

**Contrôle des connaissances
de mathématiques**

(M. Denis Richard & M. Khelifa Saber)

Lundi 25 juin 2007 (Durée : 2 heures)

Exercice 1:

1. Établir la suite fondamentales améliorée de treize en base mille.
En déduire le reste dans la division par treize de $N = 5004003002001$ (écriture décimale).
2. Établir la suite fondamentales améliorée de douze en base décimale.
3. Pour tout entier p premier et pour tout entier $a \in \mathbb{N}$, premier avec p , on rappelle que $a^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$. Utiliser ce résultat et ce qui précède pour déterminer l'entier α qui vérifie :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \leq 13 \\ N^N &\equiv \alpha \pmod{13}. \end{aligned}$$

Exercice 2:

1. Trouver les entiers x_0 et y_0 tels que :

$$22x_0 + 75y_0 = 1$$

2. En déduire un entier, qu'on notera β , et qui vérifie :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \beta \leq 1650 \\ \beta &\equiv 3 \pmod{22} \\ \beta &\equiv 2 \pmod{75}. \end{aligned}$$

3. Calculer les inverses respectifs de 3 dans $\mathbb{Z}/_{22}\mathbb{Z}$ et de 2 dans $\mathbb{Z}/_{75}\mathbb{Z}$

4. Résoudre $X \equiv 15 \pmod{22}$
 $X \equiv 38 \pmod{75}$
 $0 \leq X \leq 1650$.

Vérifier que \bar{X} est l'inverse de $\bar{\beta}$ dans $\mathbb{Z}/_{1650}\mathbb{Z}$.

5. Justifier et expliquer le résultat de la question 4.

Exercice 3: On considère les mots sur $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$. On demande de construire un automate fini qui, pour tout mot $w \in \Sigma^*$, s'arrête après la lecture sur un état dont le numéro est le reste modulo 3 de l'entier représenté, en base 4, par w (en convenant que les mots $O^n w$ et w) représentent le même entier.

Exercice 4: On considère l'automate A ci-dessous sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.

1. Donner les entiers n, m, p tels que le langage $\mathcal{L}(A)$ reconnu par A soit $R(m, n, p)$.
2. Déterminer successivement $R(0, 0, 0)$, $R(1, 0, 0)$, $R(0, 1, 1)$, $R(1, 0, 1)$, $R(1, 1, 1)$ et $\mathcal{L}(A)$.