
$(1 \Rightarrow 2)$ un automorphisme étant bijectif, φ est injective.
$(2 \Rightarrow 3)$ D'après le théorème précédent, φ injective $\Leftrightarrow \operatorname{rg}\varphi = \dim E$. Or, $\operatorname{rg}\varphi = \dim E \Leftrightarrow \varphi$ surjective, à nouveau par le théorème précédent.
$(3 \Rightarrow 4)$ φ surjective $\Rightarrow \operatorname{rg}\varphi = \dim E = n$.
$(4 \Rightarrow 5)$ Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Comme φ est de rang n, la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est génératrice de E et de cardinal $n = \dim E$ donc en est une base ; posons $e'_i = \varphi(e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$. Considérons l'application linéaire $\psi : E \to E$ définie par $\psi(e'_i) = e_i$, $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $\mathcal{E}'$ est une base de E, ψ est bien définie. De plus, par construction, $\varphi \circ \psi(e'_i) = \varphi(e_i) = e'_i$, $i \in [\![1, n]\!]$. Donc l'application $\varphi \circ \psi$ est l'unique application linéaire envoyant la base $\mathcal{E}'$ sur elle-même ; ainsi, $\varphi \circ \psi = id_E$.
$(5 \Rightarrow 6)$ Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Comme $\varphi \circ \psi = id_E$, ψ est injective. Par conséquent, $\mathcal{E}' = (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n))$ est une famille libre de E de cardinal n, c'est donc une base de E. D'autre part, $(\psi \circ \varphi)(\psi(e_i)) = \psi \circ \varphi \circ \psi(e_i) = \psi \circ (\varphi \circ \psi)(e_i) = \psi \circ id_E(e_i) = \psi(e_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Autrement dit, $\psi \circ \varphi$ est l'unique application linéaire de E dans E envoyant la base $\mathcal{E}'$ sur $\mathcal{E}'$. Il s'ensuit que $\psi \circ \varphi = id_E$.
$(6 \Rightarrow 1)$ Comme $\psi \circ \varphi = id_E$, φ est injective. Par suite, la famille $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ est une famille libre de E, de cardinal $n = \dim E$. C'est donc une base de E. Par conséquent, φ est un isomorphisme de E sur E ; autrement dit, un automorphisme de E.

Comme φ est inversible, on obtient, en composant par φ^{-1} à gauche dans l'égalité du point 5 : $\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi = \varphi^{-1} \circ id_E = \varphi^{-1}$, d'où $\psi = \varphi^{-1}$.

Remarque 1.11.6

1. Plus généralement, dès que $\dim E = \dim F$, pour que $\varphi : E \to F$ soit un isomorphisme il faut et il suffit qu'il existe $\psi : F \to E$ telle que $\varphi \circ \psi = id_F$ **ou** $\psi \circ \varphi = id_E$ (ψ est donc nécessairement linéaire).
2. Le rang de φ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de E. En effet, pour que $v \in \operatorname{im}\varphi$ il faut et il suffit qu'il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) = v$. Or, $u = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_n \cdot e_n$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ (uniques). Ainsi, $v \in \operatorname{im}\varphi$ si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $v = \lambda_1 \cdot \varphi(e_1) + \cdots + \lambda_n \cdot \varphi(e_n)$ *i. e.* $\operatorname{rg}\varphi = \dim < \varphi(e_1), \dots \varphi(e_n) >= \dim \operatorname{im}\varphi$.
3. Enfin, le rang de φ est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants que l'on peut extraire de la famille génératrice $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$.

1.12 L'espace vectoriel $L(E, F)$

Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$. On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications $\mathbf{K}$−linéaires de E dans F.

1.12.1 Addition dans $L(E, F)$

Soient φ, ψ dans $L(E, F)$. Définissons une application $\varphi + \psi$ de E dans F en posant, pour tout $u \in E$,

$$(\varphi + \psi)(u) := \varphi(u) + \psi(u).$$

Montrons que $\varphi + \psi \in L(E, F)$.

Si $u, v \in E$ alors

$$(\varphi + \psi)(u + v) = \varphi(u + v) + \psi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) + \psi(u) + \psi(v) = (\varphi + \psi)(u) + (\varphi + \psi)(v).$$

Si $u \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ alors

$$(\varphi + \psi)(\lambda \cdot u) = \varphi(\lambda \cdot u) + \psi(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \varphi(u) + \lambda \cdot \psi(u) = \lambda \cdot (\varphi + \psi)(u).$$

Cette addition fait de $L(E, F)$ un *groupe commutatif.*

1.12.2 Multiplication par un scalaire dans $L(E, F)$

Soient $\varphi \in L(E, F)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Définissons une application $\lambda \cdot \varphi$ dans $L(E, F)$ en posant, pour tout $u \in E$,

$$(\lambda \cdot \varphi)(u) := \lambda \cdot \varphi(u).$$

Montrons que $\lambda \cdot \varphi \in L(E, F)$.
Si $u, v \in E$ alors

$$(\lambda \cdot \varphi)(u + v) = \lambda \cdot \varphi(u + v) = \lambda \cdot \varphi(u) + \lambda \cdot \varphi(v) = (\lambda \cdot \varphi)(u) + (\lambda \cdot \varphi)(v).$$

Si $u \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ alors

$$(\lambda \cdot \varphi)(\mu \cdot u) = \lambda \cdot (\varphi(\mu \cdot u)) = \lambda \cdot (\mu \cdot \varphi(u)) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \varphi(u) = (\mu \cdot \lambda) \cdot \varphi(u) = \mu \cdot (\lambda \cdot \varphi)(u).$$

On vérifie que ces deux lois sont compatibles et définissent une structure de $\mathbf{K}$−espace vectoriel sur $L(E, F)$.

Remarque 1.12.1 On a déja vu que la composée de 2 applications linéaires (à domaine compatible) est encore une application linéaire.
Si $F = E$ alors l'espace vectoriel $L(E, E)$ aussi noté $L(E)$, est muni d'une seconde loi de composition interne, la composition des applications notée $\circ$ de telle sorte que si $\varphi, \psi \in L(E)$ alors $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi \in L(E)$; cette composition n'est pas commutative en général.
Cette loi admet un élément neutre qui n'est autre que l'*application identité* de E dans E, id_E ; $\varphi \circ id_E = id_E \circ \varphi = \varphi$.
Cette loi, compatible avec l'addition et la multiplication externe de $L(E)$, fait de $L(E)$ une $\mathbf{K}$−algèbre.

Chapitre 2

Matrices

2.1 Définition

On appelle *matrice* à éléments dans $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbf{K}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

La matrice écrite comporte n *lignes* et m *colonnes* ; elle est *de type* (n, m) ; a_{11}, a_{12}, ..., a_{nm} s'appellent les *coefficients* de la matrice ; a_{ij} se trouve sur la i−ième ligne et j−ième colonne. Une notation condensée de cette matrice est :

$$(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$$

ou plus simplement (a_{ij}) si aucune confusion n'est à craindre. L'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes et éléments dans $\mathbf{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, ou $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ si $m = n$.

Remarque 2.1.1

1. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ alors la matrice est *réelle* ; si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ alors la matrice est *complexe*.
2. Si $m = n$ alors la matrice est *carrée* et n est l'*ordre* d'une telle matrice ; les éléments a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} forment la *diagonale principale* de la matrice carrée.
3. Une matrice carrée est *diagonale* si tous les éléments situés hors de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
4. Une matrice carrée (a_{ij}) est *triangulaire inférieure* (resp. *supérieure*) si tous les coefficients situés au-dessus (resp. en-dessous) de la diagonale principale sont nuls, c'est-à-dire $a_{ij} = 0$ si $i < j$ (resp. $i > j$).
5. Une matrice carrée est *symétrique* si $a_{ij} = a_{ji}$ quels que soient i et j.

2.2 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{K}$, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F et $\varphi \in L(E, F)$. On peut résumer la situation à l'aide d'un diagramme :

$$\overset{\mathcal{E}}{E} \xrightarrow{\varphi} \overset{\mathcal{F}}{F}.$$

Définition 2.2.1 La *matrice* (représentative) de φ *relativement/par rapport* aux bases $(e_1, \ldots, e_m)$ de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ de F est la matrice de type (n, m) dont la j−ième colonne est constituée des coordonnées de $\varphi(e_j)$ dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$; on la note

$$mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = mat(\varphi, (e_1, \ldots, e_m), (f_1, \ldots, f_n)).$$

Autrement dit, si l'on désigne par (a_{ij}) cette matrice, on a :

$$\varphi(e_j) = a_{1j} \cdot f_1 + \cdots + a_{nj} \cdot f_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$

et

$$mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.2.2 Si $F = E$ et $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ alors on note simplement $mat(\varphi, \mathcal{E})$.

Exemple 2.2.3 Dans le plan ordinaire, soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les deux vecteurs d'une base orthonormée directe. Soit r_θ la rotation de centre 0 et d'angle θ ; c'est une application linéaire. Alors, $r_\theta(\vec{i}) = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$ et $r_\theta(\vec{j}) = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$ d'où :

$$mat(r_\theta, (\vec{i}, \vec{j})) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}).$$

Théorème 2.2.4 Pour tout φ dans $L(E, F)$, soit $mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ la matrice correspondante. L'application $\varphi \mapsto mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ est une application bijective de $L(E, F)$ sur l'ensemble des matrices de type (n, m) à éléments dans $\mathbf{K}$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.

Dém. Si φ, $\psi \in L(E, F)$ sont tels que $mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = mat(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ alors pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, $\varphi(e_j) = \psi(e_j)$. Comme une application linéaire est entièrement déterminée par son image sur une base, $\varphi = \psi$. Donc $\varphi \mapsto mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ est injective.
Soit $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. Pour tout $j \in [\![1, m]\!]$, posons $\varphi(e_j) = a_{1j} \cdot f_1 + \cdots + a_{nj} \cdot f_n$. Ceci définit une unique application linéaire φ de E dans F qui vérifie $mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$. D'où la surjectivité de $\varphi \mapsto mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Remarque 2.2.5 Dès que l'on a fixé une base de la source (E) et du but (F), on peut dire qu'une application linéaire est *repérée* par sa matrice relativement à ces bases, comme les vecteurs sont repérés par leurs coordonnées.

Théorème 2.2.6 Soient $\varphi \in L(E, F)$ et $mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ sa matrice par rapport aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Si u est un vecteur de E de composantes $x_1, \ldots, x_m$ par rapport à la base $\mathcal{E}$, les composantes $y_1, \ldots, y_n$ de $\varphi(u)$ par rapport à la base $\mathcal{F}$ sont :

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m. \end{aligned}$$

Dém. Comme $u = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot e_j = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_m \cdot e_m$, on obtient $\varphi(u) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \varphi(e_j) = x_1 \cdot \varphi(e_1) + \cdots + x_m \cdot \varphi(e_m)$. Donc

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot f_i \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \cdot f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right) \cdot f_i.\end{aligned}$$

Le coefficient de f_i dans cette somme est donc

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{im} x_m$$

c'est-à-dire la i–ième composante y_i de $\varphi(u)$ dans la base $\mathcal{F}$. D'où le résultat.

Exemple 2.2.7 Reprenons l'exemple précédent. Soit $u = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$. Alors les composantes x', y' de $r_\theta(u)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ sont données par

$$x' = \cos\theta x - \sin\theta y$$

$$y' = \sin\theta x + \cos\theta y.$$

Dans ce qui précède, nous sommes partis d'une application linéaire, et nous lui avons associé une matrice. Partons cette fois d'une matrice $A = (a_{ij})$ à n lignes et m colonnes et éléments dans $\mathbf{K}$. Alors, d'après le théorème 2.2.4, A est la matrice d'une application linéaire φ bien déterminée de $\mathbf{K}^m$ dans $\mathbf{K}^n$ relativement aux bases canoniques de $\mathbf{K}^m$ et $\mathbf{K}^n$. On dit que φ est l'application linéaire *associée* à la matrice A.

Définition 2.2.8 Le *rang* de la matrice A est le rang de l'application linéaire associée φ ; il est noté $\operatorname{rg} A$.

Remarque 2.2.9 C'est un entier $r \geqslant 0$ tel que $r \leqslant m$ et $r \leqslant n$. C'est aussi le nombre maximal de colonnes de A linéairement indépendantes (chaque colonne de A étant considérée comme un vecteur de $\mathbf{K}^n$).

Théorème 2.2.10 Soient E, F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F et $\varphi \in L(E, F)$. Soit $A = mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$. Alors le rang de φ est égal au rang de A.

Dém. Notons $\mathcal{C}_m = (e'_1, \ldots, e'_m)$ la base canonique de $\mathbf{K}^m$ et $\mathcal{C}_n = (f'_1, \ldots, f'_n)$ celle de $\mathbf{K}^n$. Soit $\psi : \mathbf{K}^m \to \mathbf{K}^n$ l'application linéaire associée à A. Soit ω l'isomorphisme $F \xrightarrow{\omega} \mathbf{K}^n$ qui transforme f_1 en f'_1, $\ldots$, f_n en f'_n. On a :

$$\omega(\varphi(e_j)) = \omega(a_{1j} \cdot f_1 + \cdots + a_{nj} \cdot f_n) = a_{1j} \cdot f'_1 + \cdots + a_{nj} \cdot f'_n = \psi(e'_j), \ 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Donc la restriction de ω à $\varphi(E)$ est une application linéaire injective de $\varphi(E)$, sous-espace vectoriel de F engendré par $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_m)$, sur $\psi(K^m)$, sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^n$ engendré par $\psi(e'_1), \ldots, \psi(e'_m)$. Donc les espaces vectoriels $\varphi(E)$ et $\psi(\mathbf{K}^m)$ sont isomorphes. Par suite, leurs dimensions sont égales. Or ces dimensions sont respectivement $\operatorname{rg}\varphi$ et $\operatorname{rg} A$.

2.3 Opérations sur les matrices

On va déduire des opérations sur les matrices de celles provenant des applications linéaires.

2.3.1 Addition de matrices

Soient E, F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $\varphi, \psi \in L(E, F)$; soient $A = mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})$, $B = mat(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (b_{ij})$ et $C = mat(\varphi + \psi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (c_{ij})$. On a, quel que soit $j \in [\![1, m]\!]$:

$$\begin{aligned}(\varphi + \psi)(e_j) &= \varphi(e_j) + \psi(e_j) = a_{1j} \cdot f_1 + \dots + a_{nj} \cdot f_n + b_{1j} \cdot f_1 + \dots + b_{nj} \cdot f_n \\ &= (a_{1j} + b_{1j}) \cdot f_1 + \dots + (a_{nj} + b_{nj}) \cdot f_n.\end{aligned}$$

Donc $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Définition 2.3.1 Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. La *somme* de A et de B, notée $A + B$ est la matrice $(a_{ij} + b_{ij})$ qui est aussi de type (n, m) à coefficients dans $\mathbf{K}$.

Exemple 2.3.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{Q})$ (par exemple).

Proposition 2.3.3 Soient E, F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $\varphi, \psi \in L(E, F)$. Alors

$$mat(\varphi + \psi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) + mat(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

2.3.2 Produit d'une matrice par un scalaire

Conservons les notations précédentes. Soit $\lambda \in \mathbf{K}$.
Posons $D = (d_{ij}) = mat(\lambda \cdot \varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$. On a, quel que soit $j \in [\![1, m]\!]$:

$$(\lambda \cdot \varphi)(e_j) = \lambda \cdot \varphi(e_j) = \lambda a_{1j} \cdot f_1 + \dots + \lambda a_{nj} \cdot f_n$$

Donc $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Définition 2.3.4 Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. On note λA la matrice (λa_{ij}) de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ obtenue en multipliant tous les éléments de A par λ.

Exemple 2.3.5

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{Q})$.

Proposition 2.3.6 Soient E, F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F, $\varphi \in L(E, F)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$mat(\lambda \cdot \varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = \lambda mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

2.3.3 Produit de deux matrices

Soient E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F, $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_p)$ une base de G et $\psi \in L(E, F)$, $\varphi \in L(F, G)$. C'est-à-dire :

$$\overset{\mathcal{E}}{E} \overset{\psi}{\to} \overset{\mathcal{F}}{F} \overset{\varphi}{\to} \overset{\mathcal{G}}{G}.$$

Soient $A = mat(\varphi, \mathcal{F}, \mathcal{G}) = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, $B = mat(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et $C = mat(\varphi \circ \psi, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbf{K})$. On a, quel que soit $j \in [\![1, m]\!]$:

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(e_j) = \varphi(\psi(e_j)) = \varphi(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} \cdot f_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \cdot \varphi(f_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} \sum_{i=1}^{p} a_{ik} \cdot g_i \\ = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) \cdot g_i\end{aligned}$$

donc, pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant m$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Définition 2.3.7 Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. On note $AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbf{K})$ définit par le *produit matriciel* dont les coeffcients sont, quels que soient $i \in [\![1, p]\!]$ et $j \in [\![1, m]\!]$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Remarque 2.3.8

1. La formule a un sens du fait que le nombre de colonnes de A est égale au nombre de lignes de B. L'élément c_{ij} s'obtient donc en multipliant la ligne d'indice i de A par la colonne d'indice j de B ; on effectue le produit AB ligne par colonne.
2. Si A est de type (p, n) et B de type (n', m) avec $n \neq n'$ alors le produit AB n'a pas de sens.

Exemple 2.3.9

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}}^{\in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{Q})} \overbrace{\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}}^{\in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbf{Q})} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 9 + 3 \times (-3) & -6 & -10 & -14 \\ 65 & 24 & 23 & 22 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbf{Q})$$

Proposition 2.3.10 Soient E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F, $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_p)$ une base de G et $\psi \in L(E, F)$, $\varphi \in L(F, G)$. Alors

$$mat(\varphi \circ \psi, \mathcal{E}, \mathcal{G}) = mat(\varphi, \mathcal{F}, \mathcal{G}) mat(\psi, \mathcal{E}, \mathcal{F}).$$

Les propriétés des lois de composition pour les applications linéaires entraînent des propriétés pour les lois de composition des matrices. En particulier :

1. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$−espace vectoriel. L'application $L(E,F) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ qui a $\varphi \in L(E,F)$ associe $mat(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F})$ est un isomorphisme. Le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ est la matrice de l'application nulle, c'est-à-dire la matrice dont tous les coefficients sont nuls (que l'on note 0). Si $A = (a_{ij})$ est une matrice de type (n,m), on note $-A$ la matrice $(-a_{ij})$ telle que $A + (-A) = (-A) + A = 0$ et on l'appelle l'*opposée* de A. On a $mat(-\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F}) = -mat(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{F})$.
2. La composition des applications étant associative, on a :

$$A(BC) = (AB)C$$

   dès que le produit a un sens.
3. Toujours d'après la « distributivité» de la composition sur l'addition entre applications linéaires :

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (A+B)C = AC + BC.$$

2.4 Matrices carrées

Soient E un $\mathbf{K}$−espace vectoriel et $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour tout $\varphi \in L(E)$, soit $mat(\varphi,\mathcal{E}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice (carrée ici) représentative de φ dans la base $\mathcal{E}$. Comme $L(E)$ est un anneau (en fait une $\mathbf{K}$−algèbre) muni de la composition des applications, le paragraphe précédent montre que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est aussi un anneau (muni du produit matriciel) et l'application $L(E) \ni \varphi \overset{\Phi}{\mapsto} mat(\varphi,\mathcal{E}) := mat(\varphi,\mathcal{E},\mathcal{E}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un isomorphisme de $L(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $\Phi(\varphi \circ \psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$ pour tout $\varphi,\psi \in L(E)$. En général, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ n'est pas commutatif (non plus).
Comme Φ envoie id_E sur l'élément neutre de la multiplication matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, la matrice

$$mat(id_E,\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est l'élément neutre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Définition 2.4.1 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la *matrice identité* ou *unité* de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Remarque 2.4.2 La matrice I_n vérifie donc :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ I_n A = A I_n = A.$$

Comme l'application $L(E) \ni \varphi \overset{\Phi}{\mapsto} mat(\varphi, \mathcal{E}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un isomorphisme, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice d'un (et même un seul) endomorphisme φ de E avec $\mathcal{E}$ fixée (on peut même choisir $E = \mathbf{K}^n$).

Proposition 2.4.3 Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\varphi \in L(E)$. La matrice représentative de φ relativement à $\mathcal{E}$ est diagonale si et seulement si φ envoie chaque $< e_j >$ dans $< e_j >$. Autrement dit :

$$mat(\varphi, \mathcal{E}) \text{ diagonale } \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], \varphi(< e_j >) \subseteq < e_j > .$$

Dém. En effet,

$$\begin{aligned} \Delta = mat(\varphi, \mathcal{E}) \text{ diagonale } &\Leftrightarrow (\forall j \in [\![1, n]\!])(\exists a_j \in \mathbf{K}), \Delta = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (\forall j \in [\![1, n]\!])(\exists a_j \in \mathbf{K}), \varphi(e_j) = a_j \cdot e_j \\ &\Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], \varphi(< e_j >) \subseteq < e_j > . \end{aligned}$$

Remarque 2.4.4 Ainsi, la matrice représentative de φ est diagonale si et seulement si φ transforme chaque e_j en un vecteur proportionnel.

Corollaire 2.4.5 La somme et le produit de deux matrices diagonales (du même ordre) sont des matrices diagonales.

Dém. On reprend les notations de la proposition 2.4.3. Soient $\varphi, \psi \in L(E)$ tels que $\Delta_\varphi = mat(\varphi, \mathcal{E})$ et $\Delta_\psi = mat(\psi, \mathcal{E})$ soient diagonale. Alors, d'après la proposition 2.4.3,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], (\varphi + \psi)(< e_j >) \subseteq \varphi(< e_j >) + \psi(< e_j >) \subseteq < e_j > .$$

Ainsi,

$$\Delta_\psi + \Delta_\phi = mat(\varphi + \psi, \mathcal{E}) \text{ est diagonale.}$$

De même,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \varphi \circ \psi(< e_j >) \subseteq \varphi(< e_j >) \subseteq < e_j >$$

de sorte que $\Delta_\varphi \Delta_\psi = mat(\varphi \circ \psi, \mathcal{E})$ est diagonale.

Remarque 2.4.6 Au passage, si Δ_1 et Δ_2 sont diagonales (du même ordre) alors

$$\Delta_1 \Delta_2 = \Delta_2 \Delta_1.$$

Définition 2.4.7 Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{K}$. La matrice diagonale

$$aI_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

est une matrice *scalaire*.

Remarque 2.4.8

1. Une matrice scalaire correspond à l'homothétie de E dans E de rapport a, $h_a = a \cdot id_E$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a $(aI_n)A = A(aI_n) = aA$; de plus, $(a+b)I_n = aI_n + bI_n$ et $(ab)I_n = (aI_n)(bI_n)$.
3. C'est pourquoi, on commet quelquefois l'abus de notation « a » au lieu de « aI_n » pour désigner une matrice scalaire.

Proposition 2.4.9 Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\varphi \in L(E)$. Posons $E_j =< e_j, \ldots, e_n >$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$.
La matrice représentative de φ est triangulaire inférieure si et seulement si φ envoie chaque E_j dans E_j.
Autrement dit :

$$mat(\varphi, \mathcal{E}) \text{ triangulaire inférieure } \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ \varphi(E_j) \subseteq E_j.$$

Dém. En effet,

$$\begin{aligned} mat(\varphi, \mathcal{E}) \text{ triangulaire inférieure } &\Leftrightarrow (\forall j \in [\![1, n]\!])(\exists (a_{ij})_{j \leqslant i \leqslant n} \subset \mathbf{K}), \varphi(e_j) = a_{jj} \cdot e_j + \cdots + a_{nj} \cdot e_n \\ &\Leftrightarrow (\forall j \in [\![1, n]\!])(\forall u \in E_j), \varphi(u) \in E_j \\ &\Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], \varphi(E_j) \subseteq E_j. \end{aligned}$$

Corollaire 2.4.10 La somme et le produit de deux matrices triangulaires inférieures (du même ordre) sont des matrices triangulaires inférieures.

Dém. On reprend les notations de la proposition 2.4.9. Soient $\varphi, \psi \in L(E)$ tels que $T_\varphi = mat(\varphi, \mathcal{E})$ et $T_\psi = mat(\psi, \mathcal{E})$ soient triangulaires inférieures. Alors, d'après la proposition 2.4.9,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], (\varphi + \psi)(E_j) \subseteq \varphi(E_j) + \psi(E_j) \subseteq E_j.$$

Ainsi,

$$T_\varphi + T_\psi = mat(\varphi + \psi, \mathcal{E}) \text{ est triangulaire inférieure.}$$

De même,

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \varphi \circ \psi(E_j) \subseteq \varphi(E_j) \subseteq E_j$$

de sorte que $T_\varphi T_\psi = mat(\varphi \circ \psi, \mathcal{E})$ est triangulaire inférieure.

Remarque 2.4.11

1. La matrice représentative de φ est triangulaire inférieure si et seulement si φ transforme chaque e_j en une combinaison linéaire des e_i avec $i \geqslant j$.
2. On a un résultat analogue pour les matrices triangulaires supérieures.

2.5 Matrices lignes, matrices colonnes

Définition 2.5.1 Une *matrice ligne* est une matrice qui comporte une seule ligne ; une *matrice colonne* est une matrice qui n'a qu'une seule colonne.

Exemple 2.5.2

1. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne (et à 3 colonnes) tandis que $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne (et à 2 lignes).
2. Soient u un vecteur de E et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $u = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n \cdot e_n$ où $x_1, \dots, x_n$ désignent les composantes (uniques) de u dans la base $\mathcal{E}$. La matrice colonne des composantes de u dans la base $\mathcal{E}$ est :
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
3. Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\varphi \in L(E, \mathbf{K})$; c'est une *forme linéaire* sur E. Munissons $\mathbf{K}$ de sa base canonique (1). Alors
$$mat(\varphi, (e_1, \dots, e_n), (1)) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$
est une matrice ligne où $a_i = \varphi(e_i)$.

Proposition 2.5.3 Soient E, F des espaces vectoriels sur $\mathbf{K}$, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E, $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F, $\varphi \in L(E, F)$ (c'est-à-dire $\overset{\mathcal{E}}{E} \xrightarrow{\varphi} \overset{\mathcal{F}}{F}$), $u \in E$ et $v \in F$. Alors

$$\begin{aligned} & v = \varphi(u) \\ \Leftrightarrow & Y = AX \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_m \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des composantes du vecteur u dans $\mathcal{E}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est la matrice colonne des composantes du vecteur v dans $\mathcal{F}$ et $A = mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$.

Dém. En effet, d'apès le théorème 2.2.6 qui décrit les composantes de $v = \varphi(u)$ dans $\mathcal{F}$ en fonction de celles de u dans $\mathcal{E}$, on a :

$$
\begin{aligned}
&v = \varphi(u)\\
\Leftrightarrow &\begin{cases} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow &Y = AX.
\end{aligned}
$$

2.6 Transposée d'une matrice

Définition 2.6.1 Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$ une matrice de type (n, m). La *transposée* de A, notée ${}^tA$, est la matrice $(\alpha_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ de type (m, n) définie par $\alpha_{ij} = a_{ji}$ pour $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$.

Remarque 2.6.2 Pour obtenir ${}^tA$ à partir de A, il suffit de permuter lignes et colonnes de A.

Exemple 2.6.3

$$
{}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.
$$

Proposition 2.6.4

1. $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \Rightarrow {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.
2. $(A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}))(\lambda \in \mathbf{K}) \Rightarrow {}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$.
3. $(A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}))(B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})) \Rightarrow {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.
4. $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \Rightarrow {}^t({}^tA) = A$.

Dém.

1. Posons ${}^t(A + B) = (\gamma_{ij})$. On a $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$. Donc $(\gamma_{ij}) = (a_{ji} + b_{ji}) = (a_{ji}) + (b_{ji}) = (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij})$. D'où le résultat.
2. Posons ${}^t(\lambda A) = (\gamma_{ij})$. On a $\lambda A = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$. Donc $(\gamma_{ij}) = (\lambda a_{ji}) = \lambda(a_{ji}) = \lambda(\alpha_{ij}) = \lambda\,{}^tA$.
3. Posons $C = AB$ et ${}^tC = (\gamma_{ij})$. On $C = (c_{ij}) = AB = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})$. Donc ${}^tC = (\gamma_{ij}) = (c_{ji}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki}) = (\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\beta_{ik}) = (\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\alpha_{kj}) = {}^tB\,{}^tA$.
4. Posons ${}^t({}^tA) = (\gamma_{ij})$. On a ${}^tA = (\alpha_{ij}) = (a_{ji})$. Donc ${}^t({}^tA) = (\gamma_{ij}) = {}^t(\alpha_{ij}) = (\alpha_{ji}) = (a_{ij}) = A$.

Remarque 2.6.5

1. Au passage, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \xrightarrow{t} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ est une application linéaire.
2. Une matrice diagonale est sa propre transposée ; on dit qu'elle est *symétrique*.
3. La transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure et réciproquement.

2.7 Matrices inversibles

Les matrices carrées d'ordre n et à coefficients dans $\mathbf{K}$ forment un anneau ; cet anneau admet la matrice identité I_n pour élément neutre. On peut donc parler des matrices carrées *inversibles*.

Définition 2.7.1 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est *inversible* si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AB = BA = I_n$.

Proposition 2.7.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible.
2. ${}^tA$ est inversible.
3. Il existe $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AB' = I_n$.
4. Il existe $B'' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $B''A = I_n$.
5. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
6. A est de rang n.
7. Les lignes de A sont linéairement indépendantes.

En outre, si ces conditions sont remplies, on a $B' = B'' = A^{-1}$.

Dém.
$(1 \Rightarrow 2)$ Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $AB = BA = I_n$. Alors ${}^t(AB) = {}^t(BA) = I_n$. Or, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$ et ${}^t(BA) = {}^tA\,{}^tB$. D'où ${}^tB\,{}^tA = {}^tA\,{}^tB = I_n$.
$(2 \Rightarrow 3)$ Comme ${}^tA$ est inversible, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ tel que $B\,{}^tA = I_n$, d'où ${}^t(B\,{}^tA) = I_n = A\,{}^tB$. Posant $B' = {}^tB$, il vient donc $AB' = I_n$.
$(3 \Rightarrow 4)$ Soient φ et ψ' les endomorphismes de $\mathbf{K}^n$ associés à A et B' respectivement. Autrement dit, $A = mat(\varphi, \mathcal{C}_n)$ et $B' = mat(\psi', \mathcal{C}_n)$. Soit $\Psi : L(\mathbf{K}^n) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'isomorphisme qui à un endomorphisme associe sa matrice relativement à la base canonique $\mathcal{C}_n$. Alors $\Psi^{-1}(AB') = \Psi^{-1}(A) \circ \Psi^{-1}(B') = \varphi \circ \psi' = id_{\mathbf{K}^n} = \Psi^{-1}(I_n)$. Or, $\varphi \circ \psi' = id_{\mathbf{K}^n} \Rightarrow \exists \psi'' \in L(\mathbf{K}^n)$ tel que $\psi'' \circ \varphi = id_{\mathbf{K}^n}$. Mais alors $\Psi(\psi'')\Psi(\varphi) = B''A = I_n$ où $B'' = mat(\psi'', \mathcal{C}_n)$.
$(4 \Rightarrow 5)$ Notons $C_1, \dots, C_n$ les matrices colonnes constituant A. L'égalité $B''A = I_n$ entraîne $(B''C1, \dots, B''C_n) = (E_1, \dots, E_n)$ où E_i désigne la matrice colonne des composantes de e_i dans la base canonique $\mathcal{C}_n = (e_1, \dots, e_n)$. Or $(E_1, \dots, E_n)$ est libre (dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$) donc les matrices colonnes $C_1, \dots, C_n$ sont nécessairement linéairement indépendantes (sinon, $(B''C_1, \dots, B''C_n)$ serait aussi liée).
$(5 \Rightarrow 6)$ Les n colonnes de A étant linéairement indépendantes, si $\varphi : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ désigne l'application linéaire associée alors $\operatorname{rg} \varphi = n$. Par définition, le rang de A est égal à n.
$(6 \Rightarrow 1)$ Dire que A est de rang n signifie que l'endomorphisme associé $\varphi : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ est de rang n. Par suite φ est un automorphisme de $\mathbf{K}^n$. Donc $A = mat(\varphi, \mathcal{C}_n)$ est inversible car il existe $\psi : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}^n$ tel que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id_{\mathbf{K}^n}$ et $B = mat(\psi, \mathcal{C}_n)$ vérifie $AB = BA = I_n$.

$(1 \Leftrightarrow 7)$ On a :

$$\begin{aligned}
& A \text{ inversible} \\
\Leftrightarrow\ & {}^tA \text{ inversible} \\
\Leftrightarrow\ & \text{les colonnes de } {}^tA \text{ sont linéairement indépendantes} \\
\Leftrightarrow\ & \text{les lignes de } {}^t({}^tA) = A \text{ sont linéairement indépendantes.}
\end{aligned}$$

Enfin, comme A est inversible, en multipliant par A^{-1} à gauche dans 3 et à droite dans 4, il vient $A^{-1} = A^{-1}(AB') = (A^{-1}A)B' = (B''A)A^{-1} = B''(AA^{-1}) = B''$ *i. e.* $B'' = B' = A^{-1}$.

Remarque 2.7.3

1. Il faut bien noter dans 3 & 4 que l'on exige uniquement $AB = I_n$ ou $BA = I_n$ (avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).
2. Dans la pratique, pour déterminer la matrice inverse A^{-1} d'une matrice carrée A, il (faut et il) suffit d'inverser le système linéaire associé à l'équation matricielle $AX = Y$. Au passage, si A n'est pas inversible, la résolution (avec solution unique !) échouera.

Proposition 2.7.4 Si A est une matrice inversible alors

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

Dém. En effet,

$$ {}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI_n = I_n$$

donc, d'après la conclusion de la proposition 2.7.2

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}).$$

2.8 Changement de base

Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ des bases de E.

Définition 2.8.1 La *matrice de passage* de la base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ à la base $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est la matrice carrée P d'ordre n dont la j–ième colonne est formée des composantes de e'_j par rapport à la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Exemple 2.8.2 Soient $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2) = (\pi, 1 + X, X - X^2)$. Alors $\mathcal{B}'$ est aussi une base de $\mathbf{R}_2[X]$. La matrice P de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est :

$$P = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.8.3

1. Compte-tenu de la définition d'une matrice d'application linéaire, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ de l'(unique) endomorphisme $\varphi \in L(E)$ tel que $\varphi(e_j) = e'_j$ *i. e.* $P = mat(\varphi, \mathcal{B})$.
2. La matrice P est aussi la matrice de l'identité de E relativement aux base $\mathcal{B}'$ à la source et $\mathcal{B}$ au but *i. e.* $P = mat(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$.
3. Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$; d'après le point 2, $Q = mat(id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. De sorte que $PQ = mat(id_E \circ id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n$. Donc P est inversible et $P^{-1} = Q$.

2.8.1 Action d'un changement de base sur les composantes d'un vecteur

Proposition 2.8.4 (Changement de base – matrice colonne) Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in E$. Notons X (resp. X') la matrice colonne des composantes de u dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) et $P = mat(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$X = PX'.$$

Dém. Considérons le diagramme $\overset{\mathcal{B}'}{E} \overset{id_E}{\rightarrow} \overset{\mathcal{B}}{E}$. On a :

$$\begin{aligned} &u = id_E(u) \\ \Leftrightarrow &X = mat(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})X' \\ \Leftrightarrow &X = PX'. \end{aligned}$$

Exemple 2.8.5 Si $Y = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ désigne la matrice colonne des composantes du polynôme $S(X) = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2$ dans la base $\mathcal{B}$ et $Y' = \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}$ celle dans $\mathcal{B}'$ on a bien :

$$P = mat(id_{\mathbf{R}_2[X]}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

et

$$Y = PY' \ i.\ e. \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi a'_0 + a'_1 \\ a'_1 + a'_2 \\ -a'_2 \end{pmatrix}.$$

Si l'on cherche les composantes de S dans $\mathcal{B}'$ alors on inverse le système précédent ; il vient :

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi}(a_0 - a_1 - a_2) \\ a_1 + a_2 \\ -a_2 \end{pmatrix}.$$

Et $S(X) = \frac{1}{\pi}(a_0 - a_1 - a_2) \cdot P_0 + (a_1 + a_2) \cdot P_1 - a_2 \cdot P_2$.

Corollaire 2.8.6 Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in E$. Notons X (resp. X') la matrice colonne des composantes de u dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) et $P = mat(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors :

$$X' = P^{-1}X.$$

Dém. Il suffit de multiplier à gauche par la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$, $Q = mat(id_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = P^{-1}$, les deux membres de l'égalité de la proposition précédente.

Exemple 2.8.7 On a ainsi obtenu :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = mat(id_{\mathbf{R}_2[X]}, \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Le polynôme $S(X) = 2 + X + \pi \cdot X^2$ s'écrit donc $S(X) = (\frac{1}{\pi} - 1) \cdot P_0 + (\pi + 1) \cdot P_1 - \pi \cdot P_2$ dans la base $\mathcal{B}'$ à l'aide de :

$$Y' = P^{-1}Y \ \ i.\ e. \begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} - 1 \\ \pi + 1 \\ -\pi \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.8.8

1. La situation n'exige pas toujours de calculer P^{-1} (heureusement, car cela reste fastidieux et sujet aux erreurs de calcul).
2. Élargissons provisoirement l'espace de coefficients de nos matrices et écrivons à l'aide de ces matrices « généralisées » l'opération de changement de base pour un vecteur.

   Le résultat du produit matriciel d'une matrice de type $(1, n)$ par une matrice de type (n, n) est bien défini et est une matrice $(1, n)$. Soient toujours $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', \ldots, e_n')$ deux bases d'un $\mathbf{K}$−espace vectoriel E. Notons

   $$P = mat(id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

   Alors

   $$\mathcal{B}' = \mathcal{B}P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} e_1' & \cdots & e_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

   D'autre part, désignons par X (resp. X') la matrice colonne des composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ (resp. $(x_1', \ldots, x_n')$) d'un vecteur u de E dans la base $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) et identifions le vecteur u à la matrice carrée d'ordre 1 à coefficients dans E, $(u) = \mathcal{B}'X' = \mathcal{B}X$ (en s'autorisant un léger *abus de notation*). On obtient :

   $$(u) = \begin{pmatrix} e_1' & \cdots & e_n' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

   D'où,

   $$\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre, il vient :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad i.\ e.\ X = PX'.$$

2.8.2 Action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Proposition 2.8.9 (Changement de bases – matrice d'une application linéaire) Soient E, F des $\mathbf{K}$–espaces vectoriels et $\varphi \in L(E, F)$. Soient $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_m)$, $\mathcal{E}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ des bases de E et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$, $\mathcal{F}' = (f'_1, \ldots, f'_n)$ des bases de F.
Soient A (resp. A') la matrice représentative de φ relativement aux bases $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) de E et $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) de F, *i. e.*

$$A = mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \text{ (resp. } A' = mat(\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}')),$$

P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ *i. e.*

$$P = mat(id_E, \mathcal{E}', \mathcal{E})$$

et enfin Q la matrice de passage de la base $\mathcal{F}$ à la base $\mathcal{F}'$ *i. e.*

$$Q = mat(id_F, \mathcal{F}', \mathcal{F}).$$

Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Dém. Considérons le diagramme :

$$\overset{\mathcal{E}'}{E} \overset{id_E}{\to} \overset{\mathcal{E}}{E} \overset{\varphi}{\to} \overset{\mathcal{F}}{F} \overset{id_F}{\to} \overset{\mathcal{F}'}{F}.$$

On a :

$$\begin{aligned} mat(\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}') &= mat(id_F \circ \varphi \circ id_E, \mathcal{E}', \mathcal{F}') = mat((id_F \circ \varphi) \circ id_E, \mathcal{E}', \mathcal{F}') \\ &= mat(id_F \circ \varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}') mat(id_E, \mathcal{E}', \mathcal{E}) \\ &= mat(id_F, \mathcal{F}, \mathcal{F}') mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) mat(id_E, \mathcal{E}', \mathcal{E}) \\ &= Q^{-1}AP. \end{aligned}$$

Remarque 2.8.10

1. *Avec le point de vue matriciel* : pour $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, on a :

   $$Y = AX \Leftrightarrow Q^{-1}Y = Q^{-1}AX.$$

   Ainsi,

   $$Y = AX \Leftrightarrow Y' = Q^{-1}APX' \Leftrightarrow A' = Q^{-1}AP.$$

2. *Avec le « formalisme » de la remarque précédente* : soient $u \in E$ et $v = \varphi(u) \in F$. Alors

   $$v = \varphi(u) \Leftrightarrow \mathcal{F}'Y' = \mathcal{F}'A'X' = \mathcal{F}AX \overset{\mathcal{F}'=\mathcal{F}Q}{=} \mathcal{F}'Q^{-1}APX' \ i.\ e.\ A' = Q^{-1}AP.$$

Corollaire 2.8.11 (Changement de base – matrice d'un endomorphisme) Soient E un $\mathbf{K}$–espace vectoriel, $\varphi \in L(E)$ et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m)$, $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_m)$ des bases de E. Soient A (resp. A') la matrice représentative de φ relativement à la base $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) de E *i. e.*

$$A = mat(\varphi, \mathcal{E}) \text{ (resp. } A' = mat(\varphi, \mathcal{E}')),$$

P la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$ *i. e.*

$$P = mat(id_E, \mathcal{E}', \mathcal{E}).$$

Alors

$$A' = P^{-1}AP.$$

Exemple 2.8.12 Soient $\varphi : \mathbf{R}_2[X] \to \mathbf{R}_2[X]$ définie par $\varphi(P)(X) = \dfrac{1}{2}(P(X) + P(-X))$. Alors

$$A = mat(\varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} A' = mat(\varphi, \mathcal{B}') &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\pi} & \frac{1}{\pi} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Proposition 2.8.13 Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Alors

$$P \text{ matrice de passage} \Leftrightarrow P \text{ inversible.}$$

Dém.
($\Rightarrow$) On a déjà vu qu'une matrice de changement de base (*i. e.* de passage) est inversible.
($\Leftarrow$) Soient P une matrice carrée d'ordre n, inversible et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E. Notons e'_j le vecteur de E dont les composantes par rapport à la base $\mathcal{E}$ constituent la j–ième colonne de P. Alors l'endomorphisme de E qui transforme e_1 en e'_1, $\dots, e_n$ en e'_n admet la matrice inversible P pour matrice relativement à la base $\mathcal{E}$ (à la source et au but), donc c'est un automorphisme de E et $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est également une base de E. Mais alors $P = mat(id_E, \mathcal{E}', \mathcal{E})$ est la matrice de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{E}'$.

2.9 Matrices équivalentes

Définition 2.9.1 Deux matrices A et A' de type (n,m) sont *équivalentes* s'il existe une matrice inversible P d'ordre n et une matrice inversible Q d'ordre m telles que

$$A' = PAQ.$$

Proposition 2.9.2 Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. Pour que A et A' soient équivalentes, il faut et il suffit que A et A' soient les matrices représentatives d'une (*même*) application linéaire $\varphi : E \to F$ (relativement à des bases de E et F).

Dém.
($\Rightarrow$) Soient E et F des $\mathbf{K}$−espaces vectoriels de dimension m et n respectivement. Soient $\mathcal{E}$ une base (quelconque) de E et $\mathcal{F}$ une base (quelconque) de F. Notons $\varphi : E \to F$ l'unique application linéaire telle que $A = mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$.
Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbf{K})$ inversibles telles que $A' = PAQ$. D'après la proposition 2.8.13, il existe des bases $\mathcal{E}'$ de E et $\mathcal{F}'$ de F telles que P^{-1} soit la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$ (*i. e.* $P^{-1} = mat(id_F, \mathcal{F}', \mathcal{F})$) et Q la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ (*i. e.* $Q = mat(id_E, \mathcal{E}', \mathcal{E})$). Dès lors,

$$mat(\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}') = (P^{-1})^{-1} AQ = A'.$$

($\Leftarrow$) D'après la proposition 2.8.9 (sur l'action d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire), si $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$) sont des bases de E (resp. F) alors

$$A' = mat(\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}') = R^{-1} AQ$$

où R est la matrice de passage de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}'$, $A = mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F})$ et Q est la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. Posant $P = R^{-1}$, on obtient bien l'égalité

$$A' = PAQ$$

et A et A' sont équivalentes.

Corollaire 2.9.3 L'équivalence de matrices est une relation d'équivalence.

Corollaire 2.9.4 Deux matrices équivalentes ont même rang.
Dém. Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ des matrices équivalentes. D'après la proposition 2.9.2, A et A' sont les matrices d'une même application linéaire $\varphi : E \to F$ entre les $\mathbf{K}$−espaces vectoriels E et F (de dimension m et n respectivement). Comme le rang d'une matrice représentative d'une application linéaire est égal au rang de l'application linéaire, le rang de deux matrices équivalentes coïncident.

Théorème 2.9.5 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ de rang r. Alors A est équivalente à la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dém. Soient E et F des $\mathbf{K}$−espaces vectoriels de dimension m et n respectivement et $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{F}$ une base de F. Il existe une application linéaire (et une seule) $\varphi : E \to F$ telle que $mat(\varphi, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = A$. On a donc $r = \operatorname{rg} \varphi = \operatorname{rg} A$.
Posons $K = \ker \varphi$ et soit G un supplémentaire de K dans E. Alors $\varphi_{|G} : G \to F$ est linéaire injective et $\operatorname{im} \varphi = \varphi(E) = \varphi(K + G) = \varphi(G) = \varphi_{|G}(G)$. L'application linéaire $\psi : G \to \operatorname{im} \varphi$ définie par $\psi(u) = \varphi(u)$ réalise donc un isomorphisme de G sur $\operatorname{im} \varphi$. Soit $(e'_1, \dots, e'_r)$ une base de G, posons $f'_i = \varphi(e'_i)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. Comme ψ est un isomorphisme, $(f'_1, \dots, f'_r)$ est une base de $\operatorname{im} \varphi$. Complétons cette famille libre en une base de F, $\mathcal{F}' = (f'_1, \dots, f'_r, f'_{r+1}, \dots, f'_n)$. Soit enfin, $(k'_{r+1}, \dots, k'_m)$ une base de K ; la famille $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_r, k'_{r+1}, \dots, k'_m)$ est une base de E (car $G \oplus K = E$). Dès lors,

$$mat(\varphi, \mathcal{E}', \mathcal{F}') = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 2.9.6 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} ({}^t A)$.

Dém. Appliquons le théorème 2.9.5 et notons A' la matrice équivalente donnée par le théorème. Alors

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} ({}^t A') = \operatorname{rg} ({}^t A)$$

car ${}^t A$ et ${}^t A'$ sont équivalentes.

2.10 Matrices semblables

Définition 2.10.1 Deux matrices carrées d'ordre n $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $A' = P^{-1} A P$.

Proposition 2.10.2 Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour que A et A' soient semblables, il faut et il suffit que A et A' soient les matrices représentatives d'un (*même*) endomorphisme $\varphi : E \to E$ (relativement à deux bases de E).

Dém. C'est un cas particulier de la proposition 2.9.2.

Remarque 2.10.3

1. Deux matrices semblables sont équivalentes mais deux matrices carrées équivalentes ne sont pas toujours semblables.
2. Étant donnée une matrice carrée A, on peut chercher une matrice A' semblable à A qui soit aussi simple que possible. Ceci revient, étant donné un $\mathbf{K}$−espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme $\varphi \in L(E)$ à chercher une base de E telle que la matrice représentative de φ dans cette base soit la plus simple possible ; c'est la *réduction* des endomorphismes qui sera étudiée en seconde année.

2.11 Opérations élémentaires sur les matrices – méthode de Gauss (Fang-Cheng)

Dans ce paragraphe, nous allons décrire des opérations élémentaires sur les matrices qui permettent de les « réduire » (en les échelonnant) voire de les inverser ou de déterminer en pratique le rang d'une matrice. Ces opérations reflètent pas à pas les modifications à effectuer sur un système linéaire (associé à la matrice) pour en trouver les solutions (*i. e.* inverser le système) ou trouver son rang. Ces *transformations* proposent un cadre formalisé à la méthode de Gauss (ou Fang-Cheng).

Définition 2.11.1 Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$. Le *symbole de Knonecker* est le scalaire

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Proposition 2.11.2 (Base canonique de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, posons

$$E^{ij} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $(E^{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, appelée *base canonique*.
Dém. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$. On a :

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ alors $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}E^{ij}$. De plus, comme une matrice est nulle si et seulement chacun des a_{ij} est nul, on conclut que $(E^{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.

Proposition 2.11.3 Soient $i,j,k,l \in [\![1,n]\!]$. On a dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$

$$E^{ij}E^{kl} = \delta_{jk}E^{il}.$$

Dém. Soit $(i_0,j_0) \in [\![1,n]\!]^2$. On a

$$(E^{ij}E^{kl})_{i_0j_0} = \sum_{p=1}^{n}(E^{ij})_{i_0p}(E^{kl})_{pj_0} = \sum_{p=1}^{n}\delta_{ii_0}\delta_{jp}\cdot\delta_{kp}\delta_{lj_0} = \left(\sum_{p=1}^{n}\delta_{jp}\delta_{pk}\right)\delta_{ii_0}\delta_{lj_0}. = \delta_{jk}(E^{il})_{i_0j_0}$$

D'où $E^{ij}E^{kl} = \delta_{jk}E^{il}$.

Définition 2.11.4 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Le sous-ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est le *groupe linéaire d'ordre n à coefficients dans* $\mathbf{K}$, noté $GL_n(\mathbf{K})$ (c'est un *groupe* pour le produit matriciel).

Définition 2.11.5 Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Une *matrice de transposition* est une matrice carrée d'ordre n de la forme

$$T^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & & & & & & & 0 \\
0 & \ddots & & & & & & & & \vdots \\
\vdots & & 1 & 0 & \cdots & & & & & \\
 & & 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & 1 & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & 0 & & \ddots & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & 0 & 0 & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & \\
 & & & \vdots & & & & & \ddots & 0 \\
0 & \cdots & & & & & & & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Proposition 2.11.6 Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$.

1. La matrice T^{ij} est inversible et sa propre inverse.
2. ${}^tT^{ij} = T^{ji} = T^{ij}$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. La matrice $T^{ij}A$ se déduit de A en échangeant les lignes i et j.
4. Soit $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. La matrice BT^{ij} se déduit de B en échangeant les colonnes i et j

Dém.

1.

$$\begin{aligned}
(T^{ij})^2 &= (I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji})(I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}) \\
&= I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji} \\
&- E^{ii} + E^{ii}E^{ii} + E^{ii}E^{jj} - E^{ii}E^{ij} - E^{ii}E^{ji} \\
&- E^{jj} + E^{jj}E^{ii} + E^{jj}E^{jj} - E^{jj}E^{ij} - E^{jj}E^{ji} \\
&+ E^{ij} - E^{ij}E^{ii} - E^{ij}E^{jj} + E^{ij}E^{ij} + E^{ij}E^{ji} \\
&+ E^{ji} - E^{ji}E^{ii} - E^{ji}E^{jj} + E^{ji}E^{ij} + E^{ji}E^{ji}E^{ji} \\
&= I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji} \\
&- E^{ii} + E^{ii} + \delta_{ij}E^{ij} - E^{ij} - \delta_{ij}E^{ii} \\
&- E^{jj} + \delta_{ji}E^{ji} + E^{jj} - \delta_{ji}E^{jj} - E^{ji} \\
&+ E^{ij} - \delta_{ji}E^{ii} - E^{ij} + \delta_{ji}E^{ij} + E^{ii} \\
&+ E^{ji} - E^{ji} - \delta_{ij}E^{jj} + E^{jj} + \delta_{ij}E^{ji} \\
&= I_n - 2\delta_{ij}(E^{ii} + E^{jj} - (E^{ij} + E^{ji})) \\
&= I_n.
\end{aligned}$$

2. On a ${}^tT^{ij} = {}^t(I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}) = {}^tI_n - {}^tE^{ii} - {}^tE^{jj} + {}^tE^{ij} + {}^tE^{ji}$ par linéarité de la transposition. Enfin, ${}^tT^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ji} + E^{ij} = T^{ij}$ car E^{pp} est symétrique pour tout $p \in [\![1, n]\!]$ et $E^{ji} = {}^tE^{ij}$.

3. Notons $(E'^{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.

$$\begin{aligned}T^{ij}A &= (I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji})A = A - E^{ii}A - E^{jj}A + E^{ij}A + E^{ji}A \\ &= A - \sum_{k=1}^{m} a_{ik}E'^{ik} - \sum_{k=1}^{m} a_{jk}E'^{jk} + \sum_{k=1}^{m} a_{jk}E'^{ik} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}E'^{jk} \\ &= A + \sum_{k=1}^{m}(a_{jk} - a_{ik})E'^{ik} + \sum_{k=1}^{m}(a_{ik} - a_{jk})E'^{jk}.\end{aligned}$$

   Ainsi, $T^{ij}A$ se déduit de A en échangeant ses lignes i et j.

4. Échangeons les rôles de n et m. On a ${}^t(BT^{ij}) = {}^tT^{ij}\,{}^tB = T^{ji}\,{}^tB$. Ainsi, ${}^t(BT^{ij})$ se déduit de ${}^tB$ en échangeant ses lignes j et i. Dès lors, $BT^{ij} = {}^t({}^t(BT^{ij}))$ se déduit de B en échangeant ses colonnes j et i.

Définition 2.11.7 Soient $i \in [\![1, n]\!]$ et $\lambda \in \mathbf{K} - \{0\}$. Une *matrice d'affinité* est une matrice carrée d'ordre n de la forme

$$D^i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E^{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.11.8 Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{K} - \{0\}$ et $i \in [\![1, n]\!]$.

1. On a
$$D^i(\lambda)D^i(\mu) = D^i(\lambda\mu),\ D^i(1) = I_n$$
$$D^i(\lambda) \text{ est inversible et } D^i(\lambda)^{-1} = D^i(\frac{1}{\lambda}).$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. La matrice $D^i(\lambda)A$ se déduit de A en multipliant la i–ième ligne de A par λ.
3. Soit $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. La matrice $BD^i(\lambda)$ se déduit de B en multipliant la i–ième colonne de B par λ.

Définition 2.11.9 Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Une *matrice de transvection* est une matrice carrée d'ordre n de la forme

$$U^{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \lambda & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.11.10 Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$.

1. $U^{ij}(0) = I_n$, $U^{ij}(\lambda)$ est inversible et $U^{ij}(\lambda)^{-1} = U^{ij}(-\lambda)$.
2. $U^{ij}(\lambda)U^{ij}(\mu) = U^{ij}(\lambda + \mu)$.
3. ${}^tU^{ij}(\lambda) = U^{ji}(\lambda)$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. La matrice $U^{ij}(\lambda)A$ se déduit de A en remplaçant la i−ième ligne de A par elle-même additionnée de λ fois la j−ième ligne.
5. Soit $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. La matrice $BU^{ij}(\lambda)$ se déduit de B en remplaçant la j−ième colonne de B par elle-même additionnée de λ fois la i−ième colonne.

Définition 2.11.11 Un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ (resp $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$) du type $A \mapsto UA$ (resp. $A \mapsto AU$) où U est une matrice de transposition, d'affinité ou de transvection d'ordre n est une *opération élémentaire* sur les lignes (resp. colonnes).
On note une telle opération $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$), $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \lambda C_i$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$).

Proposition 2.11.12 Une opération élémentaire sur une matrice conserve son rang.

Dém. Une multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible correspond à une composition à gauche (resp. à droite) par un isomorphisme, qui conserve la dimension.

Définition 2.11.13 Une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ est *échelonnée en ligne* si, pour toute ligne $i \in [\![1, n]\!]$, dont le premier coefficient non nul se trouve sur la colonne $j \in [\![1, m]\!]$, le premier coefficient non nul de la $(i+1)$-ième ligne se trouve sur une colonne $k > j$ (par convention, $k = m + i + 1$ si la ligne $i + 1$ est nulle).
Une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ est *échelonnée en colonne* si ${}^tA$ est échelonnée en ligne.

Exemple 2.11.14

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 9 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée en ligne.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ est échelonnée en colonne.

Remarque 2.11.15

1. Le rang d'une matrice échelonnée en ligne est le nombre de lignes non nulles.
2. Le rang d'une matrice échelonnée en colonne est le nombre de colonnes non nulles.

Théorème 2.11.16 (Méthode du Pivot de Gauss/Fang-Cheng)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. Il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{K})$, donnée par un produit de matrices de transposition et de transvection, telle que PA soit échelonnée en ligne.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbf{K})$, donnée par un produit de matrices de transposition et de transvection, telle que BP soit échelonnée en colonne.

Dém.

1. Soit $A = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant m}$.
   Si $A = 0$ alors A est échelonnée en ligne.
   Sinon, soient $j_1 \in [\![1, m]\!]$ l'indice de la première colonne non nulle de A et i_1 l'indice (de ligne) d'un coefficient non nul sur la colonne j_1. En multipliant A à gauche par la matrice de transposition T^{1i_1}, on se ramène à la matrice $T^{1i_1}A$ telle que $a'_{1j_1} \neq 0$ (premier « pivot »). Le produit des matrices de transvection $U^{i1}(-\frac{a'_{ij_1}}{a'_{1j_1}})$, $2 \leqslant i \leqslant n$ (qui commutent 2 à 2), annule les coefficients de la j_1−ième colonne de $T^{1i_1}A$ de la ligne 2 à la ligne n *i. e.*

$$A^{(1)} := U^{n1}(-\frac{a'_{nj_1}}{a'_{1j_1}}) \cdots U^{21}(-\frac{a'_{2j_1}}{a'_{1j_1}})T^{1i_1}A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij_1} & a_{1j_1+1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & 0 & a_{2j_1+1} & \cdots & a_{2m} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nj_1+1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^{(1)} .$$

   Si pour tout $j_1 < j_2 \leqslant m$, la colonne « tronquée » $\begin{pmatrix} a_{2j_2} \\ \vdots \\ a_{nj_2} \end{pmatrix}^{(1)}$ est nulle alors

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij_1} & a_{1j_1+1} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \cdots & & 0 \\ & & & \vdots & & & \vdots \\ & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}^{(1)} .$$

   est échelonnée en ligne.

   Sinon, soient $j_2 > j_1$ le plus petit indice de colonne de $A^{(1)}$ tel que $\begin{pmatrix} a_{2j_2} \\ \vdots \\ a_{nj_2} \end{pmatrix}^{(1)}$ soit non nul et $i_2 > 1$ tel que $a^{(1)}_{i_2j_2} \neq 0$. Alors le coefficient $(2, i_2)$ de $T^{2i_2}A^{(1)}$ est non nul (second « pivot ») et on répète le processus de la ligne 3 à la ligne n pour obtenir

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{ij_1} & a_{1j_1+1} & \cdots & a_{1j_2-1} & a_{1j_2} & a_{1j_2+1} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & \cdots & & 0 & \cdots & & 0 & a_{2j_2} & a_{2j_2+1} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & \cdots & & 0 & 0 & a_{nj_2+1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^{(2)} .$$

   De proche en proche (jusqu'à la colonne m), on obtient la forme échelonnée en ligne recherchée car $j_{k+1} > j_k$ pour $m > k \geqslant 1$.
2. Posons $A = {}^tB$. Il existe $Q \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que QB soit échelonnée en ligne. Comme Q est un produit de transvections et de transpositions (dont les transposées sont du même type), on en déduit ${}^t(QA) = {}^tA\,{}^tQ = BP$ est échelonnée en colonne avec $P = {}^tQ$.

Remarque 2.11.17

1. La matrice obtenue par ce procédé est *équivalente* (car du type PAI_m pour l'échelonnée en ligne) mais, même si $m = n$, n'est pas *semblable* à la matrice d'origine.
2. Si on autorise la multiplication par des matrices d'affinité alors
   (a) on peut se ramener à des pivots égaux à 1 ;
   (b) si les coefficients de la matrice A sont entiers, on peut échelonner A en une nouvelle matrice à coefficients entiers en considérant les opérations du type $L_i \leftarrow a_{1j_1}L_i - a_{ij_1}L_1$; d'un point de vue matricielle, cette opération est la multiplication à gauche par la matrice d'affinité $D^i(a_{1j_1})$ avec $a_{1j_1} \neq 0$ *suivie* de la matrice de transvection $U^{i1}(-a_{ij_1})$.

Exemple 2.11.18 Déterminer le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & -7 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

On va échelonner la matrice en ligne :

1. *Étape 1*

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -5 & 6 \\ 0 & -2 & 10 & -9 \\ 0 & -5 & 13 & -7 \\ 0 & -4 & -4 & 13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$$

2. *Étape 2*

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & \boxed{-2} & 10 & -9 \\ 0 & 0 & 24 & -31 \\ 0 & 0 & -24 & 31 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow -2L_3 + 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix}$$

3. *Étape 3*

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & -2 & 10 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{24} & -31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix}$$

Donc $\operatorname{rg} A = 3$.

Théorème 2.11.19 (de Jordan-Bareiss) Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$. Il existe un produit P de matrices élémentaires tel que $PA = I_n$ donc $P = A^{-1}$.

Dém. Quitte à considérer $T^{1i_1}A$ pour un certain indice de ligne i_1, on peut supposer le coefficient $(1,1)$ non nul. Dès lors,

$$D^1\left(\frac{1}{a_{i_1 1}}\right)T^{i_1 1}A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{i_1 2}}{a_{i_1 1}} & \cdots & \frac{a_{i_1 n}}{a_{i_1 1}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En échelonnant la matrice précédente à l'aide de la méthode de Gauss (par produit à gauche par des matrices de transvection), on obtient

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{(1)}.$$

La colonne tronquée $\begin{pmatrix} a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}^{(1)}$ est non nulle (sinon $\operatorname{rg} A < n$). En répétant le processus $n-1$ fois on obtient

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{(n-1)}.$$

D'où

$$A^{(n)} = D^n\left(\frac{1}{a_{nn}{}^{(n-1)}}\right)A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^{(n)}.$$

En multipliant (toujours à gauche) par des matrices de transvection, on obtient au final $PA = I_n$ en notant P le produit des matrices élémentaires. Par suite, $P = A^{-1}$.

Exemple 2.11.20 Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme $PI_n = P$, en écrivant côte à côte les matrices A et I_n et en reportant les opérations appliquées à A sur I_n, on trouve A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{T^{12}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{T^{23}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{U^{32}(-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{U^{13}(-1)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.11.21

1. Pour chercher le rang d'une matrice on peut tour à tour opérer sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice (ce qui correspond à une multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible, qui conserve le rang).

2. En revanche, pour déterminer l'inverse d'une matrice, il faut impérativement travailler *uniquement* sur les lignes ou bien *uniquement* sur les colonnes.
3. (a) Pour déterminer une base du sous-espace vectoriel *image* d'une application linéaire connaissant sa matrice (relativement à des bases données), on opère (*élémentairement*) sur les colonnes de la matrice ; la base cherchée correspond aux vecteurs colonnes non nuls de l'échelonnée en colonne, ou les vecteurs correspondants dans la matrice initiale (à permutation de colonnes près).
   (b) Si on cherche une base du *noyau*, on reporte les opérations élémentaires (sur les colonnes) sur la matrice identité ; les vecteurs (composantes) du noyau se lisent dans la matrice identité transformée en considérant les indices des colonnes nulles de l'échelonnée en colonne de A.

Exemple 2.11.22 Soit $\varphi \in L(\mathbf{R}^3)$ définie par $\varphi(x,y,z) = (x+2y, 4x-y+18z, 7x+y+26z)$. On trouve

$$mat(\varphi, \mathcal{C}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 18 \\ 7 & 1 & 26 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 18 \\ 7 & 1 & 26 \end{pmatrix} \underset{U^{12}(-2)}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -9 & 18 \\ 7 & -13 & 26 \end{pmatrix} \underset{U^{23}(2)}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -9 & 0 \\ 7 & -13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{rg}\varphi = 2$ et $\operatorname{im}\varphi =< (1,4,7), (0,-9,-13) >=< (1,4,7), (2,-1,1) >$.
En outre

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{U^{12}(-2)}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{U^{23}(2)}{\leadsto} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où, $\ker\varphi =< (-4,2,1) >$.

Définition 2.11.23 Le *déterminant d'une matrice triangulaire* est le produit des coefficients de la diagonale principale.

Exemple 2.11.24 En particulier, le déterminant d'une transvection est égal à 1 et le déterminant de $D^i(\lambda)$ est égal à λ.

Définition 2.11.25 Le sous-ensemble de $GL_n(\mathbf{K})$ des matrices de déterminant 1 est un *sous-groupe* (pour le produit matriciel) de $GL_n(\mathbf{K})$ appelé *groupe spécial linéaire* et noté $SL_n(\mathbf{K})$.

Exemple 2.11.26 Une matrice de transvection appartient à $SL_n(\mathbf{K})$. En réalité, les matrices de transvection engendrent $SL_n(\mathbf{K})$.
On peut également montrer que toute matrice P de $GL_n(\mathbf{K})$ est produit de matrice de transvection et d'une (unique) matrice d'affinité (dont le coefficient est le déterminant de P).

Bibliographie

[CDCB] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, *exercices d'algèbre, 1er cycle scientifique, 1re année de préparation aux grandes écoles*, Armand Colin, collection U, 239 p (1976).

[D] J. Dixmier (avec la collaboration de P. Dugac), *Cours de mathématiques du premier cycle, 1re année. Exercices, indications de solutions, réponses*. Gauthier-Villars, Bordas, 2e édition, 619 p (1991).

[ROD] E. Ramis, C. Deschamps, J. Odoux, *Cours de mathématiques spéciales, T. 1, Algèbre*, Masson, 3e édition, 450 p (1993).