Université de Savoie   Année 05/06

Mathématiques générales : algébre (MATH 303 – 6ECTS)

FEUILLE D'EXERCICES 4

Exercice 1 Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K, F et G deux sous-espaces vectoriels de E et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $E \times E$. On note g l'isomorphisme de E sur E^* défini par $g(x) = f(.,x)$ et $H = \{y^* \in E^*/(\forall x \in F)(y^*(x) = 0)\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E^*. Soit $\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ une base de F que l'on complète en une base $\{a_1, a_2, \cdots a_p, \cdots, a_n\}$ de E. Montrer que : $\{a^*_{p+1}, \cdots, a^*_n\}$ une base de H.
2. Soit $y \in F^\perp$, montrer que $g(y) \in H$.
3. Soit $y^* \in H$ fixé et $x \in E$ tels que : $g(x) = y^*$ (un tel x existe car g est bijective). Montrer que $x \in F^\perp$.
4. Déduire de ce qui précède que dim $H =$ dim $F^\perp$ et que dim $F^\perp = n$- dim F. Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.
5. Démontrer que : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 2 Soient $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base d'un espace vectoriel E et f une forme bilinéaire symétrique définie positive.

1. On va montrer qu'il existe une base de E orthogonale (pour f) $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ de la forme :

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & e_1 \\ a_2 & = & e_2 + \lambda_{12}\, a_1 \\ a_3 & = & e_3 + \lambda_{13}\, a_1 + \lambda_{23}\, a_2 \\ \cdots & = & \cdots \\ a_n & = & e_n + \lambda_{1n}\, a_1 + \cdots + \lambda_{n-1\, n}\, a_{n-1} \end{array}$$

   Pour tout entier k, on note $\mathcal{P}(k)$ l'ensemble des propriétés :

   - $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ est une famille libre de E
   - $a_i \perp a_j$ pour $(1 \leq i < j \leq k)$
   - $\exists \lambda_{i,j}$ $(1 \leq i \leq k-1)$ $(2 \leq j \leq k)$ tels que :

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & e_1 \\ a_2 & = & e_2 + \lambda_{12}\, a_1 \\ a_3 & = & e_3 + \lambda_{13}\, a_1 + \lambda_{23}\, a_2 \\ \cdots & = & \cdots \\ a_k & = & e_k + \lambda_{1k}\, a_1 + \cdots + \lambda_{k-1\, k}\, a_{k-1} \end{array}$$

Montrer par récurrence sur k $(1 \leq k \leq n)$ que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. En déduire une base de E, orthonormale (pour f). (Ce procédé s'appelle l'orthonormalisation de Schmidt)

Exercice 3 On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\varphi(A, B) = trAB$ ($trAB$ designe la trace de la matrice AB).

1. Démontrer que : $trAB = trBA$.
2. Démontrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.
3. Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, formé de matrices symétriques. Démontrer que la restriction de φ à $\mathcal{S}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
4. Démontrer que $\mathcal{S}^\perp$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 Soient E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\{l_1, l_2 \cdots l_n\}$ n formes linéaires sur E, linéairement indépendantes.

1. Démontrer que : $q(x) = \sum_{i=1}^{n} (l_i(x))^2$ est une forme quadratique définie positive (E étant un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$).
2. Démontrer que : $q(x) = \sum_{i=1}^{n} l_i(x)\, \overline{l_i(x)}$ est une forme quadratique hermitienne définie positive .

Exercice 5 Décomposer en somme de carrés les formes quadratiques suivantes :

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1\, x_2 - 4x_2\, x_3 - 4x_1\, x_3$.
2. $x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1\, x_2 + 8x_1\, x_3$.
3. $4x_1\, x_2 + 4x_2\, x_3 + 4x_3\, x_4 + 4x_4\, x_1$.

Exercice 6 Soient $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\{e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*\}$ la base duale . On définit la forme bilinéaire symétrique f par $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, e_i^*(x)\, e_i^*(y) \qquad (a_i \in \mathbb{R})$.

1. Ecrire la matrice de f par rapport à la base $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$. Quelle propriété possède cette base par rapport à f ?
2. Soit q la forme quadratique définie par $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, (e_i^*(x))^2$. Déterminer sa forme polaire. Démontrer que le noyau de f est l'ensemble des x de E tels que $e_i^*(x) = 0$ pour tous les indices i tels que $a_i \neq 0$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique on considère la forme quadratique $q(x_1, x_2, x_3) = 4\, x_1x_2 + 8\, x_1x_3 + 4\, x_2x_3$. Décomposer q en somme de carrés . En utilisant ce qui précède déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q . Quelle est la matrice de q par rapport à cette base ?
4. Même question pour la forme quadratique : $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2\, x_2^2 + 2\, x_3^2 + 3\, x_4^2 + 2\, x_1x_2 + 2\, x_1x_3 + 2\, x_1x_4 + 4\, x_3x_4$.