Université de Savoie **LST MASS-SFT, L1**
2005-2006

MATH205

Série : Compléments pour les suites et les fonctions (2,5 séances).

Séance 6 : ex 1, 2, 4, 5, 7.
Séance 7 : ex 8, 9, 10, 11, 12, 13.
Séance 8 : ex 15 + retard+ exercices facultatifs.
Les exercices facultatifs 3, 6, 14 et 16 seront donnés en corrigés écrits.

Exercice 1
Montrer :
$\ln(n^2+n+1) \sim 2\ln n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$.

Exercice 2
Calculer les limites des suites suivantes définies par leur terme général :
$u_n = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$, $u_n = \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{n+1}$.

Exercice 3 (facultatif)
On définit deux suites (u_n) et (v_n) par leurs premiers termes u_0 et v_0 tels que $0 < u_0 < v_0$ et les relations de récurrence : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont monotones, convergentes et ont la même limite que l'on ne calculera pas.

Exercice 4
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 35}$.
Montrer que cette suite est croissante, majorée par 7, puis étudier sa convergence et calculer sa limite.

Exercice 5
Soit u_n $(n \geq 0)$ la suite définie par

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n) \quad \text{et } u_0 = e.$$

1. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$.
   (On pourra établir une inégalité entre $\dfrac{1}{1+x}$ et 1 et procéder par intégration).
   En déduire que $u_1 \leq u_0$.
2. Montrer que u_n est bien définie et $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite u_n est décroissante.
4. En déduire que u_n est convergente et préciser sa limite ℓ. (Justifier votre réponse).

Exercice 6 (facultatif)
Sur le marché d'un certain bien, les fonctions de demande D et d'offre S vérifient aux périodes successives les relations suivantes : pour $n \in \mathbb{N}$, $D_n = -6P_n + 26$ et $S_n = 4(P_{n-1} - 1)$, où P_n, D_n, S_n représentent respectivement le prix, la demande et l'offre à l'époque n.
Supposant le marché en équilibre, $(D_n = S_n)$, établir la relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n).
Déterminer la limite éventuelle l de cette suite, puis étudier la convergence de la suite $(\pi_n) = (P_n - l)$. Que peut-on en conclure quant à l'évolution de (P_n) ?

Exercice 7

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2 et J^3. En déduire J^k, pour $k \geq 3$.
2. On pose $T = 2I + J$. Donner T^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies par :
   $\left\{ \begin{array}{lcl} a_n & = & 2a_{n-1} \\ b_n & = & 2a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ c_n & = & b_{n-1} + 2c_{n-1} \end{array} \right.$
   En utilisant 2), donner a_n, b_n et c_n en fonction de a_1, b_1, c_1 et n.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Montrer, par récurrence, que pour $n \in \mathbb{N}$:
   $A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \\ v_n & u_n + w_n & v_n \\ w_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$, où (u_n), (v_n) et (w_n) sont des suites réelles vérifiant :
   $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$
   $\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n + \sqrt{2}v_n \\ v_{n+1} & = & \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n \\ w_{n+1} & = & \sqrt{2}v_n + w_n \end{array} \right.$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose $d_n = u_n - w_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $d_{n+1} = d_n = 1$.
3. On pose $s_n = u_n + w_n$. Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n et v_n, puis v_{n+2} en fonction de s_{n+1} et v_{n+1}.
   En déduire $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$.
4. Déterminer deux suites géométriques, (x_n) et (t_n), de premier terme 1, satisfaisant la relation $v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$ et vérifier que, quels que soient les réels a et b, la suite $(ax_n + bt_n)$ satisfait cette même relation. En déduire v_n et s_n en fonction de n.
5. A l'aide de s_n et d_n, calculer u_n et w_n en fonction de n.

Exercice 9

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

1. Si I est borné, alors f est bornée et atteint ses bornes sur I.
2. Si a et b sont deux éléments de I et si $f(a) \leq y \leq f(b)$, alors il existe c entre a et b tel que $f(c) = y$
3. Si I est ouvert, alors $f(I)$ est ouvert.

Rappel : Les intervalles ouverts sont : $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$, $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$. Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$.
Si f est continue montrer qu'il existe au moins un réel $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 12
Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis :
$\forall x \in R_*^+,\ \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x}.$

Exercice 13
En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln, montrer l'inégalité suivante :
$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^{+*2},\quad \left(b \leq a \Longrightarrow \dfrac{a-b}{a} \leq \ln\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a-b}{b} \right)$

Exercice 14 (facultatif)
En appliquant le théorème des accroissements finis, calculer :
$\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{1+x}} - xe^{\frac{1}{x}}.$

Exercice 15
On considère la fonction numérique f définie, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$. On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ (unités : 3 cm sur $(O, \overrightarrow{\imath})$ et 10 cm sur $(O, \overrightarrow{\jmath})$).

1. (a) Étudier les variations de f et préciser la nature de ses branches infinies.
   (b) Démontrer que $(\mathcal{C})$ possède un point d'inflexion I (c'est-à-dire un point $I = (x_0, f(x_0))$ pour lequel la dérivée seconde s'annule et change de signe en x_0). Écrire une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ en I. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions (on notera α la plus grande).
   Déterminer l'entier n_0 tel que : $\dfrac{n_0}{100} < \alpha < \dfrac{n_0+1}{100}$.
   (c) Démontrer que, pour $x \in]-1,+\infty[$, $f(x) \leq x$.
   (d) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.
2. (a) Montrer que, si $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
   (b) On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que la suite (x_n) converge. Donner sa limite en justifiant la réponse.
3. Soit la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{k})$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.
   (b) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $2\ln(k+2) - 3\ln(k+1) + \ln k \leq f(\dfrac{1}{k})$.
   (c) Déduire de (b) que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{(n+2)^2}{4(n+1)}\right) \leq S_n$.
   La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 16 (facultatif)
Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2} \end{array}.$
Prouver que f est une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[)$ et expliciter la réciproque de f.