Université de Savoie Année 05/06

Mathématiques générales : algèbre (MATH303 – 6 ECTS)

Contrôle continu 2

Mercredi 23 novembre 2005 : durée 1h00

Notes importantes :
- Aucun document autorisé.
- Il sera tenu le plus grand compte de la rédaction, de la clarté et de la précision des démonstrations dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (Questions de cours sur les permutations)

1. Donner la définition du support d'une permutation.
2. Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$. Démontrer que si $supp\sigma \cap supp\tau = \emptyset$ alors $\sigma\tau = \tau\sigma$.

Exercice 2 Soit τ une transposition de $\mathfrak{S}_n$.

1. Montrer que τ peut s'écrire comme un produit de transpositions échangeant deux entiers consécutifs.
2. En déduire que l'ensemble des transpositions échangeant deux entiers consécutifs engendre $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 3 Soient $\mathcal{C}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 3, 4)$ et $w = (4, 9, 16)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer $det_{\mathcal{C}_3}(u, v, w)$.
2. En déduire que (u, v, w) constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 Soient $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et $b = (b_1, \ldots, b_n)$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 & b_1 & \ldots & \ldots & b_1 \\ b_2 & a_2 + b_2 & b_2 & \ldots & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_k & \ldots & b_k & a_k + b_k & b_k & b_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & \ldots & \ldots & \ldots & b_n & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

1. Exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
2. En déduire Δ_n en fonction de a et b.

Exercice 5 On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & \ldots & (n+1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)^2 & n^2 & (n+1)^2 & \ldots & (2n-2)^2 \\ n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 & \ldots & (2n-1)^2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $det(M) = 0$ si $n \geq 4$.
2. Que peut on dire pour $n < 4$?