Université de Clermont1
IUT d'Informatique
1ière année
Denis RICHARD

FONCTIONS BOOLÉENNES

1 Les fonctions Booléennes

1) Soit $B = \{0, 1\}$ muni de la relation $0 < 1 < B, \leq >$ est un treillis de Boole.

2) Soit $B^n = \{(a_1, \ldots, a_n)/\forall i(a_i = 0 \text{ ou } a_i = 1)$

$\boxed{\text{Exemples}}$

$B^2 = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}$
$B^3 = \{(0, 0, 0); (0, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$
• B possède 2^n éléments.

3) Définition 1.1 *On appelle **fonction booléenne** à* n *variables (ou **fonction binaire**, ou **fonction logique**) toute application*

$$\mathrm{f} : \mathrm{B}^\mathrm{n} \to \mathrm{B}$$
$$(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}) \longmapsto \mathrm{f}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}).$$

• On représente f par un tableau qui est dit ***Table de Vérité*** de f.

$\boxed{\text{Exemples}}$

a_1	a_2	a_3	f	g	$\bar{f}$	$\bar{g}$	$f \vee g$	$f \wedge g$	$\bar{f} \wedge \bar{g}$	$\bar{f} \vee \bar{g}$	$\bar{f} \vee g$
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1

On lit $\bar{f} \vee g(1, 1, 1) = 1$
$\bar{f} \wedge \bar{g}(1, 0, 1) = 0 = \overline{f \vee g}(1, 0, 1)$

4) Proposition 1.1
(i) L'ensemble $\mathrm{F_n}$ *des fonctions booléennes (de* $\mathrm{B^n}$ *dans* B *est en bijection avec* $\mathcal{P}(\mathrm{B^n})$)

(ii) Le nombre d'éléments de $\mathrm{F_n}$ *est* $2^{(2^\mathrm{n})}$

(iii) On définit sur $\mathrm{F_n}$ *un ordre* $\leq$ *par* $\mathrm{f} \leq \mathrm{g}$ *si et seulement si*
$$\forall(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}) \in \mathrm{B}^\mathrm{n}\Big(\mathrm{f}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n}) \leq \mathrm{g}(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\mathrm{n})\Big).$$

Alors $(\mathrm{F_n}, \leq)$ *est un treillis de Boole, de plus* $(\mathrm{F_n}, \leq) \underbrace{\simeq}_{\substack{\text{isomorphe} \\ \text{comme treillis (de Boole)}}} (\mathcal{P}(B_n), \subset)$.

• La preuve est à méditer, à connaître, à mettre en relation avec le théorème de Stone.

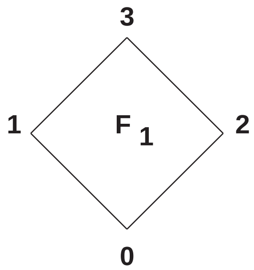
Commentaires

n	Card F_n
1	4
2	16
3	356
4	65 536
5	4 294 967 296
6	18 446 744 073 709 551 616

La croissance de $n \longmapsto Card(F_n)$ est ***Bi-exponentielle***.

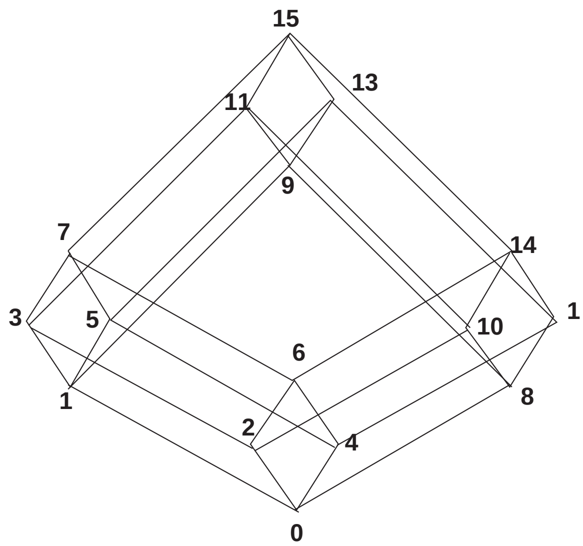
Exemples

B	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1



B^2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
(0,0)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
(0,1)	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
(1,0)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
(1,1)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

le treillis F_2



2 Mise sous forme canonique disjonctive

Les atomes de $\mathcal{P}(B_n)$ sont les singletons $\{(a_1, \ldots, a_n)\}$: les atomes de F_n sont donc les fonctions caractéristiques de ces singletons. On les appelle ***Mintermes***.

Définition 2.1 *Un* **Minterme** *de* $\mathrm{F_n}$ *est une fonction booléenne* m *de* $\mathrm{B^n}$ *dans* B *tel qu'il existe* ***un et un seul*** $(\mathrm{a_1, \ldots, a_n}) \in \mathrm{B^n}$ *tel que*

$$\mathrm{m(a_1, \ldots, a_n) = 1.}$$

On a vu que tout élément d'un algèbre de Boole s'écrit comme "sup" des atomes qui lui sont inférieurs, et ce de façon unique d'où

Théorème 2.1 *Toute fonction booléenne* f *de* $\mathrm{F_n}$ *s'écrit*
$\mathrm{f = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_k}$ *avec* $\{\mathrm{m_1, \ldots, m_k}\} = \{\mathrm{m \in F_n/m \text{ atome et } \; m \leq f}\}$.

Exemples Soit f dont la table de vérité est :

x	y	z	f	m_1	m_2	m_3	m_4
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	2	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1

alors $f = m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4$ (le vérifier sur la table).

Proposition 2.1 *Soit* $\mathrm{p_i}$ *l'élément de* $\mathrm{F_n}$ *tel que*
$\mathrm{p_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = a_i}$ *(c'est une projection) et*
$\mathrm{\overline{p_i}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) = 1 - a_i}$.

Alors pour tout minterme m *de* $\mathrm{F_n}$ *il existe* $\mathrm{t_1, \ldots, t_n}$ *(uniques) tels que*
$\mathrm{m = t_1 \wedge t_2 \wedge \cdots \wedge t_n = t_1 t_2 \ldots t_n \;\; avec \;\; (t_i = p_i \;\; ou \;\; t_i = \overline{p_i} \;\; pour \;\; i \in \{1, 2, \ldots, n\})}$
(on dit que m *est écrit sous* ***forme conjonctive****).*

ALGORITHME pour mettre un minterme *m* sous forme conjonctive.

- **Considérer l'unique** $(a_1, \ldots, a_n) \in B^n$ tel que $m(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

- Ecrire $m = p_1 p_2 \ldots p_n$ puis **surmonter** d'une **barre** les p_i tel que i vérifie $a_i = 0$ dans l'unique $(a_1, \ldots, a_n)$ tel que $m(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Théorème 2.2 (Mise sous forme disjonctive)
Toute fonction booléenne f *de* $\mathrm{F_n}$*, non nulle, peut se mettre sous forme disjonctive, c'est-à-dire peut s'écrire comme borne supérieure de bornes inférieures (i.e. produits) de fonctions* $\mathrm{p_i}$ *et* $\mathrm{\overline{p_i}}$.

Exemple Pour f de l'exemple (table de vérité), on aura :

$$f = (\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \overline{p_2} \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3).$$

ALGORITHME pour mettre une fonction $f \in F_n \backslash \{0\}$ sous forme disjonctive.

- Écrire sa **Table de Vérité** ;

- chaque fois que $f(a_1, \ldots, a_n) = 1$ écrire
le ***Minterme*** correspondant comme ***Borne inférieure*** (ou produits) de p_i et $\overline{p_i}$;

- écrire que f est ***Borne supérieure*** de ces mintermes présentés comme produits.

Exemple d'application de l'algorithme précédent

a_1	a_2	a_3	f	MINTERME
0	0	0	1	$\overline{p_1}\ \overline{p_2}\ \overline{p_3}$
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{p_1}\ p_2\ p_3$
1	0	0	0	
1	1	0	1	$p_1\ p_2\ \overline{p_3}$
1	0	1	0	
1	1	1	1	$p_1\ p_2\ p_3$

Ca tableau conduit à

$$f = (\overline{p_1} \wedge \overline{p_2} \wedge \overline{p_3}) \vee (\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$$

qui peut encore s'exprimer, avec les variables a_i, par

$$f(a_1, a_2, a_3) = (\overline{a_1} \quad \overline{a_2} \quad \overline{a_3}) \vee (\overline{a_1} a_2 a_3) \vee (a_1 a_2 \overline{a_3}) \vee (a_1 a_2 a_3).$$

Remarque Cette écriture est-elle "simplifiable" ?
On traitera le problème plus loin.

3 Forme canonique conjonctive

Définition 3.1 *On appelle* **Maxterme** *toute fonction booléenne qui ne prend qu'une fois la valeur* 0.

Remarques

- Autrement dit, si $M \in F_n$ est un maxterme, il existe un unique
$(a_1, \ldots, a_n)$ tel que $M(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

- Il est clair que M est un maxterme si et seulement si $\overline{M}$ est un minterme, et que m est un minterme si et seulement si $\overline{m}$ est un maxterme.

Proposition 3.1

• *Si* $\mathrm{p_1, \dots, p_n}$ *sont les projections de* $\mathrm{F_n}$*, [c'est-à-dire, si pour tout* $\mathrm{(a_1, \dots, a_n) \in p_i}$ *est défini par* $\mathrm{p_i(a_1, \dots, a_n) = a_i}$*] alors tout* **Maxterme** M *s'écrit de façon unique* $\mathrm{M = t_1 \vee t_2 \vee \dots \vee t_n}$ *avec, pour tout* $\mathrm{i \in \{1, \dots, n\}}$ *la condition* $(\mathrm{t_i = p_i} \quad ou \quad \mathrm{t_i = \overline{p_i}})$.

• *On dit que* M *est* ***sous-forme disjonctive****. On trouve alors* **l'Analogue** *de la mise sous forme canonique (ou normale) disjonctive.*

Théorème 3.1 *Toute fonction* $\mathrm{f \in F_n}$*, non nulle, peut s'écrire sous-forme de* ***borne inférieure*** *(ou produit, ou encore conjonction) de bornes supérieures de projections* $\mathrm{p_i}$ *et de compléments* $\mathrm{\overline{p_i}}$ *de projection.*

$\boxed{\text{Exemple}}$ Soit $f = (\overline{p_1} \wedge \overline{p_2} \wedge \overline{p_3}) \vee (\overline{p_1} \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{p_3}) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$ l'exemple donné ci-dessus, alors avec les lois de Morgan :

$$\overline{f} = (p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \overline{p_2} \vee \overline{p_3}) \wedge (\overline{p_1} \vee \overline{p_2} \vee p_3) \wedge (\overline{p_1} \vee \overline{p_2} \vee \overline{p_3}).$$

ALGORITHME pour mettre f sous forme conjonctive.

• Écrire la ***Table de vérité*** de f.

• Chaque fois que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$, écrire le **Maxterme** correspondant comme ***Borne supérieure*** des p_i et $\overline{p_i}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

• Écrire f comme ***produit*** de ces (ou ses) **Maxtermes**.

$\boxed{\text{Exemple d'application de cet algorithme}}$

a_1	a_2	a_3	g	**MAXTERME**
0	0	0	0	$p_1 \vee p_2 \vee p_3$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	0	$p_1 \vee \overline{p_2} \vee \overline{p_3}$
1	0	0	1	
1	0	1	0	$\overline{p_1} \vee p_2 \vee \overline{p_3}$
1	1	0	1	
1	1	1	0	$\overline{p_1} \vee \overline{p_2} \vee \overline{p_3}$

Ce tableau conduit à

$$g = (p_1 \vee p_2 \vee p_3)(p_1 \vee \overline{p_2} \vee \overline{p_3}) \wedge (\overline{p_1} \vee p_2 \vee \overline{p_3})(\overline{p_1} \vee \overline{p_2} \vee \overline{p_3})$$

(on peut mettre -ou non- $\wedge$ entre les parenthèses), g peut encore s'exprimer avec les variables a_i par

$$g(a_1, a_2, a_3) = (a_1 \vee a_2 \vee a_3)(a_1 \vee \overline{a_2} \vee \overline{a_3})(\overline{a_1} \vee a_2 \vee \overline{a_3})(\overline{a_1} \vee \overline{a_2} \vee \overline{a_3}).$$

4 Systèmes d'équations Booléennes

Il s'agit de déterminer la valeur des variables booléennes inconnues sachant qu'elles vérifient des équations du type $g = d$ expressions obtenues en combinant ces inconnues au moyen de $(\wedge, \vee, ^{-})$. Un tel système s'écrit

$$(\Sigma) \begin{cases} g_1 = d_1 \\ g_2 = d_2 \\ \quad\vdots \\ g_n = d_n \end{cases}$$

Lemme 4.1 *L'équation* $\mathrm{g} = \mathrm{d}$ *posséde les mêmes solutions que*

$$(\mathrm{g} \wedge \mathrm{d}) \vee (\bar{\mathrm{g}} \wedge \bar{\mathrm{d}}\ ) = 1.$$

Preuve 4.1 *On vérifie que* $(g \wedge d) \vee (\bar{g} \wedge \bar{d}\ )$ *prend la valeur 1 si et seulement si g et d prennent la même valeur.*

Théorème 4.1 *Il existe* $\mathrm{f_1, f_2, \ldots, f_n}$ *(expressions booléennes) telles que* (Σ) *ci-dessus soit équivalent à*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n = 1.$$

Preuve 4.2 *Évidente à partir du lemme 4.1.*
Algorithmiquement*, il suffira alors de mettre* $f_1 \ldots f_n = 1$*, sous forme disjonctive normale pour obtenir*

$$(\Sigma) \Leftrightarrow h_1 \vee \ldots \vee h_p = 1$$

qui donne toutes les solutions

$$h_1 = 1\ ;\ h_2 = 1\ ;\ \ldots;\ h_p = 1.$$

$\boxed{\text{Exemple}}$ Soit à résoudre

$$(\Sigma) \begin{cases} x(y \vee t) = 1 \\ (x \vee \bar{t}\ ) = \bar{y}z \\ \bar{x}z \vee yt = 0 \end{cases}$$

on remplace (Σ) par (Σ_1)

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x(y \vee t) = 1 \\ (x \vee \bar{t}\ )(\bar{y}z) \vee (\bar{x}t(y \vee \bar{z}\ )) = 1 \\ (x \vee \bar{z}\ )(\bar{y} \vee t) = 1. \end{cases}$$

Ensuite, on remplace (δ') par l'équation (E) obtenue en faisant le produit membre à membre des 3 équations, puis en *développant et simplifiant* on trouve

$$(x \wedge y \wedge z \wedge \bar{t}\ ) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge t) = 1$$

qui donne les solutions

$$\left[\begin{array}{llll} x = 1; & y = 1; & z = 1; & t = 0 \\ x = 1; & y = 0; & z = 1; & t = 1 \\ x = 1; & y = 0; & z = 0; & t = 1 \end{array} \right.$$

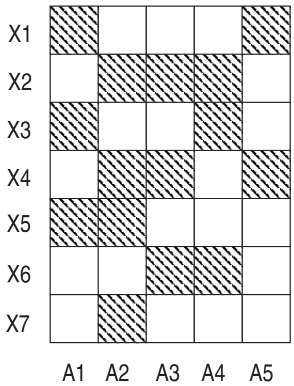
5 Applications aux problèmes de couverture

$\boxed{\text{Exemple}}$ le **CONSEIL d'ADMINISTRATION**

Soit $\{x_1, x_2, \dots x_n\} = E$
Soit $\{A_1, A_2, \dots A_p\} \subset \mathcal{P} \quad (E)$
(les A_i sont des *parties* de E)

$\boxed{\text{Problème}}$ Comment choisir certaines de ces parties de façon à ce que leur réunion contienne tous les éléments $x_1, \dots x_n$? et de plus, de façon à avoir le "minimum" de A_i.

Un exemple : Notons $(x_i \in A_J)$ par le fait d'hachurer la case (i, j).



Soit $a_1, \dots, a_p$ les variables booléennes telles que

$$(q_i = 1) \Leftrightarrow (A_j \text{ doit être pris dans l'union}).$$

Le diagramme se traduit par
$(a_1 \vee a_5)(a_2 \vee a_3 \vee a_4)(a_1 \vee a_4) \wedge (a_2 \vee a_3 \vee a_5)(a_1 \vee a_2)(a_3 \vee a_4)a_2 = 1$
qui développé (par distributivité) et simplifié donne $(a_1a_2a_3) \vee (a_1a_2a_4) \vee (a_2a_4a_5) = 1$
d'où trois solutions

$$(E) = \begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ ; \\ A_1 \cup A_2 \cup A_4 \ ; \\ A_2 \cup A_4 \cup A_5. \end{cases}$$

6 Simplification des formules

Motivation : En calculant sur l'exemple

$$f(x, y, z) = (x\bar{y}\bar{z}) \vee (x\bar{y}z) \vee (xy\bar{z}) \vee (xyz)$$

on constate que :

$$f(x, y, z) = x.$$

Il y a donc nécessité de **simplifier**.

Définition 6.1 *Un produit de projection* $\mathrm{p(a_1, \dots, a_n) = a_i}$ *et de complément de projections* $\mathrm{p(a_1, \dots, a_n) = \bar{a}_j}$ *est dit* **monômes**. *Les* $\mathrm{a_i}$ *et* $\mathrm{\bar{a}_j}$ *sont dits* **facteurs**. *On dira que le monôme* M *divise le monôme* m *ssi tout facteur de* M *est le facteur de* m.

$\boxed{\text{Exemple}}$ $M = a_1\bar{a}_4a_6$ divise $a_1\bar{a}_3\bar{a}_4a_6a_7$.

Théorème 6.1 *Les conditions (*M *divise* m*) et (*$\mathrm{m \leq M}$*) (où l'ordre est celui de l'algèbre de Boole des fonctions booléennes considérées).*
Si $\mathrm{F_n}$ *désigne l'algèbre des fonctions booléen à* n *variables, alors il y a* $\mathrm{3^n}$ *monômes.*

$\boxed{\text{Exemple}}$: Avec $\underline{3}$ variables x, y, z, il y a 27 monônes.

$$\begin{cases} x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \\ xy, yz, zx, \bar{x}y, \bar{y}z, \bar{x}z, x\bar{y}, y\bar{z}, x\bar{z}, \\ xyz, \bar{x}yz, x\bar{y}z, xy\bar{z}, \bar{x}\bar{y}z, x\bar{y}\bar{z}, \bar{x}y\bar{z}, \bar{x}\bar{y}\bar{z}, 1. \end{cases}$$

Voyons maintenant la notion de **polynômes**.

Théorème 6.2 *On appelle **formule polynomiale**, ou* **polynôme***, toute fonction booléenne* f *qui est un* **SUP** *(certains disent une somme) de monômes*

$$\mathrm{f} = \mathrm{m}_1 \vee \mathrm{m}_2 \vee \ldots \vee \mathrm{m}_\mathrm{p}.$$

*On dit la **formule réduite**, s'il n'existe pas* i *et* j *avec* $\mathrm{i} + \mathrm{j}$ *tels que* $\mathrm{m_i}$ *divise* $\mathrm{m_j}$.

$\boxed{\text{Exemple}}$ La fonction de 3 variables, dont la forme canonique disjonctive est

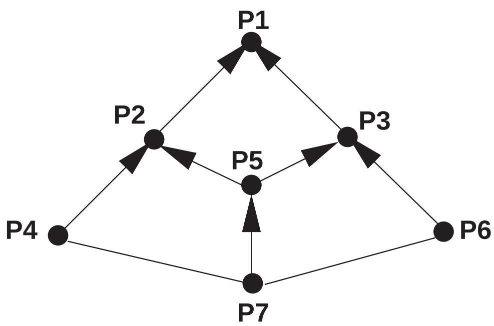
$$f = (abc) \vee (a\bar{b}\bar{c}) \vee (ab\bar{c}) \vee (\bar{a}b\bar{c})$$

posséde 7 formules réduites qui sont

$$\begin{array}{ll} (p_1) & f = (abc) \vee (a\bar{b}\bar{c}) \vee (ab\bar{c}) \vee (\bar{a}b\bar{c}) \\ (p_2) & f = (abc) \vee (a\bar{c}) \vee (\bar{a}b\bar{c}) \\ (p_3) & f = (abc) \vee (a\bar{b}\bar{c}) \vee b\bar{c}) \\ (p_4) & f = (\bar{a}b\bar{c}) \vee (ab) \vee (a\bar{c}) \\ (p_5) & f = (abc) \vee (a\bar{c}) \vee (b\bar{c}) \\ (p_6) & f = (a\bar{b}\bar{c}) \vee (ab) \vee (b\bar{c}) \\ (p_7) & f = (ab) \vee (a\bar{c}) \vee (b\bar{c}). \end{array}$$

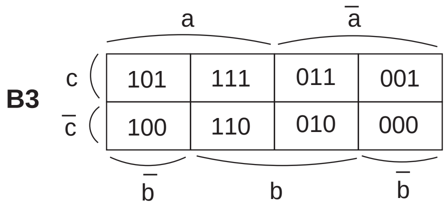
$\boxed{\text{Exercice}}$: Une fonction booléenne ne posséde qu'un nombre fini de formules polynomiales réduites, et la relation "**est plus simple**" munit d'ensemble de ces polynômes *d'une relation d'ordre.*

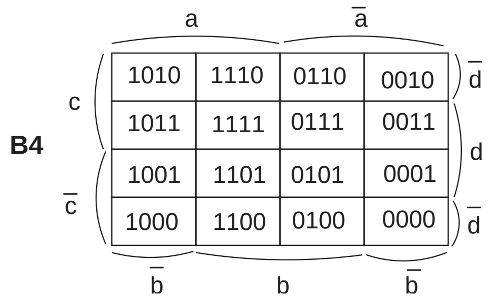
Retour à l'exemple avec le diagramme de Hasse, suivant :



$\boxed{\text{Problème}}$ **Comment trouver ces formes réduites** ?

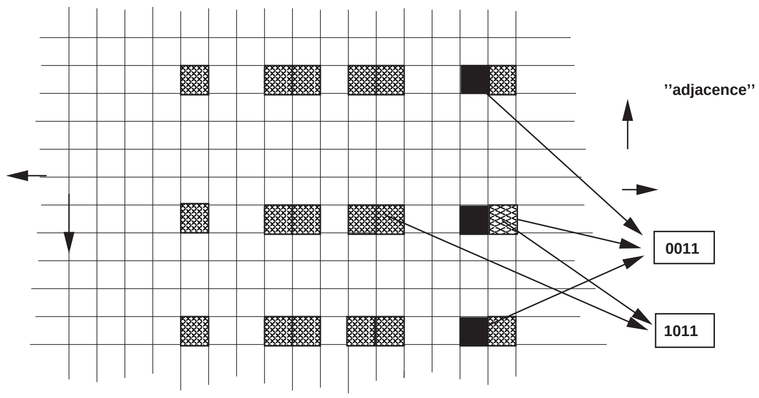
$\boxed{\text{Réponse}}$: C'est la méthode de Karnaugh.
Découverte par Veitzh et améliorée par Karnaugh. Cette méthode permet, à l'aide d'un croquis, de trouver les formules polynomiales minimales pour $\underline{3}$ ou $\underline{4}$ variables.
Comme nous l'avons pratiquée en TD, nous résumons ci-dessous les diagrammes utilisées





cases (a) équivaut à 1ier chiffre =1
cases (b) équivaut à 2ième chiffre =1
cases (c) équivaut à 3ième chiffre =1
cases (d) équivaut à 4ième chiffre =1 (s'il existe).

Remarque sur l'adjacence Cette notion s'entend, avec un **pavage infini**.
2 cases "adjacentes" ne différent que d'un chiffre.



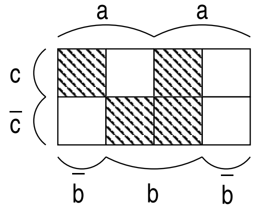
Définition 6.2 (Diagramme de Karnaugh d'une fonction)
On hachure *les cases où la fonction vaut 1.*

Exemples

1) $f \in F_3$

f

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

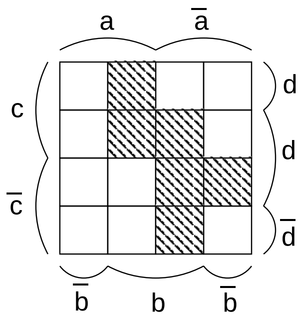


représentation de B_3 (et de f).

2) $g \in F_4$

g

a	b	c	d	g
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1



représentation de B_4 (et de g).

Propriétés Notons $DK(f)$ le diagramme de Karnaugh de la fonction f.

Alors une case hachurée est considérée comme élément de l'ensemble $DK(f)$.

1) $DK(0) =$

2) $DK(1) = B_3$ (ou 4)

3) $f \leq g \Leftrightarrow DK(f) \subset DK(g)$

4) $DK(f \wedge g) = DK(f) \cap DK(g)$

5) $DK(f \vee g) = DK(f) \cup DK(g)$

6) f minterme $\Leftrightarrow$ ($DK(f)$ singleton).

Théorème 6.3 de Karnaugh

Le diagramme de Karnaugh *d'un monôme de* $\mathrm{F_n}$ *qui possède* p *facteurs (avec* $\mathrm{n} = 3$ *ou* $\mathrm{n} = 4$ *et* $\mathrm{p} \leq 3$ *ou* $\mathrm{p} \leq 4$*) est un* ***rectangle*** *formé de* $2^{\mathrm{n-p}}$ *cases adjencentes.*

Reciproquement tout rectangle de $2^{\mathrm{n-p}}$ cases est le diagramme de Karnaugh d'un monômes de p littéraux.

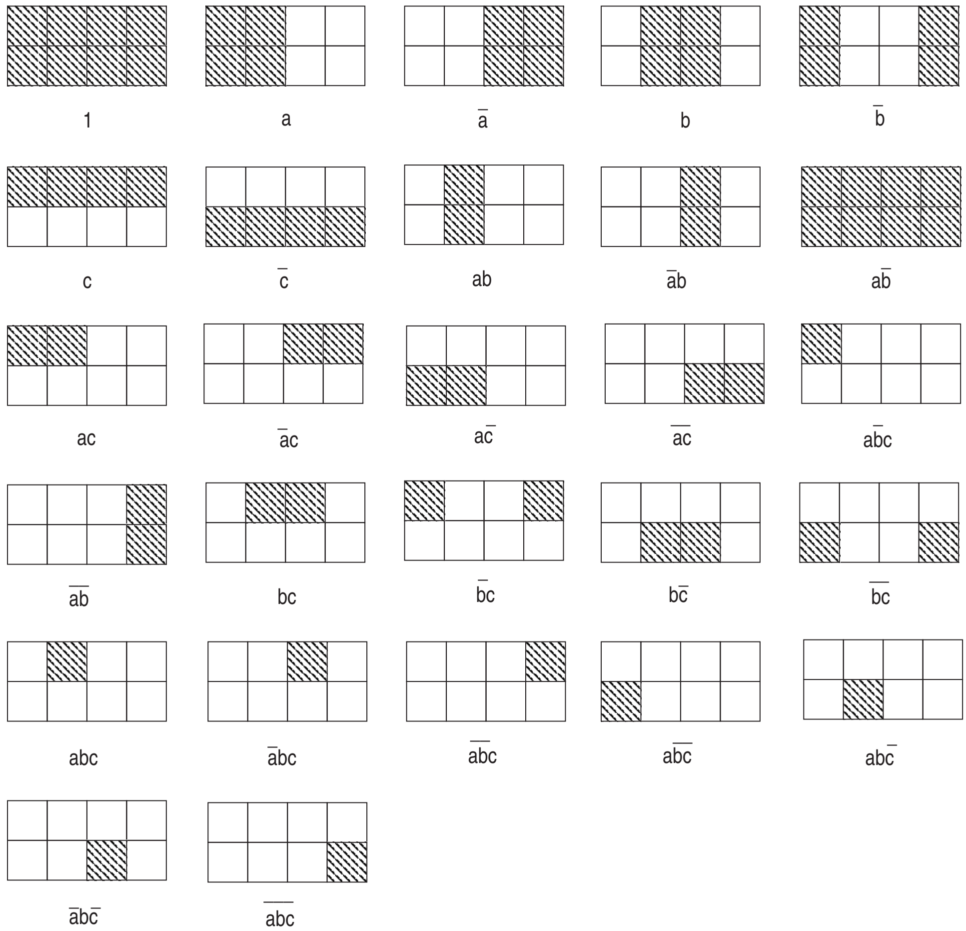
Preuve 6.1 *On le vérifie "à la main ". Faisons le dans le cas de* F_3.

VOIR croquis page 12

Constatez que tout monôme donne un rectangle a $2^0 = 1$, ou $2^1 = 2$ ou $2^2 = 4$ ou $2^3 = 8$ cases adjacentes.

Ces rectangles sont appelés **CELLULES**.

- Le cas F_4 est laissé au lecteur courageux.



Enfin **l'algorithme de SIMPLIFICATION**

Étape 0 : Dessiner le diagramme $DK(f)$ de la fonction étudiée f.

Étape 1 : Repérer les **GROSSES CELLULES** de $DK(f)$: celles *non* contenues dans une plus grosse qu'elle.

Étape 2 : Dessiner un diagramme de K auxilliaire.

Étape 3 : S'il existe une case de $DK(f)$ contenue dans une **SEULE GROSSE CELLULE**, reporter cette cellule sur le diagramme auxilliaire. Recommencer.

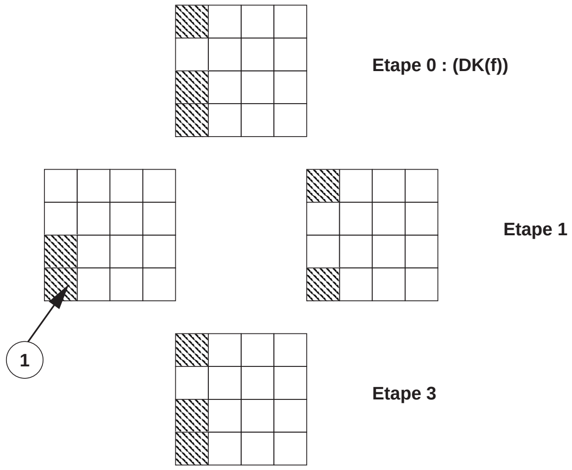
Étape 4 : Si le diagramme auxilliaire est identique à $DK(f)$, passer à l'étape 6, sinon à l'étape 5.

Étape 5 : parmi les grosses cellules ne figurant pas sur le diagramme auxilliaire, en prendre une contenant un maximum de cases de $DK(f)$. Retourner en 4.

Étape 6 : $DK(f)$ et le diagramme auxilliaire étant identiques f est le **SUP** (V) des monômes correspondant aux grosses cellules. Aller en 7.

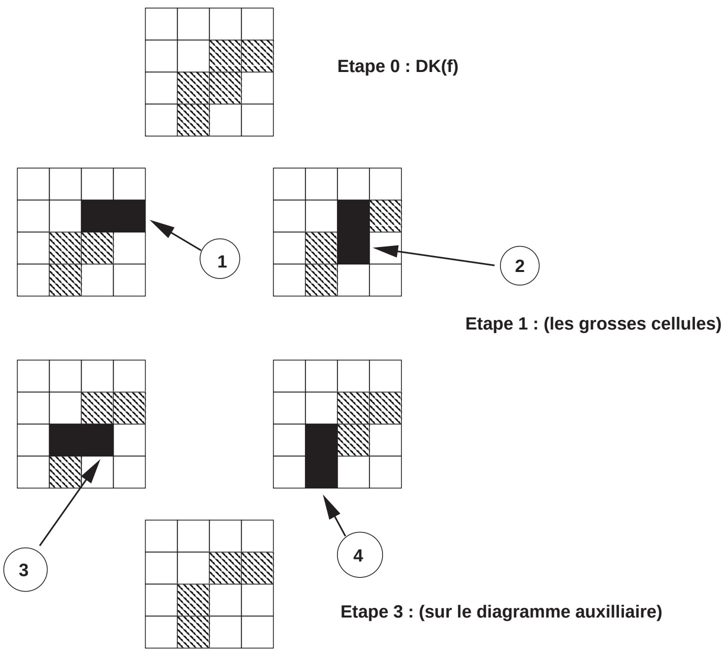
Étape 7 : S'il n'y a pas eu d'étapes arbitraires en 5, la formule de 5 est minimale. Sinon on compare les formules obtenue en faisant tous les choix possibles de l'étape 5. Le choix comportant le moins d'opération donne la formule minimale.

Voyons un exemple :
1)



Après l'étape 3, on passe à l'étape 6 et on obtient $f = (a\bar{b}\bar{c}) \vee (a\bar{b}\bar{d})$.

2)



Étape 5 : On a le choix entre ajouter 2 ou 3. Les deux conduisent à l'étape 6 et on obtient :

$f = (abc) \vee (\bar{a}cd) \vee (\bar{a}bd)$

$f = (ab\bar{c}) \vee (\bar{a}cd) \vee (b\bar{c}d)$

Étape 7 : Les deux formules demandent autant d'opérations, elles sont toutes deux minimales.