DEVOIR SURVEILLÉ : graphes (durée 60 mn)

Ce devoir surveillé comporte 3 exercices totalement indépendants.

On veillera à encadrer les résultats.

Le barème sur 23 (Ex 1 : 9 points, Ex2 : 4 points, Ex3 : 10 points) tient compte de la longueur du sujet.

EXERCICE 1

1) Existe-t-il un graphe dont la séquence de degrés est $(3,3,3,3,3,3,3)$?

Dans la suite de cet exercice, on se propose de déterminer tous les graphes, à isomorphisme près, de séquence de degrés $s=(3,3,3,3,3,3)$.

2) Construire un graphe G, de séquence de degrés s, avec la méthode algorithmique vue en cours.

Soit $G=(S,A)$ un graphe. On appelle **dual** de G, le graphe G^* dont l'ensemble des sommets est S et tel que, pour x et y dans S, xy est une arête dans G^* si et seulement si xy n'est pas une arête dans G.
Ainsi, G a pour séquence de degrés s si et seulement si G^* a pour séquence de degrés $s^*=(2,2,2,2,2,2)$.

3) Montrer qu'il existe exactement deux graphes de séquence de degrés $(2,2,2,2,2,2)$ et vérifier que leurs représentations sont données ci-dessous :

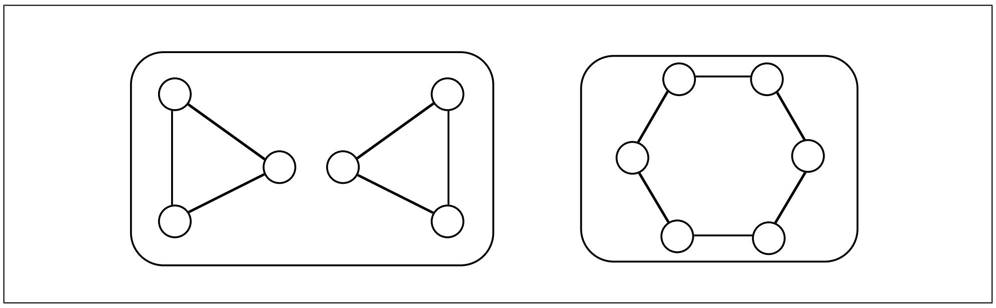

FIG. 1 – Graphes de séquences de degrés s^*

4) En déduire qu'il existe exactement deux graphes de séquence de degrés $s=(3,3,3,3,3,3)$.

5) *Illustration :* parmi les graphes G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 et G_6 suivants, lesquels sont isomorphes ?

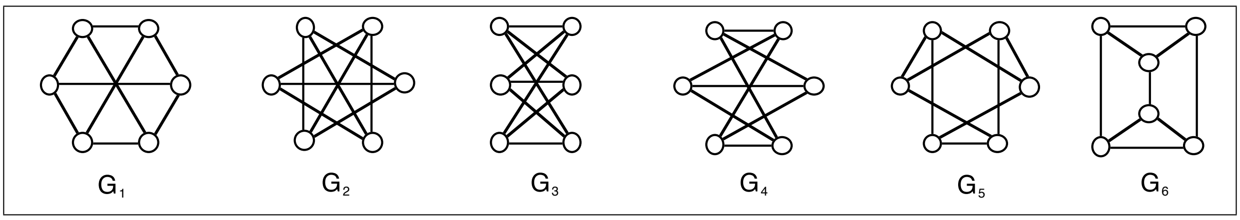

FIG. 2 – Graphes de séquences de degrés s

EXERCICE 2

Le graphe G suivant représente des villes $x_1, x_2, \ldots, x_8$ et des temps de parcourt entre celles-ci.

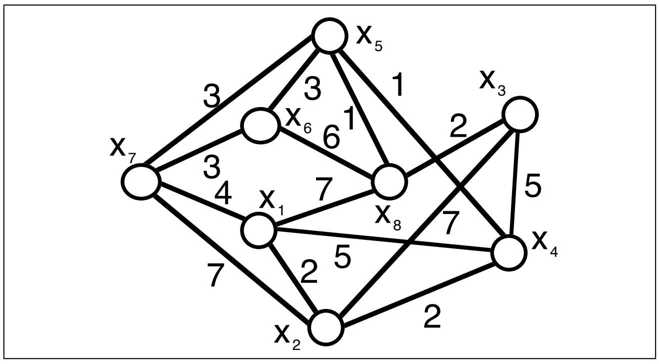

FIG. 3 – Graphe G

6) Déterminer, par un tableau, les temps de parcourt minimum entre la ville x_1 et les autres villes. En particulier donner la suite des villes reliant x_1 à x_3 et qui correspond au temps minimum de parcourt entre x_1 et x_3.

EXERCICE 3

Dans cet exercice, on étudie le nombre chromatique $\chi(G)$ du graphe G suivant :

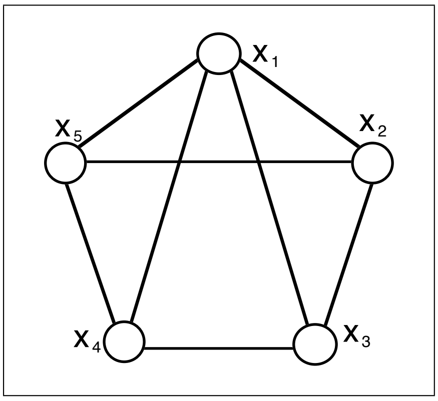

FIG. 4 – Graphe G

7) Donner un encadrement de $\chi(G)$ en expliquant cet encadrement.

8) a) Utiliser l'algorithme glouton de bonne coloration de G à partir de l'ordre des sommets proposé sur la figure précédente ; on notera $1, 2, \ldots$ les couleurs utilisées dans cet algorithme.

b) Que peut-on en conclure ?

9) Déterminer le polynôme chromatique P_G de G et retrouver le résultat de la question précédente. On précisera en particulier le nombre de bonnes colorations minimales de G.