La programmation linéaire : une introduction

- Qu'est-ce qu'un programme linéaire ?
- Exemples :
  - allocation de ressources
  - problème de recouvrement
- Hypothèses de la programmation linéaire
- Intérêt pratique de la programmation linéaire ?
- Interprétation géométrique et résolution graphique
- Résultat d'une optimisation linéaire

Qu'est-ce qu'un programme linéaire ?

Un **programme linéaire** (PL) est un problème d'optimisation consistant à maximiser (ou minimiser) une fonction objectif linéaire de n variables de décision soumises à un ensemble de contraintes exprimées sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires.

À l'origine, le terme programme a le sens de planification opérationnelle mais il est aujourd'hui employé comme synonyme de problème (d'optimisation).

La terminologie est due à G. B. Dantzig, inventeur de l'algorithme du simplexe (1947).

Écriture mathématique

$$\begin{array}{llcll}
\text{Max (Min)} & z = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\
\text{s.c.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & i \in I \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j & \geq & b_k & k \in K \subseteq \{1, \ldots, m\} \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j & = & b_r & r \in R \subseteq \{1, \ldots, m\}
\end{array}$$

Les ensembles I, K, et R sont disjoints et $I \cup K \cup R = \{1, \ldots, m\}$.

L'abréviation s.c. signifie «sous les contraintes».

Terminologie

- Les variables $x_1, \ldots, x_n$ sont appelées **variables de décision** du problème.
- La fonction linéaire à optimiser est appelée **fonction objectif** (ou parfois fonction objet).
- Les **contraintes** prennent la forme d'équations et d'inéquations linéaires.
- Les contraintes de la forme

  $$l_j \leq x_j \leq u_j \qquad l_j, u_j \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

  sont appelées des **contraintes de bornes**. Elles se résument souvent à des contraintes de non-négativité $x_i \geq 0$. Elles sont généralement traitées de manière spéciale par les algorithmes de résolution.

Exemple : problème d'allocation de ressources

Une entreprise produit des câbles de cuivre de 5 et 10 mm de diamètre sur une seule ligne de production imposant les contraintes suivantes.

- Le cuivre disponible permet de produire 21 000 mètres de câble de 5 mm de diamètre par semaine.
- Un mètre de câble de 10 mm de diamètre nécessite 4 fois plus de cuivre qu'un mètre de câble de 5 mm de diamètre.

De plus, ayant une bonne connaissance de la demande, la production hebdomadaire de câble de 5 mm est limitée à 15 000 mètres et la production de câble de 10 mm ne doit pas dépasser les 40% de la production totale.

Les câbles sont vendus respectivement 50 frs et 200 frs le mètre.

Que doit produire l'entreprise afin de maximiser son chiffre d'affaires hebdomadaire ?

Définissons deux **variables de décision**

x_1 : le nombre de milliers de mètres de câble de 5 mm de diamètre produits chaque semaine,

x_2 : le nombre de milliers de mètres de câble de 10 mm de diamètre produits chaque semaine.

Le chiffre d'affaires associé à une production (x_1, x_2) est

$$z = 50\,000x_1 + 200\,000x_2.$$

Il ne faut pas dépasser les capacités de production

$$x_1 + 4x_2 \leq 21$$

et satisfaire les contraintes de demande

$$x_2 \leq \frac{4}{10}(x_1 + x_2)$$

$$x_1 \leq 15$$

Finalement on ne peut pas produire des quantités négatives

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Problème d'allocation de ressources : modèle

Pour maximiser le chiffre d'affaires de la vente, il faut déterminer les valeurs x_1 et x_2 solution du programme linéaire

$$\begin{array}{llrcrcr}
\text{Max} & z = & 50\,000x_1 & + & 200\,000x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 21 \\
 & & -4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 0 \\
 & & x_1 & & & \leq & 15 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Exemple : problème de recouvrement

Données : Les demandes journalières en chauffeurs dans une entreprise de transport

Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
13	18	21	16	12	25	9

Les chauffeurs travaillent cinq jours d'affilée (et peuvent donc avoir leurs deux jours adjacents de congé n'importe quand dans la semaine).

Objectifs : Déterminer les effectifs formant les sept équipes possibles de chauffeurs de manière à

- couvrir tous les besoins,
- engager un nombre minimum de chauffeurs.

Problème de recouvrement : modélisation

Variables de décision : On associe une variable de décision à chacune des sept équipes possibles

x_1 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du lundi (repos le samedi et le dimanche),

x_2 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du mardi,

...

x_7 : nombre de chauffeurs dans l'équipe du dimanche.

Fonction objectif : On veut minimiser le nombre total de chauffeurs engagés

$$z = x_1 + \ldots + x_7$$

Contraintes : Le nombre de chauffeurs présents chaque jour doit être suffisant

$$\begin{array}{lllllllllllllll}
x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 13 \quad \text{(lundi)} \\
x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 18 \quad \text{(mardi)} \\
 & & & & & & & & \ldots & & & & & & \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 9 \quad \text{(dimanche)}
\end{array}$$

Contraintes de bornes : Le nombre de chauffeurs dans chaque équipe doit non seulement être non négatif mais également entier !

$$x_i \geq 0 \text{ et entier}, \; i = 1, \ldots, 7.$$

Problème de recouvrement : formulation

$$\begin{array}{llccccccccccccccccl}
\text{Min} & z = & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & & & & & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 13 & \\
 & & x_1 & + & x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 18 & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 21 & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & + & x_7 & \geq & 16 & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & & & \geq & 12 & \\
 & & & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & & \geq & 25 & \\
 & & & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & \geq & 9 & \\
 & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & , & x_7 & \geq & 0 & \text{entiers}
\end{array}$$

Ce problème n'est pas un PL mais un **programme linéaire en nombres entiers** (PLNE) !

Les hypothèses de la programmation linéaire

1. La linéarité des contraintes et de la fonction objectif.
   - L'additivité des effets.
   - La proportionnalité des gains/coûts et des consommations de ressources.
2. La divisibilité des variables.
3. La détermination des données.

Lors de la modélisation d'un problème réel, l'impact de ces hypothèses sur la validité du modèle mathématique doit être étudié. Cette analyse peut mener à choisir un modèle différent (non linéaire, stochastique, ...) et est essentielle pour la phase d'interprétation des résultats fournis par le modèle.

Intérêt pratique de la programmation linéaire

1. Malgré les hypothèses sous-jacentes assez restrictives, de nombreux problèmes peuvent être modélisés par des programmes linéaires. Ces problèmes apparaissent dans des domaines aussi variés que
   - la gestion de production,
   - l'économie,
   - la distributique,
   - les télécommunications,
   - ...
2. Il existe des algorithmes généraux (et des codes les mettant en œuvre) permettant de résoudre efficacement des programmes linéaires (même lorsque le nombre de variables et de contraintes est important).

Interprétation géométrique

- L'ensemble des solutions d'une inéquation (linéaire) correspond à un demi-espace dans $\mathbb{R}^n$ (un demi-plan dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'une équation (linéaire) correspond à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ (une droite dans $\mathbb{R}^2$).
- L'ensemble des solutions d'un système d'équations et d'inéquations (linéaires) correspond à l'intersection des demi-espaces et des hyperplans associés à chaque élément du système.
- Cette intersection, appelée **domaine admissible**, est convexe et définit un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$ (une région polygonale dans $\mathbb{R}^2$).

Terminologie

- Une **solution** est une affectation de valeurs aux variables du problème.
- Une solution est **admissible** si elle satisfait toutes les contraintes du problème (y compris les contraintes de bornes).
- La **valeur** d'une solution est la valeur de la fonction objectif en cette solution.
- Le **domaine admissible** D d'un PL est l'ensemble des solutions admissibles du problème.
- La **solution optimale d'un PL** (si elle existe) est formée des valeurs optimales des variables du problème et de la valeur associée de la fonction objectif.

Résolution graphique dans le plan

- Les lignes de niveau de la fonction objectif sont des droites parallèles dans $\mathbb{R}^2$.
- Il existe des solutions admissibles de valeur z si la ligne de niveau associée à cette valeur intersecte le domaine admissible D du problème.
- Pour déterminer la valeur maximale atteignable par une solution admissible, il suffit de faire glisser le plus loin possible une ligne de niveau de la fonction objectif, dans le sens du gradient, jusqu'à ce qu'elle touche encore tout juste D.
- Les points de contact ainsi obtenus correspondent aux solutions optimales du PL.

Résultat d'une optimisation linéaire

Le domaine admissible d'un PL peut être

- vide. Dans un tel cas le problème est **sans solution admissible** (et ne possède évidemment pas de solution optimale).
- borné (et non vide). Le problème possède toujours au moins une solution optimale, quelle que soit la fonction objectif.
- non borné Dans ce cas, selon la fonction objectif choisie,
  - le problème peut posséder des solutions optimales ;
  - il peut exister des solutions admissibles de valeur arbitrairement grande (ou petite). Dans un tel cas le PL n'admet pas de solution optimale finie et est dit **non borné**.

Objectifs

- Connaître les différents éléments d'un PL : variables de décision, d'écart, fonction objectif, contraintes, contraintes de bornes.
- Être capable de modéliser de petits problèmes : identifier les variables du problème, écrire la fonction objectif et les contraintes, discuter les hypothèses de la PL.
- Être capable de résoudre graphiquement un PL à 2 variables de décision : déterminer le domaine admissible et les lignes de niveau de la fonction objectif, identifier la solution optimale.

Les différentes formes d'un programme linéaire

- Formes canonique et standard
- Notations matricielles
- Pourquoi des formes particulières ?
- Équivalence des formulations canonique et standard
- Règles de transformation particulières
- Exemple : approximation de Chebychev

Forme générale d'un programme linéaire

$$\begin{array}{llll} \text{Opt} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{s.c.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & & i \in I \subseteq \{1, \ldots, m\} \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geq b_k & & k \in K \subseteq \{1, \ldots, m\} \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j = b_r & & r \in R \subseteq \{1, \ldots, m\} \\ & l_j \leq x_j \leq u_j & & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

- Opt $=$ Max ou Min,
- I, K et R disjoints et $I \cup K \cup R = \{1, \ldots, m\}$,
- $l_j = -\infty$ et $u_j = +\infty$ possibles.

Forme canonique d'un programme linéaire

$$\begin{array}{llll} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{s.c.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

- Problème de maximisation
- Toutes les contraintes sont du type "$\leq$"
- Toutes les variables sont non négatives

Forme standard d'un programme linéaire

$$\begin{array}{llll} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & \\ \text{s.c.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & & i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & & j = 1, \ldots, n \end{array}$$

- Problème de maximisation
- Toutes les contraintes sont des équations
- Toutes les variables sont non négatives

Forme canonique $\rightarrow$ forme standard

On passe de la forme canonique à la forme standard en ajoutant dans chaque contrainte i une **variable d'écart** x_{n+i}.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + x_{n+i} = b_i$$

$$\begin{array}{lllll} \text{Max} & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & + \sum_{i=1}^{m} 0 x_{n+i} & & \\ \text{s.c.} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & + \; x_{n+i} & = b_i & i = 1, \ldots, m \\ & & x_j & \geq 0 & j = 1, \ldots, n+m \end{array}$$

Pourquoi des formes particulières ?

- Vérifier les prérequis des méthodes de résolution.
- Simplifier la présentation des algorithmes.

Cependant...

Les définitions des formes canonique et standard varient parfois d'un auteur à l'autre !

Dans ce cours, la forme de référence sera la forme canonique présentée ci-dessus, dont les variables seront appelées les variables de décision du problème et la forme standard sera toujours obtenue par l'ajout de variables d'écart au problème canonique.

Notation matricielle : forme canonique

$$\begin{array}{llrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{cx} & & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{Ax} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{llrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{c_D x_D} & & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{Ax_D} & \leq & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x_D} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

où

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c_D} = (c_1 \ \ldots \ c_n), \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_D} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Notation matricielle : forme standard

$$\begin{array}{llrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{cx} & & \\ \text{s.c.} & & [\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}]\,\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \left[\begin{array}{llrcrcl} \text{Max} & z = & \boldsymbol{c_D x_D} & + & 0\boldsymbol{x_E} & & \\ \text{s.c.} & & \boldsymbol{Ax_D} & + & \boldsymbol{Ix_E} & = & \boldsymbol{b} \\ & & \boldsymbol{x_D} & , & \boldsymbol{x_E} & \geq & \boldsymbol{0} \end{array}\right]$$

où

$$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c_D} \mid \boldsymbol{c_E}) = (\boldsymbol{c_D} \mid \boldsymbol{0}) = (c_1 \ \ldots \ c_n \mid 0 \ \ldots \ 0)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_D} \\ - \\ \boldsymbol{x_E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ - \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Notation matricielle : exemple

Pour le problème d'allocation de ressources

$$\begin{array}{llrcrcr} \text{Max} & z = & 50\,000x_1 & + & 200\,000x_2 & & \\ \text{s.c.} & & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 21 \\ & & -4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 0 \\ & & x_1 & & & \leq & 15 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

on a

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 50\,000 & 200\,000 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Remarques sur les notations

- Les symboles en gras $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}, \ldots)$ sont réservés pour les matrices (majuscules) et les vecteurs (minuscules).
- Les vecteurs doivent être interprétés comme des vecteurs-colonnes ou des vecteurs-lignes selon le contexte (pas ou peu de signes transposés).

  $\boldsymbol{Ax}$: $\boldsymbol{x}$ vecteur-colonne $\qquad$ $\boldsymbol{yA}$: $\boldsymbol{y}$ vecteur-ligne

  $\boldsymbol{xy}$: produit scalaire
- Les inégalités entre vecteurs (matrices) doivent être comprises composantes par composantes :

$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \iff x_1 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0$$

Mais $\boldsymbol{x} \not\geq \boldsymbol{0} \iff \exists\, i \text{ t.q. } x_i < 0.$

Équivalence des formulations canonique et standard

Théorème 1. *Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transformé en un PL sous forme canonique équivalent.*

Théorème 2. *Au prix éventuel de l'ajout de contraintes et/ou de variables, tout PL peut être transformé en un PL sous forme standard équivalent.*

Par programme équivalent, on entend :

- toute solution admissible (optimale) du problème équivalent correspond à une solution admissible (optimale) du problème initial ;
- toute solution admissible (optimale) du problème initial correspond à au moins une solution admissible (optimale) du problème équivalent ;
- l'issue de l'optimisation des deux problèmes est la même (sans solution admissible, optimum fini, problème non borné).

Règles de transformation

- Minimisation $\leftrightarrow$ maximisation : $\min f(\boldsymbol{x}) = -\max\left(-f(\boldsymbol{x})\right)$

  Pour minimiser $z = \boldsymbol{cx}$, il suffit de maximiser $w = -\boldsymbol{cx} = (-\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}$ et de multiplier la valeur optimale de w par -1 pour obtenir celle de z.
- Inéquation “$\geq$“ $\leftrightarrow$ inéquation “$\leq$“ :

$$\boldsymbol{ax} \geq b \iff (-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} \leq -b$$

- Équation $\rightarrow$ inéquation “$\leq$“ :

$$\boldsymbol{ax} = b \iff \begin{cases} \boldsymbol{ax} \leq b \\ \boldsymbol{ax} \geq b \end{cases} \iff \begin{cases} \boldsymbol{ax} \leq b \\ (-\boldsymbol{a})\boldsymbol{x} \leq -b \end{cases}$$

Règles de transformation (suite)

- Inéquation $\rightarrow$ équation : On ajoute une variable d'écart (de surplus)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{ax} \leq b &\iff \boldsymbol{ax} + s = b, s \geq 0 \\ \boldsymbol{ax} \geq b &\iff \boldsymbol{ax} - s = b, s \geq 0 \end{aligned}$$

- Variable libre (réelle) $\rightarrow$ variable non négative : Tout nombre réel peut être écrit comme la différence de deux nombres non négatifs.

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$$

- Variable bornée inférieurement :

$$x \geq b \iff \begin{cases} x = x' + b \\ x' \geq 0 \end{cases}$$

Exemple de mise sous forme canonique

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Min} & z = & -3x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & x_2 & = & 6 \\
 & & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 \\
 & & x_1 & & & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

PL initial

Modifications

$$
\begin{array}{lcl}
\text{Min } z = -3x_1 + 4x_2 & \to & \text{Max } w = 3x_1 - 4x_2 \\
x_1 + x_2 = 6 & \to & \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ -x_1 - x_2 & \leq & -6 \end{array} \right. \\
x_1 - 2x_2 \geq 4 & \to & -x_1 + 2x_2 \leq -4 \\
x_1 \in \mathbb{R} & \to & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1^+ - x_1^- \\ x_1^+, x_1^- \geq 0 \end{array} \right.
\end{array}
$$

PL initial

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{Min} & z = & -3x_1 & + & 4x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1 & + & x_2 & = & 6 \\
 & & x_1 & - & 2x_2 & \geq & 4 \\
 & & x_1 & & & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

PL canonique équivalent

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{Max} & w = & 3x_1^+ & - & 3x_1^- & - & 4x_2 & & \\
\text{s.c.} & & x_1^+ & - & x_1^- & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & & -x_1^+ & + & x_1^- & - & x_2 & \leq & -6 \\
 & & -x_1^+ & + & x_1^- & + & 2x_2 & \leq & -4 \\
 & & x_1^+ & , & x_1^- & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Ne pas oublier que $z_{opt} = -w_{opt}$! !

Règles de transformation particulières

- Problème Min-Max ou Max-Min :

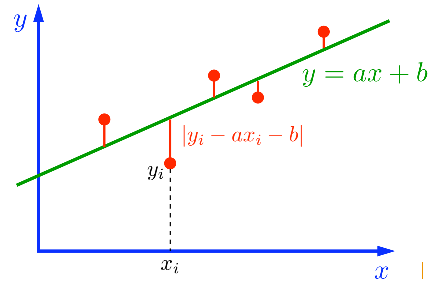
$$
\text{Min} \quad z = \max\{\boldsymbol{c_1 x}, \ldots, \boldsymbol{c_k x}\} \quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{array}{llrcl}
\text{Min} & z = & t & & \\
\text{s.c.} & & t & \geq & \boldsymbol{c_1 x} \\
 & & & \cdots & \\
 & & t & \geq & \boldsymbol{c_k x} \\
 & & t & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

- Valeurs absolues : $|x| \leq b \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x & \leq & b \\ x & \geq & -b \end{array} \right.$

Exemple : approximation de Chebychev

Données : m mesures

$$(\boldsymbol{x}_i, y_i) \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \ldots, m$$



Objectif : Déterminer une approximation linéaire $y = \boldsymbol{ax} + b$ minimisant la plus grande erreur d'estimation.

Formulation :

$$\text{Min } z = \max_{i=1,\ldots,m} \{ \, |y_i - \boldsymbol{ax}_i - b| \, \}$$

Les variables de décision de ce problème sont $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$!

On peut récrire le problème comme

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z = & \max_{i=1,\ldots,m} \{\Delta_i\} \\ \text{s.c.} & \Delta_i = & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

puis

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & z = & t \\ \text{s.c.} & t \geq & |y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b| \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

pour finalement obtenir une formulation linéaire

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & z = & t & \\ \text{s.c.} & t \geq & y_i - \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i - b & i = 1, \ldots, m \\ & t \geq & -y_i + \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_i + b & i = 1, \ldots, m \end{array}$$

avec $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$.

Objectifs

- Connaître les définitions des formes canonique et standard d'un PL.
- Maîtriser les règles de transformations permettant de passer d'une formulation à une autre équivalente.
- Pourvoir transformer une formulation non linéaire d'un problème d'optimisation en un programme linéaire (lorsque c'est possible évidemment).