UNIVERSITÉ DE SAVOIE MASS-SFT, L1, 2005-2006

Contrôle des connaissances de mathématiques pour les sciences, Math205.

Vendredi 16 juin 2006 (Durée : 2 heures)

IMPORTANT :

- **Reporter sur la copie cachetée l'intitulé complet de l'épreuve.**
- **Ne pas oublier de noter sur la copie cachetée TOUS les numéros des copies intercalaires.**
- **Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés.**

Barème approximatif : Ex1 : 4 points; Ex2 : 4 points; Ex3 : 2 points; Ex4 : 3 points; Ex5 : 1,5 points; Ex6 : 4 points; Ex7 : 1,5 points.

E1) Déterminer l'ensemble de définition puis les extremums locaux, en précisant leur nature, de la fonction suivante :
$f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - x + \dfrac{y^3}{3} - 4y.$
Pour chacun des extremums locaux trouvés préciser s'ils sont globaux.

E2) Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 + \sin t - \cos^2 t)\cos t}{\sin t(2 - \cos^2 t)}\, dt$$

E3) Etudiez la convergence de l'intégrale généralisée suivante, puis calculer sa valeur si elle converge :

$$J = \int_0^1 t^2(\ln t)\, dt$$

E4) Etudiez la convergence de l'intégrale généralisée suivante, puis calculer sa valeur si elle converge :

$$K = \int_3^{+\infty} \frac{-3t+4}{t^3 - 3t^2 + 2t}\, dt$$

E5) Calculer la limite de la suite suivante :
$u_n = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$

E6) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n^4 - u_n^2 + 2u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^4 - x^2 + 2x)$ est croissante sur $[-1, 1]$.
2. En déduire que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I = [-1, 1]$.
3. Montrer que la suite u_n est décroissante.
4. En déduire que u_n est convergente et calculer sa limite ℓ.

E7) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ M^n = 2^{n-1}M$.
2. Soit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par leurs premiers termes a_0, b_0 et la formule de récurrence définie pour $n \geq 1$:

   $$\begin{cases} a_n &= a_{n-1} - b_{n-1} \\ b_n &= -a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases}$$

   En utilisant 2), donner a_n et b_n en fonction de a_0, b_0 et n.