Université de Savoie Année 05/06

Mathématiques générales : algèbre (MATH303 – 6 ECTS)

FEUILLE D'EXERCICES 5

Exercice 1 Soient K un corps, E un espace vectoriel de dimension n sur K, $\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ une famille de p éléments de E ($1 \leq p \leq n$) et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E. On note φ l'application de E dans K^p, définie par : $\varphi(x) = (f(a_1, x), f(a_2, x), \cdots, f(a_p, x))$. Enfin pour $a \in E$, on notera $f(a, .)$ la forme linéaire : $x \to f(a, x)$.

1. Démontrer que $\{f(a_1, .), f(a_2, .), \cdots, f(a_p, .)\}$ est un famille libre de E^* si et seulement si $\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ est un famille libre de E.
2. On suppose que φ est surjective.
   - Démontrer que pour tout indice i ($1 \leq i \leq p$), il existe $b_i \in E$ tel que $f(a_j, b_i) = \delta_{ij}$ pour $j = 1, 2, \cdots, p$.
   - En déduire que la famille $\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ est libre.
3. On suppose que la famille $\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ est libre, on la complète en une base $\mathcal{B}$ de E, $\{a_1, a_2, \cdots, a_p, a_{p+1}, \cdots, a_n\}$, et on note $\{a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*\}$ sa base duale.
   - Démontrer que pour tout indice i ($1 \leq i \leq p$) il existe $b_i \in E$ tel que $f(b_i, .) = a_i^*$. Calculer $\varphi(b_i)$ pour $1 \leq i \leq p$.
   - En déduire que φ est surjective.

Exercice 2 Soient a, b, c, d, e, f des réels et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$f(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f$.

1. Soit P la matrice orthogonale : $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ tel que : ${}^tP \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} P$ soit diagonale, on pose $t = \tan\theta$, démontrer que : ${}^tP \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} a + ct & 0 \\ 0 & b - ct \end{pmatrix}$.
2. On suppose que la forme quadratique $q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$ est non dégénérée.
   - Démontrer qu'il existe un point (x_0, y_0) qui est centre de symétrie de la courbe Γ d'équation $f(x, y) = 0$.
   - On pose $x = x_0 + X$ et $y = y_0 + Y$, calculer $f(x, y)$ en fonction de X, Y et $f(x_0, y_0)$.
   - Que devient l'équation de Γ après la translation d'axes de b) et la rotation d'axes définie au A, quelle est la nature de la courbe Γ.

- Etudier les courbes d'équation :
  $a)$ $5x^2 + 5y^2 - 6xy + 10x - 6y = -4$
  $b)$ $-2x^2 + 2y^2 + 4\sqrt{3}xy = 1$.

3. On suppose que la forme quadratique q est dégénérée.

   - On suppose que : $ae = dc$, déterminer Γ.
   - On suppose que : $ae \neq dc$, en vous inspirant de la méthode précédente, determiner Γ.

Exercice 3 Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur K et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On note g l'isomorphisme de E dans E^* défini par $g(x) = f(., x)$.

1. Soit u un endomorphisme de E, démontrer qu'il existe un unique endomorphisme u^* de E, tel que : $(\forall (x,y) \in E \times E) \quad f(u(x), y) = f(x, u^*(y))$.

2. Démontrer que l'adjoint u^* de u vérifie : $u^* = g^{-1} \circ^t u \circ g$.

3. Soient u et v des endomorphismes de E et $\lambda \in K$, démontrer que :
   $(u+v)^* = u^* + v^*$ $\quad (\lambda u)^* = \lambda u^*$ $\quad (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ $\quad rg\, u^* = rg\, u$ $\quad det\, u^* = det\, u$