Université d'Auvergne **IUT d'Aubière**

Contrôle des connaissances de mathématiques

Vendredi 1 juin 2007 (Durée : 1 heures)

Exercice 1: On considère l'alphabet $\{M, I, U\}$ et l'axiome MI. Les règles de dérivation sont celles du système $POST$:

1. $XI \rightarrow XIU$
2. $MX \rightarrow MXX$
3. $XIIIY \rightarrow XUY$
4. $XUUY \rightarrow XY$

a) Le mot $UMUI$ est-il dérivable à partir de MI en utilisant les règles précédentes ?

b) Donner s'il en existe, une dérivation de $MIUIUIUII$.

Exercice 2: Vérifier ou prouver par deux méthodes que les assertions suivantes sont des tautologies :

1. $\neg(A \wedge \neg A)$ (principe de non contradiction ou le tier exclu).
2. $[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$ (base de la preuve directe).
3. $[(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow (A \rightarrow C)$ (transitivité de $\rightarrow$).
4. $[A \wedge \neg(A \wedge B)] \rightarrow \neg B$ (principe d'incompatibilité).

Exercice 3: On rappelle les axiomes du calcul propositionnel:

(S_1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(S_2) $[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow (A \rightarrow B)$

(S_3) $(A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)]$

(S_4) $(A \leftrightarrow B) \to (A \to B)$

(S_5) $(A \leftrightarrow B) \to (B \to A)$

(S_6) $(A \to B) \to [(B \to A) \to (A \leftrightarrow B)]$

(S_7) $(\neg B \to \neg A) \leftrightarrow (A \to B)$

(S_8) $(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \to B)$

(S_9) $(A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \to \neg B)$

On veut démontrer que $(X \wedge Y) \to Y$ à l'aide des axiomes précédents et la règle $MODUS\ \ PONENS$. Justifier chaque proposition de la preuve ci-dessous et compléter (6).

(1) $\neg Y \to (X \to \neg Y)$ [Justification :]

(2) $(X \to \neg Y) \to \neg\neg(X \to \neg Y)$
[Justification par utilisation d'un théorème :]

(3) $[\neg Y \to \neg\neg(X \to \neg Y)]$ [Justification :]

(4) $[\neg Y \to \neg\neg(X \to \neg Y)] \to [\neg(X \to \neg Y) \to Y]$
[On donnera ci-dessous une preuve formelle de (4)]

(5) $\neg(X \to \neg Y) \to Y$ [Justification :]

(6) [Justification :]

(7) $(X \wedge Y) \to Y$ [Justification :]