Mathématique

Série n° 1 – Géométrie dans le plan et l'espace

Ex 1.1 – On se donne dans le plan les points $A = (-1, 1)$, $B = (1, 5)$ et $C = (3, 2)$.
Trouver une équation cartésienne de la droite (AB) et déterminer le point d'intersection Ω de (AB) avec la droite Δ passant par C et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ex 1.2 – Si $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ et $C = (2, 3)$ dans $\mathbf{R}^2$, calculer l'aire du triangle ABC.

Ex 1.3 – (Centre du cercle circonscrit)
Montrer que les trois médiatrices d'un triangle non aplati sont concourantes.

Ex 1.4 – (Orthocentre)
Montrer que les trois hauteurs d'un triangle non aplati sont concourantes.

Ex 1.5 – Dans le plan orienté, on considère les points $A = (3, 5)$, $B = (-2, 1)$, $C = (1, 1)$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1) Donner des équations cartésiennes de
   - la droite (AB) ;
   - la droite passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{u}$;
   - le droite dirigée par $\vec{u}$ et passant par B.
2) Calculer la distance de C à la droite (AB).
3) Calculer l'aire du triangle ABC.
4) Calculer une valeur approchée de la mesure dans $[0, 2\pi[$ de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})$.

Ex 1.6 – Soit ABC un triangle non aplati dans le plan.
On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et on désigne respectivement par α, β, γ les mesures géométriques de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC dont l'aire est noté S, démontrer que $2S = ab \sin\gamma$ et en déduire que $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R = \dfrac{abc}{2S}$.

Ex 1.7 – Si ABC est un triangle du plan et I le milieu de (A, B), montrer que

$$CA^2 + CB^2 = 2IA^2 + 2IC^2 = 2IC^2 + \frac{AB^2}{2} \quad \text{et} \quad CA^2 - CB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}.$$

Ex 1.8 – (Formule de Jemchid AL KACHI - Kashan (Perse), vers 1380–1429)
Étant donné trois points distincts A, B, C du plan, on pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et on désigne par $\alpha \in [0, \pi]$ la mesure géométrique de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Prouver alors la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Ex 1.9 – Soient ABC et $A'B'C'$ des triangles dans l'espace dont on note G et G' les centres de gravité respectifs. Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Ex 1.10 – Montrer que pour tous $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^3$, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{4}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2\right)$.

Ex 1.11 – Calculer dans l'espace la distance de l'origine O à la droite passant par les points $A = (1, 0, 1)$ et $B = (0, 1, 1)$.

Ex 1.12 – Soient A, B, C et D quatre points distincts de $\mathbf{R}^3$.
En utilisant le produit mixte, déterminer la distance entre les droites (AB) et (CD).

Ex 1.13 – Pour tous $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbf{R}^3$, calculer $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)$ et $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w}$. Conclusion ?

Ex 1.14 – On considère les points $A = (3, 1, -1)$, $B = (2, 4, 1)$ et $C = (4, 5, 4)$ de l'espace.

1) Calculer la mesure géométrique de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
2) Calculer l'aire du triangle ABC.

Ex 1.15 – Dans l'espace, soient les points $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, 3, -5)$, $C = (3, -1, -4)$ et $D = (1, 1, 5)$ ainsi que les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

1) Donner des équations cartésiennes
   - du plan (ABC) ;
   - du plan passant par D et dont un vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
   - du plan passant par A et donc un vecteur normal est $\vec{u}$;
   - du plan médiateur du bipoint (A, B).
2) Calculer la distance de D au plan (ABC).
3) Calculer la distance de D à la droite (AB).
4) Calculer le mesure géométrique de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
5) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Ex 1.16 – On se donne dans l'espace orienté un cube $ABCDEFGH$ tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ soit une base orthonormée directe et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$.

1) En désignant par I le milieu de (B, C), trouver un représentant de chacun des vecteurs

$$\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{FG}, \quad \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AH}.$$

2) Résoudre en M chacune des équations suivantes :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}.$$

Ex 1.17 – (Formule de HÉRON - Alexandrie ? (Égypte), vers 10–75)

1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté, prouver que

$$\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\|^2 + \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 \times \left\|\vec{v}\right\|^2 \quad \text{(identité de Lagrange).}$$

Indication : on pourra toujours se ramener au cas où $\vec{u} = \lambda \vec{i}$ et $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

2) Si ABC est un triangle dans l'espace tel que $AB = 4$, $AC = 5$ et $BC = 6$, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|^2$, puis l'aire de ABC.

3) Généraliser le calcul ci-dessus avec $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$ pour en déduire que l'aire d'un triangle de côtés a, b, c et de demi-périmètre p est égale à

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Ex 1.18 – (Distance sur la Terre)

La distance entre deux points A et B sur un sphère $\mathcal{S}$ de centre O est la longueur du plus court des deux arcs du grand cercle défini par l'intersection de $\mathcal{S}$ et du plan passant par les trois points A, B et O (faire un dessin). Pour calculer cette distance, notons $R > 0$ le rayon de $\mathcal{S}$ et $\alpha \in [0, \pi]$ la mesure géométrique de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

1) En munissant l'espace orienté d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ à l'aide des coordonnées sphériques de A et B, notées respectivement (R, θ_1, φ_1) et (R, θ_2, φ_2).

2) En déduire $\cos\alpha$ en fonction de θ_1, φ_1, θ_2, φ_2 et R.

3) Application : sachant que le rayon moyen de la Terre vaut 6367 km, quelle est la distance entre Paris (48 N, 2 E) et Canberra (35 S, 149 E) ?