Université de Savoie **LST MASS-SFT, L1**
2005-2006

MATH204

Série 2 : Premières notions d'espaces vectoriels, rang, déterminant (3 séances).

Séance 3 : ex1, ex4, ex11(1,2,3)
Séance 4 : ex2, ex5, ex11(4), ex13(1,2).
Séance 5 : ex3, ex6, ex7, ex11(5,6), ex13(3).
Séance 6 : ex8, ex9, ex10, ex12, ex13(4).
Séance 7 : ex14 à 20 (séance de recherche en classe).

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^2, +, .)$, on considère les sous-ensembles :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{ (a, -a) \ / \ a \in \mathbb{R} \} \\ E_2 &= \{ (a, a-1) \ / \ a \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

1. Montrer que E_1est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ et que E_2 n'en est pas un.
2. Préciser une base de E_1, sa dimension et son équation cartésienne.
3. Soit $\overrightarrow{a} = (1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1, 1)$ et $\overrightarrow{c} = (2, 4)$,
   (a) Montrer que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$ est une famille liée.
   (b) Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^2$ engendré par $\overrightarrow{a}$.
   (c) Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique du sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^2$ engendré par $\overrightarrow{b}$.
   (d) Donner une équation cartésienne et une équation paramétrique du sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^2$ engendré par $\overrightarrow{c}$.
   (e) Déterminer $F \cap G$, $F \cap H$ et $G \cap H$.

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel réel $(\mathbb{R}^3, +, .)$, on considère les sous-ensembles :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{ (a, a, 0) \ / \ a \in \mathbb{R} \} \\ E_2 &= \{ (a, a+b, b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \} \\ E_3 &= \{ (a, 2a, a) \ / \ a \in \mathbb{R} \} \\ E_4 &= \{ (a, b, a-b) \ / \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \} \\ E_5 &= \{ (a, a, 1) \ / \ a \in \mathbb{R} \} \\ E_6 &= \{ (a, a^2, a^3) \ / \ a \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

1. Montrer que E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et que E_5 et E_6 n'en sont pas.
2. Préciser pour chacun des sous-espaces vectoriels E_1, E_2, E_3 et E_4 s'il s'agit d'une droite vectorielle ou d'un plan vectoriel. Indiquer pour chacun de ces sous-espaces une base et, dans le cas d'un plan vectoriel, donner son équation.
3. Déterminer la nature de chacun des sous-espace $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_2$, $E_3 \cap E_4$ et $E_2 \cap E_4$.

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ défini sur $\mathbb{R}$, on considère les vecteurs :
$\overrightarrow{a} = (2, 0, 1)$, $\overrightarrow{b} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{c} = (-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{d} = (2, -1, 0)$.

1. Montrer que $\{ \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \}$ et $\{ \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d} \}$ sont respectivement une partie libre et une partie liée de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\{ \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. $\{ \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d} \}$ est-elle une partie génératrice de $\mathbb{R}^3$?
4. Quelle est la forme générale des triplets, vecteurs du sous-espace vectoriel F engendré par $\{ \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d} \}$?

5. Si (x, y, z) est élément du sous-espace vectoriel G engendré par $\{ \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \}$, quelle relation existe-t-il entre les réels x, y et z ?
6. Déterminer la forme générale des triplets, éléments du sous-espace vectoriel $F \cap G$. Quelle est la dimension de ce sous-espace ?
7. Montrer que $H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - 2y + z = 0 \}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et qu'il est engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, 0, -1)$ et $\overrightarrow{v} = (0, 1, 2)$.
   Déterminer $F \cap H$ et $G \cap H$.

Exercice 4
Reconnaître parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, les familles libres, les familles génératrices et les bases de $\mathbb{R}^n$.
1) $n = 2$, $\mathcal{F}_1 = ((2, 1), (4, 3))$; $\mathcal{F}_2 = ((4, 3), (-1, 2), (6, -5))$; $\mathcal{F}_3 = ((3, 1), (-6, -2))$.
2) $n = 3$, $\mathcal{F}_4 = ((1, 4, 5), (3, -2, 1), (1, 7, -8))$; $\mathcal{F}_5 = ((1, 7, 2), (4, 1, 5), (0, 0, 0))$;
$\mathcal{F}_6 = (6, -3, 2), (7, 4, 3), (5, -10, 1)$; $\mathcal{F}_7 = ((1, -1, 2), (3, 7, 10), (-5, 4, 7))$

Exercice 5
On considère $G \subset \mathbb{R}^3$ défini par : $G = \{(2a + 3b, -a + 2b, 4a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2)\}$.
Montrer que G est un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$. Donner une base de G.

Exercice 6
1) Le vecteur $u = (2, 14, -34, 7)$ appartient-il au sous-espace engendré par $v = (1, 4, -5, 2)$ et $w = (1, 2, 3, 1)$?
2) Déterminer a et b de sorte que le vecteur $(a, b, 3, 7)$ appartienne au sous-espace engendré par $(1, 2, -5, 3)$ et $(2, -1, 4, 7)$.

Exercice 7
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère : $e_1 = (1, 2, -1)$, $e_2 = (1, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Écrire le vecteur $u = (x, y, z)$ dans cette base.

Exercice 8
Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la base $B = (i, j, k)$.
1) Montrer que $B' = (i + j, j + k, k + i)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Si le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ a pour coordonnées (x, y, z) dans la base B, quelles sont ses coordonnées dans la base B' ?
2) Trouver une relation liant les quatre éléments de $\mathbb{R}^3$:
$e_1 = 2i + j$, $e_2 = -i + 3k$, $e_3 = 2j - k$, $e_4 = i + j + k$.

Exercice 9
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $a = (0, 1, -1, 2)$, $b = (1, 3, 0, -2)$, $c = (2, 1, -3, 4)$, $u = (0, 0, 2, 1)$ et $v = (-1, 1, 0, 3)$. On note $F = \text{Vect}\,(a, b, c)$ et $G = \text{Vect}\,(u, v)$. Déterminer les dimensions de F et de G.

Exercice 10
Soit $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 2)$, $u_3 = (1, 1, 3)$ et $u_4 = (0, 2, 2)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donner une base du sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3, u_4).

Exercice 11
Calculer les déterminants suivants :

1 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$, *2* $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \\ 6 & 6 & 13 \end{vmatrix}$, *3* $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

4 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2a+3 & 3a^2+4a \\ 1 & 2b+3 & 3b^2+4b \\ 1 & 2c+3 & 3c^2+4c \end{vmatrix}$ de façon factorisée, *5* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$, *6* $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

Exercice 12
Calculer les déterminants suivants :
1 $\begin{vmatrix} 1002 & 1001 & 999 \\ 997 & 1002 & 998 \\ 1001 & 1003 & 1000 \end{vmatrix}$, *2* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$, *3* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

Exercice 13
Calculer le rang des matrices suivantes :
1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
2 $B = \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 0 & q & 1 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$, suivant les valeurs de p, q et r.
3 $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, suivant la valeur de λ.
4 $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis calculer F telle que $D = FE$.

Exercice 14
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ défini sur $\mathbb{R}$, on considère les vecteurs :
$\overrightarrow{a} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{b} = (0, 1, -1)$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, -1)$, et $\overrightarrow{d} = (1, 3, -2)$.

1. Reconnaître parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, les familles libres, les familles génératrices et les bases de $\mathbb{R}^3$: $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$, $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$, $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\}$.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel F engendré par $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$. En donner des équations paramétriques et cartésiennes, puis une base.
3. Soit $G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y + z = 0, \ x - z = 0 \}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En donner des équations paramétriques, puis une base. Quelle est sa dimension ?

Exercice 15
Calculer les déterminants suivants :
1 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, *2* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Exercice 16
Reconnaître parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, les familles libres, les familles génératrices et les bases de $\mathbb{R}^n$.
1) $n = 2$, $\mathcal{F}_1 = ((1, 1), (1, 2), (2, 2))$; $\mathcal{F}_2 = ((1, 1), (1, 2))$.
2) $n = 3$, $\mathcal{F}_4 = ((1, 1, 1), (1, 1, 2), (-1, -1, -3))$; $\mathcal{F}_5 = ((1, 1, 1), (1, 2, 1), (1, -1, 0))$.

Exercice 17
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $a = (1, 2, 1, -1)$, $b = (-4, 1, -1, -2)$, $c = (2, 1, 1, 0)$. On note $F = \mathrm{Vect}\,(a, b, c)$. Déterminer la dimension de F.

Exercice 18
Calculer le déterminant suivant de manière factorisée :
$$\begin{vmatrix} b & a & a+b \\ -a+2b & 2a-b & 2a+c \\ b & a & a+b+c \end{vmatrix},$$

Exercice 19
Calculer le rang de la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20
Reconnaître parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, les familles libres, les familles génératrices et les bases de $\mathbb{R}^n$.
1) $n = 2$, $\mathcal{F}_1 = ((1,1),(2,3))$; $\mathcal{F}_2 = ((1,1),(2,3),(3,4))$.
2) $n = 3$, $\mathcal{F}_3 = ((1,1,1),(-1,1,1),(2,1,1))$; $\mathcal{F}_4 = ((1,1,1),(-1,1,1),(3,2,1))$.