TD : Graphes et automates (2)

EXERCICE 1

Parmi les trois graphes suivants, dont on donnera les séquences de degrés, montrer que deux sont isomorphes, et que le troisième n'est pas isomorphe aux deux autres.

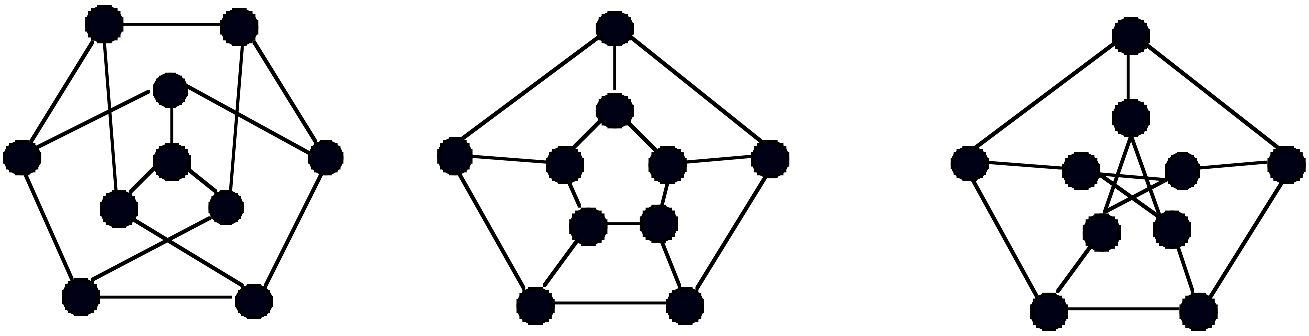

FIG. 1 – Graphes de PETERSEN et un intrus

EXERCICE 2

En considérant la séquence des degrés, montrer que dans un graphe d'ordre n avec $n \geq 2$, deux sommets au moins ont même degré.

EXERCICE 3

a) Construire un graphe de séquence de degrés $(0,0,1,3,3,3,4,4,5,5)$.
b) Existe-t-il un graphe de séquence de degrés $(0,0,1,2,2,2,6,7)$?

EXERCICE 4

Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle d'ordre impair.

EXERCICE 5

Pour le graphe G de la figure 2 utiliser l'algorithme de DIJKSTRA pour trouver les distances $d(x,a)$ où $a \in G$. En particulier, déterminer un chemin de poids minimum reliant x à y.

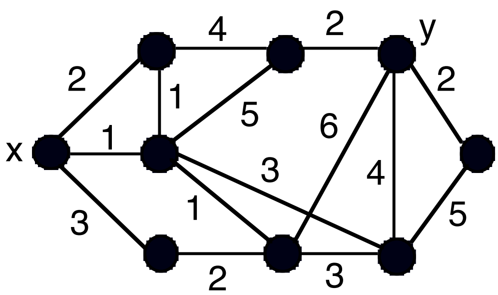

FIG. 2 – Graphe G

EXERCICE 6

Trouver tous les arbres d'ordre 6 à isomorphisme près.

EXERCICE 7

Appliquer les algorithmes de KRUSKAL et de PRIM au graphe G de la figure 3, pour trouver un arbre recouvrant de poids minimum (pour l'algorithme de PRIM, on commencera par le sommet x).

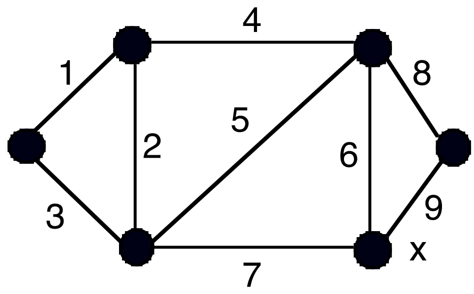

FIG. 3 – Graphe G

EXERCICE 8

Quel est le nombre chromatique de K_n ? de P_n ? de S_n ?

EXERCICE 9

Déterminer le polynôme chromatique du graphe G de la figure 4.

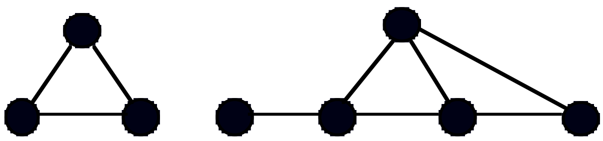

FIG. 4 – Graphe G

EXERCICE 10

Pour le graphe de la figure 5, déterminer une coloration optimale par coloration gloutonne (après choix convenable d'un sommet). Trouver aussi une coloration optimale qui n'est pas gloutonne.

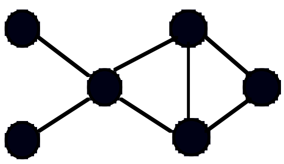

FIG. 5 – Graphe G

EXERCICE 11

Exercice pour «matheux»
1) *Lemme de la chaîne extraite* S'il existe dans un graphe G un parcours reliant deux sommets x et y d'un graphe, alors x et y sont reliés par une chaîne de G extraite du parcours.
(considérer un parcours de longueur minimum reliant x à y).
2) Montrer la transitivité de la relation dont les classes d'équivalence sont les classes de connexité d'un graphe.
3) Montrer que dans un graphe, si x, y et z sont des sommets, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.