

MATH204

Série 3 : Polynômes et fractions rationnelles (2 séances).

Séance 8 : ex1 (1,4,5,6), ex2 (1), ex3 (1,2,3)

Séance 9 : ex1 (2,3,7,8), ex2 (2,3), ex3 (4,5,6,7).

Séance 10 : retard+ ex 4, 5.

Séance 11 : sujet de l'an dernier.

**Exercice 1**

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

1.  $z^2 - z + 2 = 0$
2.  $z^2 + (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$
3.  $(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$
4.  $z^3 + (2i - 5)z^2 + 7(1 - i)z - 2 + 6i = 0$ , sachant qu'elle admet une racine réelle que l'on calculera.
5.  $z^4 - z^2 + 1 = 0$
6.  $z^3 - 3z^2 + z + 5 = 0$
7.  $(z^2 + 4z + 1)^2 + (3z + 5)^2 = 0$
8.  $z^5 - 4z^4 + 9z^3 - 21z^2 + 20z - 5 = 0$  en sachant que deux des solutions ont un produit égal à 5.

**Exercice 2**

Effectuer la division euclidienne de  $A$  par  $B$  :

1.  $A(X) = X^5 + X^4 - X^3 + X - 1$ ,  $B(X) = X^3 + X^2 + 2$ .
2.  $A(X) = X^7 + 2X^6 + 3X^5 + 2X^2 + 7X + 4$ ,  $B(X) = X^5 + 2$ .
3.  $A(X) = 2X^6 + 3X^5 + X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 5X + 13$ ,  $B(X) = X^4 + X + 1$ .

**Exercice 3**

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles réelles suivantes :

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}, \quad \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}, \quad \frac{(x-1)^3}{x^2 - 4}, \quad \frac{x^4 + 4}{x^4 - 4}, \quad \frac{1}{x^3 + 1},$$
$$\frac{x^4 + 2}{x(x^2 - 1)}, \quad \frac{x^7 + 1}{x(x^2 + 1)}, \quad \frac{1}{x(x-1)^3}.$$

**Exercice 4**

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle réelle suivante :  $\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^3 - 3x + 2}$ ,

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $A = x^8 + x^6 + 3x^4 - 1$  par  $B = x^6 - x^2$

puis décomposer en éléments simples la fraction rationnelle réelle suivante :  $\frac{4x^4 + x^2 - 1}{x^6 - x^2}$  et en déduire celle de la fraction rationnelle  $\frac{x^8 + x^6 + 3x^4 - 1}{x^6 - x^2}$ .

**Exercice 5**

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles réelles suivantes :  $\frac{2x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + x^2}$  et

$$\frac{x^6 + x^5 + 2x^3 - x^2 - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x}.$$