Université de Savoie **LST MASS-SFT, L1**
2005-2006

MATH204

Série 1 : Matrices, systèmes linéaires (2 séances).

Séance 1 : ex1 à 6
Séance 2 : ex7 à 12

Exercice 1
Calculer les matrices inverses des matrices suivantes :
1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, *2* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2
Cet exercice présente une méthode particulière de calcul de l'inverse d'une matrice.
Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $B = A + 4I$.
2. Trouver une relation simple reliant B et B^2.
3. En déduire une relation reliant A, A^2 et I.
4. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3
Trouver X et Y vérifiant
$2X - 5Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$ et $-X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = B$.

Exercice 4
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$.
Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, on note ${}^tX$ la transposée de la matrice X.
Calculer AX, ${}^tXAX$ et ${}^tXA$.

Exercice 6
Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre réel m :
$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = -1 \\ 3x - (m+5)y + mz = 1 - m \\ x - 2y - z = -m \end{cases}.$$

Exercice 7

1. (a) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, puis en déduire N^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifiez que $M = I + N$ et en déduire M^n, pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Utiliser la même méthode pour calculer $M(a, b)^n$, où $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
2. S'inspirer de ce qui précède pour calculer $M(a, b)^n$, où $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et le polynôme $P(X) = X^3 - 4X^2 + 2X - 17$.

1. Vérifier que la matrice A annule le polynôme P.
2. En déduire que la matrice A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 9

Soit A et B les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A = I + N$, avec $N^3 = O$. En déduire les puissances entières naturelles de A.

Montrera que $(I + N)(I - N + N^2) = I - N^3$ et en déduire une expression de A^{-1} en fonction de I, N et N^2. Déterminer les puissances de A^{-1}.

Montrer que $B = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En déduire les puissances entières naturelles de B.

Peut-on calculer B^{-1} et ses puissances ?

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer A^p, $p \in \mathbb{N}$, et $(I - A)^{-1}$.

Exercice 11

Résoudre :

$\begin{cases} x + by = 1 \\ ax + by = 1 \\ x + aby = b \end{cases}$, où a et b sont des paramètres réels.

Exercice 12

Résoudre :

$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ ay + bz = 2 \\ cz = d \end{cases}$.

où a, b, c et d, sont des paramètres réels.