Université de Savoie Année 05/06

Mathématiques générales : algèbre (MATH303 – 6 ECTS)

Contrôle continu 3

Mercredi 11 janvier 2006 (10-11h) : durée 1h00

Notes importantes :
- Aucun document autorisé.
- Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction, de la clarté et de la précision des démonstrations dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (Questions de polynôme caractéristique)

1. Montrer que si $A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors AB et BA ont même polynôme caratéristique.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.
   (a) Déterminer les valeurs propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?
   (b) Montrer que $det(I + M) = 1$.

Exercice 2 (Questions de valeur et vecteur propre)

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Montrer que les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses des valeurs propres de A.
2. Soient f, g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}-$ev de dimension n. On suppose que f et g admettent n valeurs propres distinctes. Montrer :

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow f \text{ et } g \text{ ont les mêmes vecteurs propres.}$$

Exercice 3 (Théorème de Cayley-Hamilton) Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer M^n, $n \geqslant 2$ à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 4 (Réduction des matrices) Soient b et d deux entiers tel que $b \geqslant 4$. On pose $E_m = \mathbb{R}_m[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à 1 indéterminée et à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m. On définit l'application $\phi : E_m \to E_m$ par $\phi(P) = (d+bX)P(X)+X(1-X)P'(X)$.

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que E_n est stable par ϕ.
3. On pose $\phi_n : E_n \to E_n$ la restriction de ϕ à E_n. Soit M la matrice de ϕ_n par rapport à la base canonique de E_n.
   (a) Déterminer le nombre de lignes l et le nombre de colonnes c de M.
   (b) Déterminer la première colonne M_1 de M et la deuxième colonne M_2 de M.
   (c) Déterminer la $k$ième colonne M_k de M $(3 \leqslant k \leqslant c-1)$ et M_c la dernière colonne de M.
   (d) Montrer que tout vecteur propre de M est un polynôme de degré b.
   (e) Vérifier que les polynômes $P_k(X) = X^k(1-X)^{b-k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant b$ sont des vecteurs propres de M.
   (f) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant b}$ est une base de E_n. En déduire que M est diagonalisable.