UNIVERSITÉ DE SAVOIE MASS-SFT, L1, 2005-2006

Contrôle des connaissances de mathématiques pour les sciences, Math204 n°1.

Code apogée : EDA22504C1(SFT), EDM22504C1(MASS)

Vendredi 17 février (Durée : 1 heure)

IMPORTANT :

- **Reporter sur la copie cachetée l'intitulé complet de l'épreuve.**
- **Ne pas oublier de noter sur la copie cachetée TOUS les numéros des copies intercalaires.**
- **Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés.**

Barème approximatif : Ex1 : 6 points; Ex2 : 3 points; Ex3 : 3 points; Ex4 : 6 points; Ex5 : 2 points.

E1) Soit A la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A = -I + N$, avec I la matrice identité et N vérifiant $N^3 = O$. En déduire les puissances entières naturelles de A.
Calculer $(N - I)(I + N + N^2)$. En déduire l'inverse A^{-1} de A.

E2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer la matrice inverse de B en appliquant la méthode de Gauss.

E3) Résoudre le système suivant, en fonction des paramètres réels a et b :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ bx + 2by + 2bz = b + 1 \\ x + (b+1)y + (a+b+1)z = a + b + 1 \end{cases}$$

E4) Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs :
$\overrightarrow{a} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{b} = (0, -2, 1)$, $\overrightarrow{c} = (2, -2, 1)$, et $\overrightarrow{d} = (2, 0, -1)$.

1. Reconnaître parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, les familles libres, les familles génératrices et les bases de $\mathbb{R}^3$: $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$, $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\}$, $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}\}$.
2. Déterminer une base, des équations paramétriques et une équation cartésienne du sous-espace vectoriel F engendré par $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\}$.
3. Soit $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 0\}$. Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner des équations paramétriques, puis une base. Quelle est sa dimension ?

E5) Calculer les déterminants suivants :

1 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, *2* $\begin{vmatrix} 1000 & -1000 & 2000 \\ -1001 & 1000 & -2002 \\ -2001 & 2000 & -2001 \end{vmatrix}$