Université de Savoie Année 05/06

Mathématiques générales : algèbre (MATH303 – 6 ECTS)

FEUILLE D'EXERCICES 6

Exercice 1 Soient E un espace vectoriel sur K, f un endomorphisme de E et n un entier ($n > 0$) tel que : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.

1. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille : $\mathcal{F} = \{x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{n-1}(x)\}$ soit libre.
2. On suppose que E est de dimension n, écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 2 Soient t un réel et $M_t = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{i,i} = t$ pour i=1,2,...,n.

1. Sans calculer son polynôme caractéristique, montrer que $\lambda = t - 1$ est valeur propre de M_t. Quelle est la multiplicité de cette valeur propre.
2. Déterminer toute les valeurs propres de M_t (On utilisera la trace de M_t).

Exercice 3 Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de E, u un endomorphisme de E, $A = mat(u, (e_i))$ et $P(\lambda) = \prod_{i=1}^{i=n}(\lambda - \lambda_i)$ le polynôme caractéristique de u. On rappelle qu'il existe une base $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

1. On pose $n_j = u - \lambda_j Id$, montrer que : $n_j \circ n_k = n_k \circ n_j$.
2. Démontrer que : $(n_1 \circ n_2 \circ \cdots \circ n_k)(a_j) = 0$ pour $1 \leq j \leq k \leq n$.
3. Démontrer le théorème de Caley-Hamilton.

Exercice 4 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes et suivant le cas diagonaliser ou triangulariser la matrice.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Determiner une base U, V, W de $\mathbb{R}^3$ telle que dans cette base la matrice A devienne $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & x & - & 3y & + & z \\ y'(t) & = & 2x & - & 4y & + & z \\ z'(t) & = & -x & + & y & - & 2z \end{array}$$

Exercice 6 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base U, V, W de $\mathbb{R}^3$ telle que dans cette base la matrice A devienne $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Résoudre l'équation différentielle suivante : $x'''(t) - x''(t) - x'(t) + x(t) = 0$.

Exercice 7 Soient n un entier non nul, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, f une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^n$ et g une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. Soient $A = (f(e_i, e_j))$ et $B = g((e_i, e_j))$ les matrices de f et de g, on se propose de trouver un changement de base de matrice de passage P tel que ${}^tP\ A\ P$ et ${}^tP\ B\ P$ soient diagonales.

1. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que : ${}^tQ\ A\ Q = D$. Démontrer que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice Δ diagonale réelle telle que : $\Delta^2 = D$.

2. On pose $B' = \Delta^{-1}\ {}^tQ\ B\ Q\ \Delta^{-1}$, démontrer qu'il existe une matrice orthogonale Q' telle que ${}^tQ'\ B'\ Q'$ soit diagonale. On pose : $P = Q\ \Delta^{-1}\ Q'$, calculer : ${}^tP\ A\ P$.

Exercice 8 Soient $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées à coéfficients réels et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

1. On suppose que dans une base donnée, f est représentée par une matrice A telle que : $A = -{}^tA$. Montrer que l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ est représenté dans cette même base par une matrice B symétrique .

2. B est considérée comme la matrice d'une forme quadratique q, montrer que cette forme est négative .

3. Montrer que les valeurs propres de B sont des réels négatifs ou nuls.

4. On note P le polynôme caractéristique de f et R celui de f^2.
   Montrer que $R(\lambda^2) = det[(A - \lambda I)({}^tA + \lambda I)]$ et en déduire que $[P(\lambda)]^2 = (-1)^n R(\lambda^2)$; Que peut on en déduire sur les valeurs propres de f sur $\mathbb{C}$? Montrer que 0 est valeur propre d'ordre k de f^2 ssi 0 est valeur propre d'ordre k de f.

5. Soit f un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer A^2 et son polynôme caractéristique. En déduire le polynôme caractéristique de A.
- Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de f^2 soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

  Ecrire la matrice de f dans cette base.