Université de Savoie Année 05/06

Mathématiques générales : algèbre (MATH303 – 6 ECTS)

FEUILLE D'EXERCICES 2

Exercice 1 On désigne par $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$ ($n \geq 2$) et par $\mathcal{A}_n$ le sous-groupe des permutations paires de $\{1, 2, \cdots, n\}$.

1. Démontrer que pour $n = 2$, $\mathcal{S}_n$ est commutatif.
2. Démontrer que si A et B sont deux parties de $\{1, 2, \cdots, n\}$ stables par la permutation σ, alors $A \cap B$ est stable par σ.
3. On suppose $n \geq 3$. Soit σ une permutation qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{S}_n$. (En utilisant 2) et des transpositions bien choisies, démontrer que $\sigma = Id$.
4. Démontrer que si $n = 3$, $\mathcal{A}_n$ est commutatif.
5. On suppose $n \geq 4$. Soit σ une permutation qui commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}_n$. En utilisant des cycles de longueur 3, démontrer que $\sigma = Id$.

Exercice 2 On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. Démontrer que toute transposition (i, j) ($i \neq j$) se décompose en produit de transpositions de la forme : $(k, k+1)$ où $1 \leq k \leq n-1$. En déduire que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions :
$$(1, 2), (2, 3), \cdots, (n-1, n)$$
2. Démontrer que $\mathcal{S}_n$ est engendré par les transpositions :
$$(1, 2), (1, 3), \cdots, (1, n)$$
3. Soit $t = (1, 2)$ et $c = (1, 2, 3, \cdots, n)$; calculer c^k et $c^k t c^{-k}$ pour $1 \leq k \leq n-2$. En déduire que $\mathcal{S}_n$ est engendré par t et c.

Exercice 3 Soient p et q deux entiers non nuls, A un matrice carrée d'ordre p, B une matrice carrée d'ordre q, C une matrice à p lignes et q colonnes et M la matrice par blocs de la forme :
$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Démontrer que det$M$ =det$A$det$B$.

Exercice 4 Calculer les déterminants suivants ($\omega = e^{2i\pi/3}$):

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

Exercice 5 On se propose de calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & . & . & \text{n-1} & 1 \\ 1 & x & 3 & . & . & \text{n-1} & 1 \\ 1 & 2 & x & . & . & \text{n-1} & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 2 & 3 & . & . & x & 1 \\ 1 & 2 & 3 & . & . & \text{n-1} & 1 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que d_n est un polynôme de degré n-1 en x.
2. Trouver les racines de ce polynôme.
3. En déduire D_n.

Exercice 6 Soient K un corps commutatif et $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$. On note A_{ij} la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

1. Soient i et j deux indices fixés compris entre 1 et n. Suivant les valeurs de i et de j, calculer : $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}\ a_{ik}\ \det A_{jk}$ (interpréter cette expression comme le développement d'un déterminant par rapport à la j-ème ligne). En déduire que :

$$A^t\Big((-1)^{i+j}\det A_{ij}\Big) = (\det A)\ Id.$$

2. On suppose A inversible, démontrer la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\Big((-1)^{i+j}\det A_{ij}\Big).$$